



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΛΟΙΟΥ

Γ.Α. ΑΘΑΝΑΣΟΥΛΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

Κ.Α. ΜΠΕΛΙΜΠΑΣΑΚΗΣ
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΛΟΙΟΥ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Δυναμική επιπλεόντων στερεών σωμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αλληλεπίδραση επιπλεόντων στερεών σωμάτων και κυματισμών:
Μελέτη στο πεδίο συχνοτήτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αλληλεπίδραση πλοίου κινούμενου με σταθερή πρόσω ταχύτητα
και κυματισμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ευστάθεια κινήσεως και πηδαλιουχία πλοίου

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΠΛΟΙΟΥ ΣΕ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Κεφάλαιο 1

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | | σελ. |
|-----|--|------|
| 1.1 | Γενική μορφή των εξισώσεων κίνησης ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος | 3 |
| 1.2 | Συστήματα συντεταγμένων: I. Ορισμοί | 10 |
| 1.3 | Συστήματα συντεταγμένων: II. Μετασχηματισμοί | 13 |
| 1.4 | Βαθμοί ελευθερίας στερεού σώματος. Γωνίες στροφής επιπλέοντος σώματος | 20 |
| 1.5 | Αδρανειακός ρυθμός μεταβολής διανύσματος ως προς κινούμενο σύστημα συντεταγμένων | 22 |
| 1.6 | Εξισώσεις κίνησης επιπλέοντος στερεού σώματος: I. Αδρανειακοί συντελεστές | 25 |
| 1.7 | Εξισώσεις κίνησης επιπλέοντος στερεού σώματος: II. Φορτίσεις | 34 |
| 1.8 | Βασικές έννοιες και απλά μαθηματικά εργαλεία για την ταξινόμηση, μελέτη και επίλυση ταλαντωτικών συστημάτων και κυματικών φαινομένων | 37 |
| 1.9 | Ασκήσεις και Εφαρμογές | |
| | Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 1 | |

Κεφάλαιο 1. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

1.1 Γενική μορφή των εξισώσεων κίνησης ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος

Για την μελέτη των δυναμικών φαινομένων αλληλεπίδρασης επιπλέοντων σωμάτων και του περιρρέοντος υγρού (νερού), τα επιπλέοντα σώματα μπορούν, σε πολλές περιπτώσεις, να θεωρηθούν ως απαραμόρφωτα στερεά⁽¹⁾. Από την άλλη μεριά, ένα ελεύθερα επιπλέον σώμα κινείται πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας (συνήθως) χωρίς να υπόκειται σε εξωτερικούς κινηματικούς συνδέσμους με συνέπεια να μπορεί να κινηθεί προς όλες τις κατευθύνσεις στο χώρο. Με άλλα λόγια, οι βαθμοί ελευθερίας ενός ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος είναι έξι, π.χ. τρεις γραμμικές μετακινήσεις ενός σημείου αναφοράς, και τρεις περιστροφές γύρω από ισάριθμους μη παράλληλους άξονες στο χώρο.

Βέβαια, ένα επιπλέον σώμα, σε αντίθεση με ένα υποβρύχιο ή ένα αεροπλάνο, κινείται έτσι ώστε να παραμένει πάντοτε κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας (εφ' όσον βέβαια δεν ... βυθίζεται!!), πράγμα που συνεπάγεται ότι οι κατακόρυφες μετακινήσεις των σημείων του είναι σχετικά μικρές.

Είναι προφανές ότι η μελέτη των δυναμικών αποκρίσεων ενός επιπλέοντος σώματος στη θάλασσα πρέπει να αρχίσει από την κατάσταση των εξισώσεων κίνησής του. Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα θεωρήματα μεταβολής της ορμής και της στροφορμής, καταλλήλως διατυπωμένα. Πριν προχωρήσουμε στην ακριβή διατύπωσή τους θα εισαγάγουμε τους απαιτούμενους συμβολισμούς.

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα $[B]$, το οποίο επιπλέει ελεύθερα πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας \mathcal{D}_F . Βλ. Σχήμα 1. Ας συμβολίσουμε με G το κέντρο μάζας του σώματος, με O ένα σωματοπαγές σημείο αναφοράς, και με \mathbf{R}_G τη διανυσματική ακτίνα από το O στο G . Έστω ακόμη \mathbf{r} η διανυσματική ακτίνα από το σημείο O προς ένα (οποιοδήποτε) στοιχείο μάζας dm του σώματος, και \mathbf{r}_G η διανυσματική ακτίνα από το κέντρο μάζας G προς το ίδιο στοιχείο dm του σώματος.

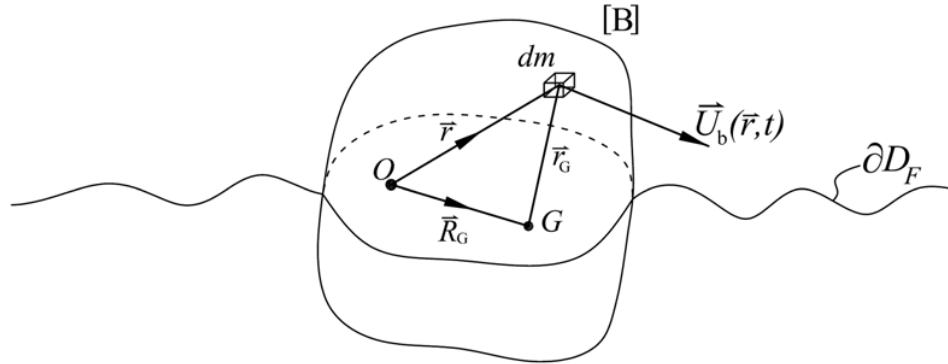
Η (απόλυτη) ταχύτητα $\mathbf{U}_b = \mathbf{U}_b(\mathbf{r}, t)$ του στοιχείου $dm = dm(\mathbf{r})$, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t , δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{U}_b(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

όπου $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ είναι η ταχύτητα του σημείου αναφοράς O , και $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος στην ίδια χρονική στιγμή⁽²⁾.

⁽¹⁾ Στη συνέχεια, θα λέμε απλά «στερεό σώμα», εννοώντας πάντοτε «απαραμόρφωτο στερεό σώμα».

⁽²⁾ Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το σώμα $[B]$ κινείται ελεύθερα στο χώρο με ταχύτητα $(\mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t))$. Η γραμμική ταχύτητα \mathbf{U} αναφέρεται πάντοτε σε κάποιο συγκεκριμένο σωματοπαγές σημείο (κέντρο) αναφοράς O , εκ των προτέρων καθορισμένο, ενώ η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}(t)$ είναι ελεύθερο διάνυσμα και δεν εξαρτάται από κάποιο σημείο αναφοράς.



Σχήμα 1: Ελεύθερα επιπλέον στερεό σώμα

Άρα, η ορμή του στοιχείου dm δίδεται από το γινόμενο $(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm$, ενώ η στροφορμή του ίδιου στοιχείου ως προς το σημείο O εκφράζεται από το γινόμενο $\mathbf{r} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm$. Κατά συνέπεια η συνολική ορμή και η συνολική στροφορμή του σώματος $[B]$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$\text{Ορμή σώματος } [B] = \sum_{dm} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_{V_B} \rho_B (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dV_B, \quad (2)$$

και

Στροφορμή σώματος $[B]$ ως προς O }

$$= \sum_{dm} \mathbf{r} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_{V_B} \rho_B \mathbf{r} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dV_B, \quad (3)$$

όπου ρ_B η πυκνότητα, dV_B το στοιχείο όγκου ($dm = \rho_B dV_B$), και V_B ο συνολικός όγκος του σώματος $[B]$. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το σωματοπαγές κέντρο αναφοράς O δεν είναι ακίνητο, αλλά κινείται μαζί με το σώμα, και μάλιστα με ταχύτητα $\mathbf{U}(t)$. Άρα η στροφορμή (3) αναφέρεται σε κινούμενο κέντρο. Το γεγονός αυτό πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν για τη σωστή διατύπωση του θεωρήματος της στροφορμής. Βλ. σχετικό συμπλήρωμα στο τέλος του παρόντος εδαφίου, όπου παράγεται η γενική μορφή του θεωρήματος της στροφορμής ως προς κινούμενο κέντρο.

Με την βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων (2) και (3), και της σχέσεως (7) του συμπληρώματος, τα θεωρήματα μεταβολής της ορμής και στροφορμής για το σώμα $[B]$, γράφονται στη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_B} \rho_B (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dV_B \right) = \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_B} \rho_B \mathbf{r} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dV_B \right) + M\mathbf{U} \times \mathbf{U}_G = \mathbf{K}, \quad (5)$$

όπου \mathbf{F} και \mathbf{K} είναι οι συνολικές εξωτερικές φορτίσεις (δύναμη, και ροπή ως προς O , αντίστοιχα), που ασκούνται πάνω στο σώμα, M είναι η συνολική μάζα του σώματος, και \mathbf{U}_G είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυτού. Ο «ασυνήθης» όρος $M\mathbf{U} \times \mathbf{U}_G$, που εμφανίζεται στο αριστερά μέλος της εξίσωσης (5), οφείλεται στο ότι το κέντρο αναφοράς των ροπών κινείται με ταχύτητα \mathbf{U} .

Οι ανωτέρω σχέσεις (4) και (5) αποτελούν μια πρώτη γενική μορφή των εξισώσεων κίνησης του ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος (π.χ. πλοίου). Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να σχολιάσουμε για λίγο τις ανωτέρω εξισώσεις, προκειμένου να αρχίσουμε να κατανοούμε τις δυσκολίες και τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπισθούν. Κατ' αρχήν οι εξισώσεις (4) και (5) είναι δύο διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες, αναλυόμενες σε συνιστώσες, αντιστοιχούν σε έξι βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις, ως προς χρόνο. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν δύο άγνωστες διανυσματικές συναρτήσεις του χρόνου, τις ταχύτητες $\mathbf{U}(t)$ και $\boldsymbol{\Omega}(t)$, οι οποίες μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των συνιστωσών τους ή, ακόμη καλύτερα, με τη βοήθεια έξι συναρτήσεων θέσεως, δηλαδή των έξι βαθμών ελευθερίας του στερεού σώματος (βλ. εδάφιο 1.4). Έτσι, εκ πρώτης όψεως, στα πλαίσια της υπόθεσης του απολύτως απαραμόρφωτου για το στερεό σώμα, φαίνεται ότι το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) είναι «κλειστό» (έξι διαφορετικές εξισώσεις, έξι άγνωστες συναρτήσεις), και άρα μπορεί να επιλυθεί-εύκολα ή δύσκολα, αναλυτικά ή αριθμητικά - ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες και τις κινήσεις του σώματος. Όμως τα πράγματα δεν είναι ακριβώς έτσι λόγω της επίδρασης του περιρρέοντος ρευστού. Πράγματι, στους «αθώους» δεξιά όρους των εξισώσεων κίνησης, δηλαδή στις φορτίσεις \mathbf{F} και \mathbf{K} , περιέχονται οι επιδράσεις του περιρρέοντος ρευστού, οι οποίες εξαρτώνται από τη θέση και την ταχύτητα $(\mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t))$ του στερεού σώματος. Με άλλα λόγια οι δεξιά όροι των εξισώσεων κίνησης (4) και (5) δεν περιέχουν μόνο γνωστές ποσότητες, αλλά εξαρτώνται και από τις (άγνωστες) προσδιοριστέες συναρτήσεις του αριστερού μέλους. Κατά συνέπεια, οι φορτίσεις \mathbf{F} και \mathbf{K} του σώματος $[B]$ πρέπει να νοούνται ως συναρτήσεις (τελεστές⁽³⁾):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathcal{S}, \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t)), \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathcal{S}, \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t)), \quad (7)$$

όπου το σύμβολο \mathcal{S} εκφράζει τη γεωμετρία του όλου υδρομηχανικού συστήματος. Άρα, για να μπορέσουμε να χειριστούμε τις εξισώσεις κίνησης (4) και (5), θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τον τρόπο εξάρτησης των φορτίσεων \mathbf{F} και \mathbf{K} από τη θέση και την ταχύτητα $(\mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t))$ του επιπλέοντος σώματος. Κάτι τέτοιο προϋποθέτει την κατάλληλη μοντελοποίηση και μελέτη του πεδίου ροής που αναπτύσσεται γύρω από το κινούμενο σώμα.

⁽³⁾ Οι φορτίσεις \mathbf{F} και \mathbf{K} εξαρτώνται όχι μόνο από τη στιγμιαία τιμή της ταχύτητας $(\mathbf{U}(t), \boldsymbol{\Omega}(t))$ του σώματος, αλλά από την όλη χρονική ιστορία των κινήσεων του σώματος, από την έναρξη της κίνησης $\tau = 0$ έως την τρέχουσα χρονική στιγμή $\tau = t$. Είναι δηλαδή οι φορτίσεις \mathbf{F} και \mathbf{K} τελεστές επί των $\mathbf{U}(\tau)$ και $\boldsymbol{\Omega}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, πολλά πρέπει να γίνουν ακόμη ώστε οι εξισώσεις (4) και (5) να εξειδικευθούν (και απλοποιηθούν) κατάλληλα, προκειμένου να καταστούν χρήσιμες για την μελέτη των διαφόρων δυναμικών φαινομένων που μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος (π.χ. ευστάθεια κατευθύνσεως και ελκτικές ικανότητες πλοίου, αποκρίσεις επιπλεόντων σωμάτων σε θαλάσσιους κυματισμούς κλπ.). Η απαιτούμενη επεξεργασία των εξισώσεων κίνησης (4) και (5) μπορεί να χωρισθεί σε πέντε στάδια ως εξής:

- α. Περαιτέρω επεξεργασία του αριστερά μέλους των εξισώσεων.
- β. Επεξεργασία του δεξιά μέλους των εξισώσεων, δηλαδή περιγραφή και μοντελοποίηση των φορτίσεων που ασκούνται πάνω στο πλοίο. Όπως αναφέρουμε ήδη ανωτέρω, το στάδιο αυτό προϋποθέτει τη μοντελοποίηση και μελέτη του πεδίου ροής γύρω από το σώμα.
- γ. Παραγωγή απλοποιημένων μορφών των εξισώσεων (4) και (5), κατάλληλα «σχεδιασμένων» για την μελέτη συγκεκριμένων δυναμικών προβλημάτων αλληλεπίδρασης επιπλεόντων σωμάτων και του περιρρέοντος υγρού.
- δ. Επίλυση και διερεύνηση των απλοποιημένων εξισώσεων.
- ε. Εφαρμογές στη μελέτη και στη σχεδίαση του πλοίου.

Θα κλείσουμε το εδάφιο αυτό με ορισμένες γενικές παρατηρήσεις επί των τεσσάρων σταδίων α., β., γ., και δ.

- α. Η περαιτέρω επεξεργασία του αριστερά μέλος των εξισώσεων κίνησης γίνεται με την εισαγωγή κατάλληλων συστημάτων συντεταγμένων, με τη βοήθεια των οποίων οι δύο διανυσματικές εξισώσεις (4) και (5) αναλύονται σε έξι βαθμωτές εξισώσεις, ως προς τους έξι βαθμούς ελευθερίας του σώματος (τρεις μετατοπίσεις και τρεις περιστροφές).
- β. Η περιγραφή και η μοντελοποίηση των φορτίσεων είναι, όσον αφορά τα φαινόμενα που εξετάζουμε, το δυσκολότερο τμήμα του όλου προβλήματος, και αποτελεί το κεντρικό αντικείμενο του παρόντος μαθήματος. Σε πολύ γενικές γραμμές οι φορτίσεις \mathbf{F} και \mathbf{K} που αναπτύσσονται πάνω σε ένα πλοίο μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\Pi} + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{\Delta} \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\Pi} + \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_A + \mathbf{K}_{\Delta} \quad (9)$$

(Φόρτιση από: Πηδάλιο, Ελικά, Νερό, Αέρα, Διάφορα άλλα αίτια)

Ο ανωτέρω διαχωρισμός σε φορτίσεις οφειλόμενες στο Πηδάλιο (\mathbf{F}_{Π} , \mathbf{K}_{Π}), στην Έλικά (\mathbf{F}_E , \mathbf{K}_E), στο Νερό (\mathbf{F}_N , \mathbf{K}_N), στον Αέρα (\mathbf{F}_A , \mathbf{K}_A), και σε διάφορα άλλα αίτια (\mathbf{F}_{Δ} , \mathbf{K}_{Δ}), αν και δεν είναι απολύτως σωστός (δεδομένου ότι υπάρχουν και φαινόμενα αλληλεπίδρασης), εν τούτοις είναι χαρακτηριστικός και χρήσιμος.

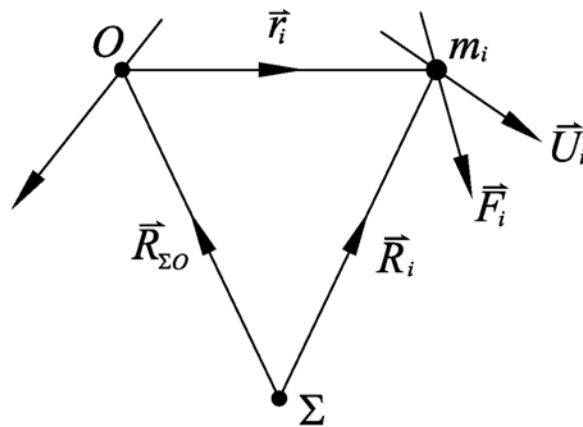
- γ. Η κατασκευή κατάλληλα απλουστευμένων εξισώσεων (mode equations) για την μελέτη συγκεκριμένων δυναμικών φαινομένων περιλαμβάνει κυρίως τη χρήση καταλλήλων μοντέλων για τις φορτίσεις και τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων, την απαλοιφή όρων που δεν είναι σημαντικοί για τα εξεταζόμενα φαινόμενα και τέλος, την εισαγωγή πρόσθετων (καμιά φορά εμπειρικής προέλευσης) όρων οι οποίοι εκφράζουν ειδικές επιδράσεις ιδιαίτερα σημαντικές για τα εξεταζόμενα φαινόμενα).

δ. Η επίλυση και διερεύνηση των απλοποιημένων (γραμμικοποιημένων) εξισώσεων γίνεται άλλοτε στο πεδίο συχνοτήτων και άλλοτε στο πεδίο του χρόνου, και βασίζεται στη χρήση εννοιών και τεχνικών από την θεωρία των γραμμικών συστημάτων, των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Laplace και Fourier), και των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Το σχετικό μαθηματικό υπόβαθρο, αν και σε γενικές γραμμές είναι γνωστό από άλλα υποχρεωτικά μαθήματα του προγράμματος σπουδών, παρουσιάζεται συνοπτικά στα Κεφάλαια 2 και 3, που ακολουθούν.

Συμπλήρωμα εδαφίου 1.1: Το θεώρημα της στροφορμής ως προς κινούμενο κέντρο αναφοράς.

Το θεώρημα της στροφορμής στη συνήθη του μορφή ισχύει ως προς ακίνητο κέντρο αναφοράς. Εν τούτοις, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα βολικό να αναφέρουμε τις ροπές (τόσο των ορμών των στοιχείων του εξεταζόμενου συστήματος, όσο και των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό), ως προς ένα κινούμενο κέντρο, οπότε το θεώρημα της στροφορμής πρέπει να τροποποιηθεί καταλλήλως. Στο συμπλήρωμα αυτό θα δώσουμε την ακριβή μορφή του θεωρήματος της στροφορμής, στην περίπτωση κινούμενου κέντρου αναφοράς.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα υλικών στοιχείων $\{m_i, i = 1, 2, \dots, I\}$, με (απόλυτες) ταχύτητες $\mathbf{U}_i, i = 1, 2, \dots, I$. Έστω \mathbf{F}_i η δύναμη που ασκείται στο στοιχείο m_i . Έστω ακόμη O ένα κέντρο αναφοράς (των ροπών) κινούμενο με ταχύτητα \mathbf{U}_0 , και Σ ένα ακίνητο κέντρο αναφοράς (Βλ. και Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Το θεώρημα της στροφορμής ως προς κινούμενο κέντρο

Τέλος, ας συμβολίσουμε με $\mathbf{R}_{\Sigma O}$ τη διανυσματική ακτίνα από το Σ στο O , με \mathbf{R}_i τη διανυσματική ακτίνα από το ακίνητο κέντρο Σ στο στοιχείο m_i , και με r_i τη διανυσματική ακτίνα από το κινούμενο κέντρο O στο στοιχείο m_i .

Οι στροφορμές \mathbf{H}_Σ και \mathbf{H}_O του συστήματος $\{m_i\}$ ως προς Σ και O αντιστοίχως, ορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{H}_\Sigma = \sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{U}_i, \quad (1\alpha)$$

$$\mathbf{H}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{U}_i. \quad (1\beta)$$

(Τονίζεται ότι εργαζόμαστε πάντοτε με τις απόλυτες ταχύτητες). Οι ροπές \mathbf{K}_Σ και \mathbf{K}_O των δυνάμεων \mathbf{F}_i ως προς Σ και O , αντιστοίχως, ορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{K}_\Sigma = \sum_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (2\alpha)$$

$$\mathbf{K}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (2\beta)$$

Το θεώρημα της στροφορμής ως προς ακίνητο κέντρο γράφεται στη μορφή:

$$\frac{d\mathbf{H}_\Sigma}{dt} = \mathbf{K}_\Sigma. \quad (3)$$

Ας εξετάσουμε τώρα την αδρανειακή χρονική παράγωγο $d\mathbf{H}_O/dt$ της στροφορμής του συστήματος $\{m_i\}$ ως προς το κινούμενο κέντρο O :

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{U}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{U}_i}{dt}. \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{\Sigma O}, \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{R}_{\Sigma O}}{dt} = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_O,$$

το νόμο του Newton

$$m_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{F}_i,$$

και τον ορισμό της στροφορμής ως προς το κινούμενο κέντρο O (βλ. εξίσωση (2β) ανωτέρω) το δεξιά μέλος της (4) γράφεται στη μορφή

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \sum_i m_i (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_O) \times \mathbf{U}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = -\mathbf{U}_O \times \sum_i m_i \mathbf{U}_i + \mathbf{K}_O. \quad (5)$$

Όμως, ως γνωστόν

$$\sum_i m_i \mathbf{U}_i = M \mathbf{U}_G, \quad (6)$$

όπου $M = \sum m_i$, είναι η συνολική μάζα του συστήματος $\{m_i\}$, και \mathbf{U}_G είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυτού. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5) και (6) παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} + M \mathbf{U}_O \times \mathbf{U}_G = \mathbf{K}_O, \quad (7)$$

η οποία αποτελεί το Θεώρημα Μεταβολής της Ορμής στην περίπτωση κινητού κέντρου αναφοράς. Η ανωτέρω σχέση (7) έχει χρησιμοποιηθεί στο εδάφιο 1.1 ανωτέρω, για την παραγωγή της εξίσωσης κίνησης (5) ενός ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος.

1.2 Συστήματα συντεταγμένων: I. Ορισμοί

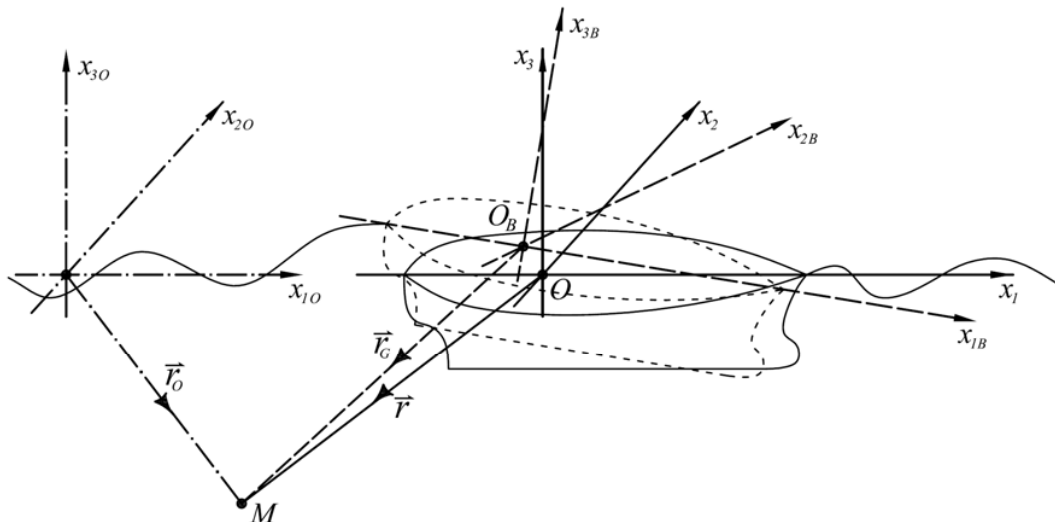
Για την ανάλυση των κινηματικών και δυναμικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος, χρησιμοποιούμε διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Τα σημαντικότερα από αυτά είναι: ένα ακίνητο (ως προς την επιφάνεια της γης) σύστημα αναφοράς, το οποίο θα αναφέρεται συνοπτικά ως Α.Σ.⁽¹⁾, (axes fixed relative to the earth, or fixed axes, or earth system), και ένα σωματοπαγές σύστημα (συνοπτικά, Σ.Σ.), το οποίο είναι σταθερά προσδεδεμένο στο επιπλέον σώμα και παρακολουθεί όλες τις κινήσεις αυτού (axes fixed in the body, or body axes, or stability system).

Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε επίσης κινούμενα συστήματα αναφοράς τα οποία δεν είναι σωματοπαγή. Μια τέτοια περίπτωση είναι η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίου το οποίο κινείται με μη-μηδενική μέση ταχύτητα, ενώ ταυτόχρονα εκτελεί ταλαντωτικές κινήσεις γύρω από τη μέση θέση του, π.χ. λόγω της επίδρασης των κυματισμών. Τότε, εκτός από τα δύο συστήματα Α.Σ και Σ.Σ., που αναφέραμε ανωτέρω, χρησιμοποιούμε και ένα κινούμενο σύστημα (συνοπτικά, Κ.Σ.), το οποίο παρακολουθεί τη μέση κίνηση του πλοίου. Το σύστημα αυτό μπορεί να είναι αδρανειακό (αν το πλοίο κινείται με σταθερή μέση ταχύτητα \mathbf{U} και μηδενική μέση γωνιακή ταχύτητα) ή μη-αδρανειακό, στη γενική περίπτωση (π.χ. όταν το πλοίο εκτελεί ελιγμούς). Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση στην οποία χρησιμοποιούμε κινούμενο μη-σωματοπαγές σύστημα είναι η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς δύο (ή περισσότερων) επιπλέοντων σωμάτων. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση αναφέρεται συνήθως σε σωματοπαγές σύστημα επί του ενός σώματος, το οποίο είναι κινούμενο, μη-αδρανειακό και μη-σωματοπαγές, ως προς το άλλο σώμα.

Τα τρία συστήματα Α.Σ., Σ.Σ., Κ.Σ., με τους αντίστοιχους συμβολισμούς για τα μοναδιαία διανύσματα και το διάνυσμα θέσης στο χώρο παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Βλ. επίσης Σχήμα 1.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 1 | | |
|---|---|--|
| ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ | | |
| Ονομασία Συστήματος | Συμβολισμοί | Παρατηρήσεις |
| Ακίνητο Αδρανειακό Σύστημα (Α.Σ.) (Earth System) | x_{10}, x_{20}, x_{30} $\mathbf{i}_{10}, \mathbf{i}_{20}, \mathbf{i}_{30}$ \mathbf{r}_0 | Το επίπεδο $x_{10}x_{20}$ συμπίπτει με την αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια. Ο άξονας x_{30} λαμβάνεται θετικός προς τα άνω. |
| Κινούμενο με τη μέση ταχύτητα Σύστημα (Κ.Σ.) | x_1, x_2, x_3 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ \mathbf{r} | Σύστημα κινούμενο με τη μέση οριζόντια ταχύτητα του επιπλέοντος σώματος. Εάν η μέση ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική, το Κ.Σ. ταυτίζεται με το Α.Σ. |
| Σωματοπαγές Σύστημα (Σ.Σ.) (Stability System) | x_{1B}, x_{2B}, x_{3B} $\mathbf{i}_{1B}, \mathbf{i}_{2B}, \mathbf{i}_{3B}$ \mathbf{r}_B | Σύστημα σταθερά προσδεδεμένο στο επιπλέον σώμα, που παρακολουθεί όλες τις κινήσεις του. Στην περίπτωση όπου το επιπλέον σώμα έχει επίπεδα συμμετρίας (π.χ. πλοίο), τα επίπεδα των αξόνων επιλέγονται έτσι ώστε να συμπίπτουν με τα επίπεδα συμμετρίας. |

⁽¹⁾ Για τις εφαρμογές που εξετάζουμε στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος, το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί, κατά προσέγγιση, αδρανειακό.



Σχήμα 1: Συστήματα συντεταγμένων - Συμβολισμοί

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι, ακόμη και όταν χρησιμοποιούμε μη-αδρανειακό (δηλαδή επιταχυνόμενο) σύστημα συντεταγμένων, εργαζόμαστε πάντοτε με τις απόλυτες (αδρανειακές) ταχύτητες και επιταχύνσεις των στοιχείων του στερεού σώματος και του περιρρέοντος υγρού. Δηλαδή τα συστήματα συντεταγμένων (αδρανειακά ή μη-αδρανειακά) χρησιμοποιούνται για να αναλύσουμε σε συνιστώσες τα διάφορα διανυσματικά μεγέθη (κινηματικά και δυναμικά) και όχι για να αποσυνθέτουμε τις ταχύτητες σε απόλυτες και σχετικές. Κατά συνέπεια, τα θεωρήματα της ορμής και της στροφορμής χρησιμοποιούνται πάντοτε με την απλή αδρανειακή μορφή τους. (Πρβλ. εξισώσεις 1.1 (4) και 1.1 (5)).

Το σωματοπαγές σύστημα είναι ιδιαίτερα βολικό για την επεξεργασία του αριστερά μέλους των εξισώσεων 1.1 (4) και 1.1 (5), διότι ως προς αυτό η γεωμετρία και η πυκνότητα (και άρα και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά) του στερεού σώματος είναι ανεξάρτητα των κινήσεων του σώματος (και άρα ανεξάρτητα του χρόνου). (Σκεφθείτε ότι ως προς ένα ακίνητο σύστημα, ο όγκος V_B του σώματος αλλάζει διαρκώς θέση εν' όσω το σώμα κινείται, και άρα $V_B = V_B(t)$. Για τον ίδιο λόγο $\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_G(t)$, $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_G(t)$ κ.λ.π.). Περαιτέρω, πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση σωμάτων που έχουν επίπεδα συμμετρίας, το Σ.Σ. επιλέγεται έτσι ώστε επίπεδά του να συμπίπτουν με τα επίπεδα συμμετρίας του σώματος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του πλοίου, το επίπεδο $[0x_{1B}, 0x_{3B}]$ λαμβάνεται να συμπίπτει με το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας του πλοίου, όπου ο άξονας $0x_{1B}$ κατευθύνεται προς την πλώρη, και ο άξονας $0x_{3B}$ κατευθύνεται προς τα επάνω. (Βλ. Σχήμα 1).

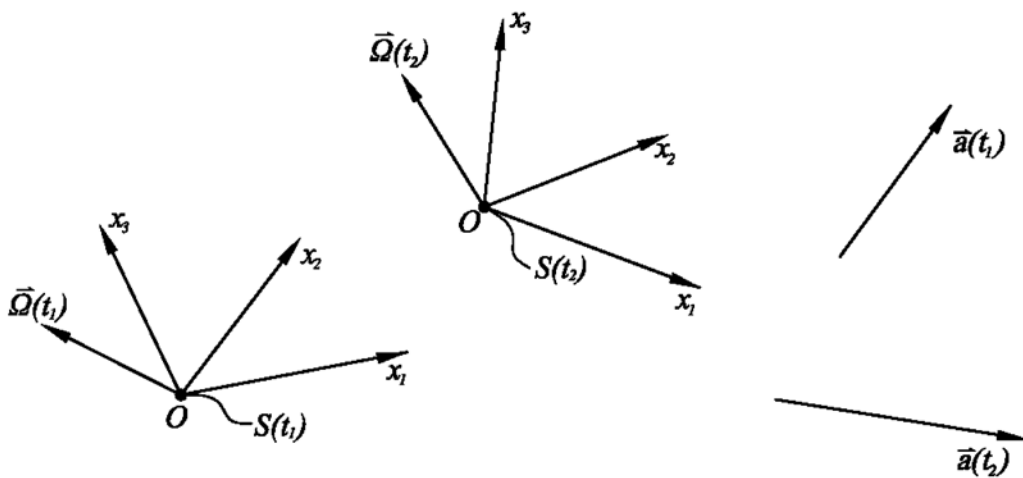
Βέβαια, προκειμένου να επεξεργασθούμε τις εξισώσεις κίνησης 1.1 (4) και 1.1 (5) με τη βοήθεια του σωματοπαγούς συστήματος συντεταγμένων, απαιτείται να υπολογίσουμε τον αδρανειακό ρυθμό μεταβολής $\left(\frac{d}{dt}\right)$ των συνιστωσών ενός διανυσματικού μεγέθους το οποίο αναλύεται ως προς τους άξονες του Σ.Σ.. Αν και το σχετικό αποτέλεσμα είναι γνωστό από την Μηχανική (Βλ., π.χ., Θεοχάρης, 1978, ή Golstein 1980), εν τούτοις το θέμα θα αναπτυχθεί

διεξοδικά στη συνέχεια (στο εδάφιο 1.5), λόγω της μεγάλης σημασίας του για την σωστή κατανόηση των εξισώσεων κίνησης που προκύπτουν μετά την επεξεργασία των εξισώσεων 1.1 (4) και 1.1 (5).

1.3 Συστήματα συντεταγμένων: II. Μετασχηματισμοί

Ας θεωρήσουμε ένα αδρανειακό διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ και ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $S : Ox_1x_2x_3$. Η θέση του συστήματος S τη χρονική στιγμή t θα συμβολίζεται με $S(t)$.

Η κινητική κατάσταση του συστήματος S κατά τη χρονική στιγμή t ορίζεται πλήρως από την ταχύτητα $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ της αρχής O του συστήματος και από τη γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(t)$ του συστήματος. Το διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ μπορεί να παριστά ένα οποιοδήποτε διανυσματικό φυσικό μέγεθος (ταχύτητα, δύναμη, κλπ.) και είναι εντελώς ανεξάρτητο από το σύστημα S ⁽¹⁾.



Σχήμα 1: Ανάλυση διανύσματος ως προς κινούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Το διάνυσμα $\mathbf{a}(t_1)$ αναλύεται σε συνιστώσες ως προς το σύστημα $S(t_1)$, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{a}(t_2)$ αναλύεται σε συνιστώσες ως προς το σύστημα $S(t_2)$.

Βέβαια, το διάνυσμα \mathbf{a} μπορεί, σε κάθε χρονική στιγμή t , να αναλυθεί σε συνιστώσες ως προς το σύστημα $S(t)$ οπότε έχουμε την εναλλακτική αναπαράστασή του $(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$, η οποία εξαρτάται από το σύστημα $S(t)$. Η ανωτέρω διευκρίνιση είναι θεμελιώδους σημασίας και πρέπει πάντοτε να λαμβάνεται υπ' όψιν όταν διατυπώνουμε ή επεξεργαζόμαστε φυσικούς νόμους στους οποίους υπεισέρχονται οι συνιστώσες $a_k(t)$, $k=1,2,3$, του διανύσματος $\mathbf{a}(t)$ ως προς κινούμενο σύστημα αναφοράς.

⁽¹⁾ Δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{a}(t)$ παριστά το απόλυτο (αδρανειακό) μέγεθος και όχι το αντίστοιχο σχετικό μέγεθος ως προς το κινούμενο σύστημα $S(t)$.

Στη συνέχεια, και με σκοπό να διακρίνουμε με σαφήνεια μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων του διανύσματος \mathbf{a} , θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ για να δηλώνουμε τη γεωμετρική αναπαράσταση του διανύσματος, η οποία είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων, και το σύμβολο $\mathbf{a}(t)|_{S(t)}$ για να δηλώνουμε τη αναλυτική αναπαράσταση του διανύσματος μέσω των συνιστωσών του ως προς το σύστημα $S(t)$ (οι οποίες εξαρτώνται από το σύστημα $S(t)$). Δηλαδή η έκφραση $\mathbf{a}(t)|_{S(t)}$ θα χρησιμοποιείται ως συντομογραφία του συνόλου των τριών συνιστωσών του διανύσματος \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}(t)|_{S(t)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}_{S(t)} .$$

Περαιτέρω, ο συμβολισμός $\mathbf{a}(t_1)|_{S(t_2)}$ θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει την αναπαράσταση του διανύσματος $\mathbf{a}(t_1)$ μέσω των συνιστωσών του ως προς το σύστημα $S(t_2)$, ακόμη και όταν $t_1 \neq t_2$. Βλ. Σχήμα 1.

Είναι φανερό ότι, αν δύο συστήματα S_a και S_b δεν έχουν παράλληλους άξονες, τότε $\mathbf{a}(t)|_{S_a} \neq \mathbf{a}(t)|_{S_b}$, εφ' όσον οι συνιστώσες του $\mathbf{a}(t)$ στα δύο συστήματα είναι διαφορετικές. Έτσι με σκοπό να καταστήσουμε σαφή τη διάκριση ανάμεσα στη γεωμετρική ισότητα δύο διανυσμάτων και στην ισότητα των συνιστωσών τους (θεωρούμενων ως διατεταγμένων τριάδων), εισάγουμε τα ακόλουθα δύο σύμβολα ισότητας

$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b}$: Γεωμετρική ισότητα,

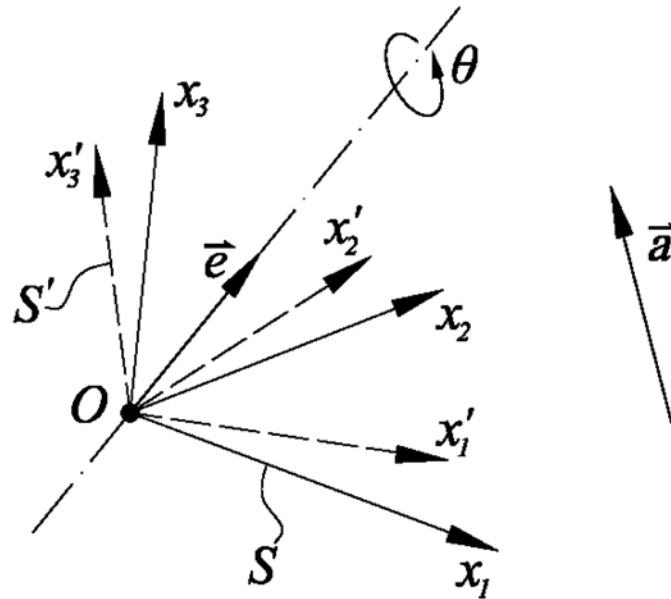
$\mathbf{a}|_{S_a} \stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{b}|_{S_b}$: Ισότητα συνιστωσών ως προς τα συστήματα S_a και S_b αντίστοιχα.

Περαιτέρω, οι σχέσεις

$$\mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \Big|_S, \quad \mathbf{a} \doteq \mathbf{b} \Big|_S,$$

θα νοούνται γεωμετρικά, δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{b} συντίθεται από τις συνιστώσες του ως προς το σύστημα S , και στη συνέχεια συγκρίνεται με το διάνυσμα \mathbf{a} .

Θα προχωρήσουμε τώρα στον προσδιορισμό της σχέσεως μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος \mathbf{a} όταν το σύστημα αναφοράς S στρέφεται περί έναν άξονα \mathbf{e} (\mathbf{e} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα επί του άξονα περιστροφής) κατά γωνία θ . (Η φορά περιστροφής και το διάνυσμα \mathbf{e} συνδέονται δεξιόστροφα. Βλ. Σχήμα 2). Ας συμβολίσουμε με $S' = S'(\mathbf{e}, \theta)$ το σύστημα το οποίο προκύπτει από τη στροφή του συστήματος S . Τότε ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα:



Σχήμα 2: Περιστροφή συστήματος περί άξονα.

Θεώρημα 1: Μεταξύ των συνιστωσών $\mathbf{a}_S \equiv \mathbf{a}|_S$ και $\mathbf{a}|_{S'}$ ενός και του αυτού διανύσματος \mathbf{a} ως προς τα συστήματα S και $S' = S'(\mathbf{e}, \theta)$ ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{a}|_{S'}^{1,2,3} = \mathbf{a}_S \cos \theta + \mathbf{e}_S (\mathbf{e}_S \cdot \mathbf{a}_S) (1 - \cos \theta) + (\mathbf{a}_S \times \mathbf{e}_S) \sin \theta, \quad (1)$$

όπου $\mathbf{e}_S \equiv \mathbf{e}|_S$ είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος επί του άξονος περιστροφής ως προς το αρχικό σύστημα S . ■

(Η απόδειξη της σχέσεως (1) παρατίθεται στο τέλος του παρόντος εδαφίου).

Η ανωτέρω σχέση (1) θα δοθεί και σε μητρική μορφή. Αν θέσουμε

$$\mathbf{a}|_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{a}, \quad \mathbf{a}|_{S'} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \underline{a}', \quad \mathbf{e}|_S = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

τότε η σχέση (1) γράφεται στη μορφή

$$\underline{a}' = \underline{R} \cdot \underline{a} \quad (1')$$

όπου \underline{R} είναι ο ακόλουθος 3×3 πίνακας:

$$\underline{R} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_1 e_2 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ο πίνακας \underline{R} θα λέγεται πίνακας στροφής (rotation matrix). (Η μετατροπή της διανυσματικής σχέσεως (1) στη μητρική σχέση (1') γίνεται εύκολα με απ' ευθείας εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων).

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διαδοχικές περιστροφές του συστήματος αναφοράς με πίνακες στροφής \underline{R} και \underline{R}' αντίστοιχα:

$$S \xrightarrow{\underline{R}} S' \xrightarrow{\underline{R}'} S'' . \quad (3)$$

Το σύστημα S μπορεί να περάσει απ' ευθείας στη θέση S'' μέσω μιας κατάλληλης περιστροφής ως προς ένα (τρίτο) άξονα. Έστω \underline{R}'' ο πίνακας περιστροφής αυτής:

$$S \xrightarrow{\underline{R}''} S'' . \quad (4)$$

Θεωρούμε τώρα ένα αδρανειακό διάνυσμα \mathbf{a} , και συμβολίζουμε με $\underline{a}, \underline{a}'$ και \underline{a}'' , τις συνιστώσες του ως προς τα συστήματα S, S' και S'' . Τότε, εφαρμόζοντας τη σχέση (1) παίρνουμε

$$\underline{a}'' = \underline{R}' \cdot \underline{a}' \quad (5)$$

και

$$\underline{a}' = \underline{R} \cdot \underline{a} , \quad (5')$$

και άρα, εισάγοντας τη δεύτερη στην πρώτη

$$\underline{a}'' = (\underline{R}'\underline{R}) \cdot \underline{a} . \quad (6)$$

Εξ άλλου, σύμφωνα με τον ορισμό (4) του πίνακα \underline{R}'' , ισχύει η σχέση

$$\underline{a}'' = \underline{R}'' \cdot \underline{a} . \quad (7)$$

Επειδή οι δύο ανωτέρω σχέσεις ισχύουν για κάθε διάνυσμα \mathbf{a} , συμπεραίνουμε ότι:

$$\underline{R}'' = \underline{R}' \cdot \underline{R} . \quad (8)$$

Δηλαδή ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 2: Ο πίνακας στροφής της σύνθεσης δύο διαδοχικών περιστροφών ισούται με το γινόμενο των πινάκων στροφής των δύο περιστροφών (το οποίο σχηματίζεται κατά την τάξη εκτέλεσης των περιστροφών).

Εφαρμογές των σχέσεων (1) και (1')

A. Ας θεωρήσουμε ότι το σύστημα $S : O x_1 x_2 x_3$ περιστρέφεται περί τον άξονα $O x_1$ κατά γωνία θ_1 . Τότε έχουμε:

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = a_1, \quad \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) = a_1 \mathbf{i}_1 \quad \text{και} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{e} = a_3 \mathbf{i}_2 - a_2 \mathbf{i}_3 ,$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται:

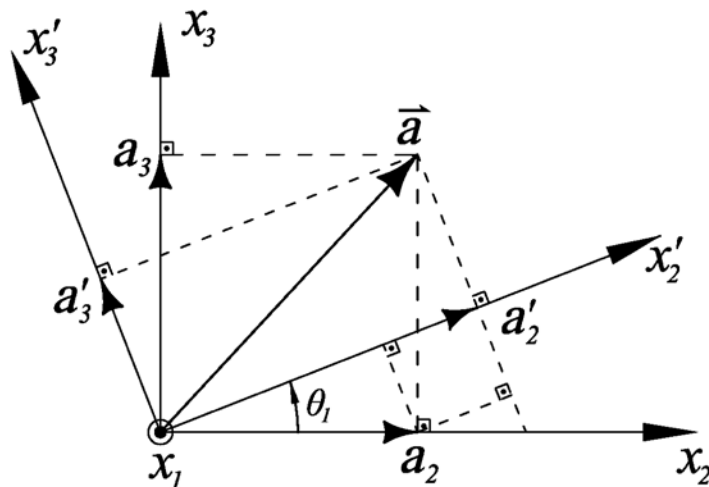
$$\mathbf{a}|_{S'} = \mathbf{a}|_S \cos \theta_1 + a_1 \mathbf{i}_1 (1 - \cos \theta_1) + (a_3 \mathbf{i}_2 - a_2 \mathbf{i}_3) \sin \theta_1 ,$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= a_1 \\ a'_2 &= a_2 \cos \theta_1 + a_3 \sin \theta_1 \\ a'_3 &= a_3 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι απλό και προκύπτει εύκολα και με απ' ευθείας γεωμετρική θεώρηση στο επίπεδο $O x_2 x_3$ (Βλ. Σχήμα 3). Αντίστοιχες σχέσεις προκύπτουν και για τις περιστροφές περί τους άξονες $O x_2$ και $O x_3$.

B. Ας θεωρήσουμε ότι η γωνία περιστροφής είναι μικρή (απειροστή), και ας τη συμβολίσουμε με $\delta\theta$ αντί για θ . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γραμμικοποιήσουμε τη σχέση (1) (ή την (1')) ως προς $\delta\theta$. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε τις αναπτύξεις:



Σχήμα 3: Στροφή περί τον άξονα $0x_1$.

$$\cos(\delta\theta) = 1 + O(\delta\theta^2) \approx 1,$$

$$\sin(\delta\theta) = \delta\theta + O(\delta\theta^3) \approx \delta\theta.$$

Εισάγοντας τις ανωτέρω σχέσεις στις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{e} \delta\theta + O(\delta\theta^2) \quad (10)$$

και

$$\underline{a}' = \underline{R} \cdot \underline{a} + O(\delta\theta^2) \quad (10')$$

όπου

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta e_3 & -\delta\theta e_2 \\ -\delta\theta e_3 & 1 & \delta\theta e_1 \\ \delta\theta e_2 & -\delta\theta e_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Με τη βοήθεια της σχέσεως (10) η (10') μπορούμε να αποδείξουμε ότι όταν οι γωνίες περιστροφής είναι μικρές (απειροστές), τότε οι περιστροφές μπορούν να αναπαρασταθούν διανυσματικά. Πράγματι, αν εισάγουμε το διάνυσμα στροφής

$$\delta\boldsymbol{\theta} \doteq \mathbf{e} \delta\theta \stackrel{1,2,3}{\equiv} \begin{pmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{pmatrix}_S,$$

τότε οι σχέσεις (5) και (5') παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{a}|_{S'} = \mathbf{a}|_S = \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_S \times \delta\boldsymbol{\theta} + O(\delta\theta^2) \quad (12)$$

και

$$\underline{a}' = \underline{R}(\underline{\delta\theta}) \cdot \underline{a} + O(\delta\theta^2) \quad (12')$$

όπου

$$\underline{R}(\underline{\delta\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 \\ -\delta\theta_3 & 1 & \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα δύο διαδοχικές περιστροφές του συστήματος αναφοράς

$$S \xrightarrow[\underline{R}(\underline{\delta\theta})]{\underline{\delta\theta}} S' \xrightarrow[\underline{R}'(\underline{\delta\theta}')]{\underline{\delta\theta}'} S'',$$

και εφαρμόσουμε τη σχέση (13) βρίσκουμε

$$\underline{R}'(\underline{\delta\theta}') \cdot \underline{R}(\underline{\delta\theta}) = \underline{R}(\underline{\delta\theta} + \underline{\delta\theta}') + O(\delta\theta^2, (\delta\theta')^2, \delta\theta\delta\theta'). \quad (14)$$

Η τελευταία σχέση, η οποία ισχύει μόνο για μικρές (απειροστές) περιστροφές, εκφράζει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3: Το διάνυσμα στροφής της σύνθεσης δύο διαδοχικών απειροστών περιστροφών ισούται (σε πρώτη τάξη) με το άθροισμα των διανυσμάτων στροφής των δύο περιστροφών.

Συμπλήρωμα εδαφίου 1.3: Απόδειξη της σχέσεως (1).

Η σχέση (1) του παρόντος εδαφίου αποδεικνύεται ως εξής: Κατ' αρχήν μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα \mathbf{a} έτσι ώστε η αρχή του να συμπίπτει με την αρχή O των συστημάτων συντεταγμένων S και S' . Προφανώς η μεταφορά αυτή δεν μεταβάλλει τις συνιστώσες του \mathbf{a} . Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{a} ως προς το σύστημα S' ταυτίζονται με τις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{a}' , που προκύπτει από το \mathbf{a} μετά από στροφή θ κατά την αντίθετη φορά⁽²⁾ περί τον άξονα \mathbf{e} , ως προς το σύστημα S . Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στο να εκφραστούν οι συνιστώσες (ως προς το σύστημα S) του διανύσματος \mathbf{a}' συναρτήσει των συνιστωσών του \mathbf{a} (ως προς το ίδιο σύστημα), της γωνίας στροφής θ' , και του άξονα περιστροφής \mathbf{e} .

Έστω Γ το πέρας του διανύσματος \mathbf{a} (δηλαδή $\mathbf{a} = \mathbf{O}\Gamma$), A η προβολή του Γ στον άξονα περιστροφής \mathbf{e} , Γ' το πέρας του \mathbf{a}' (δηλαδή $\mathbf{a}' = \mathbf{O}\Gamma'$), και Δ η προβολή του Γ' στην ευθεία $A\Gamma$. Βλ. Σχήμα 4. (Προφανώς τα σημεία $A, \Gamma, \Gamma', \Delta$ ανήκουν σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα \mathbf{e}).

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη ανάλυση του διανύσματος $\mathbf{a}' = \mathbf{O}\Gamma'$:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{O}\mathbf{A} + \mathbf{A}\Delta + \Delta\Gamma'. \quad (15)$$

Όμως (βλ. και Σχήμα 4)

$$\mathbf{O}\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}), \quad (16)$$

⁽²⁾ Σε σχέση με τη φορά περιστροφής του συστήματος S .

$$\mathbf{A}\Delta = \frac{\mathbf{A}\Gamma}{|\mathbf{A}\Delta|} |\mathbf{A}\Gamma'| \cos \theta = \mathbf{A}\Gamma \cos \theta = (\mathbf{a} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})) \cos \theta, \quad (17)$$

διότι $|\mathbf{A}\Gamma| = |\mathbf{A}\Gamma'|$ (λόγω της περιστροφής), και $\mathbf{A}\Gamma = \mathbf{O}\Gamma - \mathbf{O}\mathbf{A} = \mathbf{a} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})$, και

$$\Delta\Gamma' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}|} |\mathbf{A}\Gamma'| \sin \theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) \sin \theta, \quad (18)$$

διότι $|\mathbf{a} \times \mathbf{e}| = |\mathbf{A}\Gamma| = |\mathbf{A}\Gamma'|$.

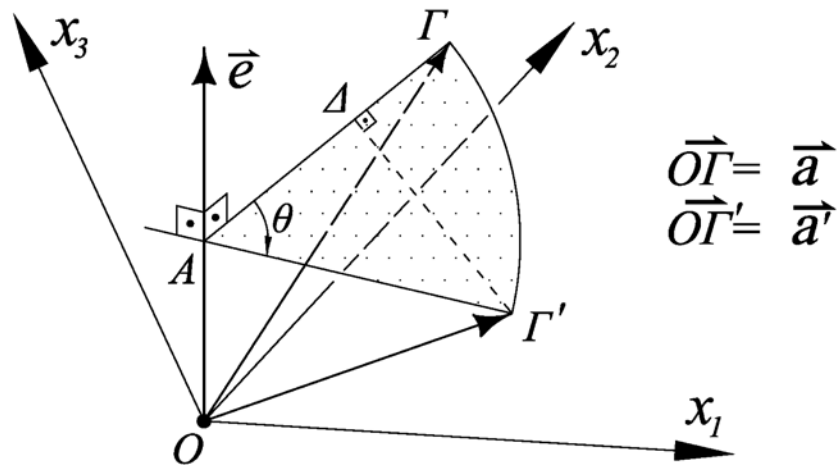
Εισάγοντας τώρα τις εκφράσεις (16), (17) και (18) στην (11) βρίσκουμε:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) + [\mathbf{a} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})] \cos \theta + (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) \sin \theta,$$

ή

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cos \theta + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) \sin \theta,$$

η οποία δεν είναι άλλη από την αποδεικτέα σχέση (1).



Σχήμα 4: Απόδειξη σχέσεως (1).

1.4 Βαθμοί ελευθερίας στερεού σώματος. Γωνίες στροφής επιπλέοντος σώματος.

Όπως κάθε (απολύτως) στερεό σώμα ελεύθερα κινούμενο στο χώρο, έτσι και ένα ελεύθερα επιπλέον στερεό σώμα, έχει έξι βαθμούς ελευθερίας. Δηλαδή, η θέση του στο χώρο καθορίζεται πλήρως με τη βοήθεια έξι ανεξαρτήτων γενικευμένων συντεταγμένων.

Οι έξι γενικευμένες συντεταγμένες μπορεί να επιλεγούν κατά διάφορους τρόπους. Μια συνήθης επιλογή, είναι η ακόλουθη: Οι τρεις πρώτες γενικευμένες συντεταγμένες, q_1, q_2, q_3 , επιλέγονται να είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου O αναφοράς των ταχυτήτων⁽¹⁾, ως προς ένα ακίνητο (χωροπαγές) σύστημα. Οι υπόλοιπες γενικευμένες συντεταγμένες, $\psi (= q_6)$, $\theta (= q_5)$, $\varphi (= q_4)$, λαμβάνονται να είναι, κατά σειράν, οι γωνίες στροφής περί τους τρεις σωματοπαγείς άξονες $Ox_{3B}, Ox_{2B}, Ox_{1B}$, αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται ότι, γενικά, η σειρά (τάξη) με την οποία νοούνται οι περιστροφές έχει σημασία, εκτός από την περίπτωση των απειροστών περιστροφών. Βλ. σχετικά και εδάφιο 1.3.

Στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος θα ασχοληθούμε κυρίως με την περίπτωση μικρών («απειροστών») κινήσεων (μετατοπίσεων και περιστροφών) επιπλέοντων σωμάτων. Επίσης, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίου που κινείται με σταθερή μέση ταχύτητα, δια μέσου κυματισμών. Στις περιπτώσεις αυτές θα εργαζόμαστε με τις εξής γενικευμένες συντεταγμένες, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις q_j , $j=1(1)6$:

ξ_1, ξ_2, ξ_3 : Καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματοπαγούς κέντρου O αναφοράς των ταχυτήτων, ως προς το σύστημα το κινούμενο με τη μέση ταχύτητα του επιπλέοντος σώματος (Κ.Σ.).

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: (Απειροστές) περιστροφές γύρω από τους σωματοπαγείς άξονες $Ox_{3B}, Ox_{2B}, Ox_{1B}$, αντίστοιχα, οι οποίες, σε πρώτη τάξη, ταυτίζονται με τις αντίστοιχες περιστροφές γύρω από τους τρεις άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 του Κ.Σ.

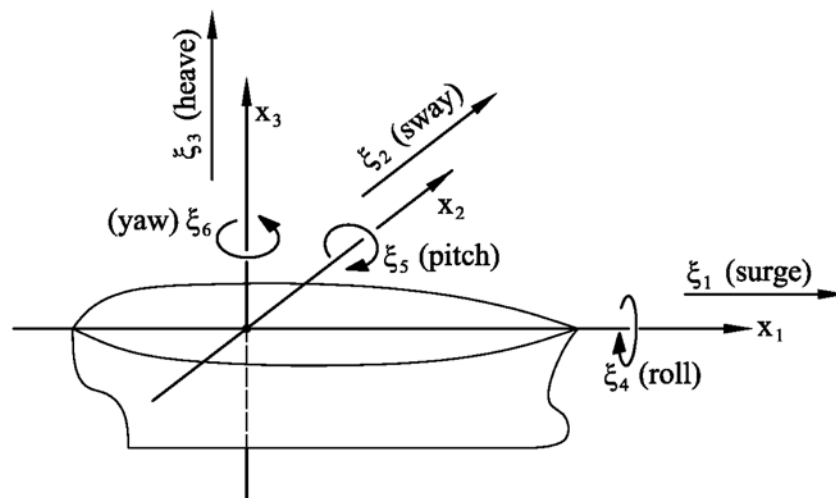
Στις περιπτώσεις αυτές όχι μόνον η μετατόπιση $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, αλλά και η περιστροφή $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ έχει ιδιότητες διάνυσματος, και άρα μπορούμε να την χειριζόμαστε ως διάνυσμα. (Βλ. και εδάφιο 1.3). Οι περιστροφές $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θα συμβολίζονται επίσης και ως εξής: $\theta_1 = \xi_4, \theta_2 = \xi_5, \theta_3 = \xi_6$.

Οι βαθμοί ελευθερίας $\xi_j = \xi_j(t)$, $j=1(1)6$, από κοινού, θα ονομάζονται κινήσεις του επιπλέοντος σώματος, οι παραγωγοί τους ως προς χρόνο, $\dot{\xi}_j(t)$, $j=1(1)6$, θα ονομάζονται ταχύτητες του επιπλέοντος σώματος και, τέλος, οι δεύτερες παράγωγοι τους ως προς χρόνο, $\ddot{\xi}_j(t)$, $j=1(1)6$, θα ονομάζονται επιταχύνσεις του επιπλέοντος σώματος. Όταν υπάρχει λόγος να διακρίνουμε μεταξύ των γραμμικών (ξ_1, ξ_2, ξ_3) και των περιστροφικών (ξ_4, ξ_5, ξ_6) κινήσεων (ταχυτήτων, επιταχύνσεων), τότε θα χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα επίθετα. Π.χ., γραμμικές επιταχύνσεις $\ddot{\xi}_1, \ddot{\xi}_2, \ddot{\xi}_3$, η περιστροφικές ταχύτητες $\dot{\xi}_4, \dot{\xi}_5, \dot{\xi}_6$.

⁽¹⁾ Το ίδιο σημείο O λαμβάνεται και ως αρχή του σωματοπαγούς συστήματος συντεταγμένων.

Ειδικά στην περίπτωση του πλοίου, οι κινήσεις ξ_j , $j = 1(1)6$, έχουν συγκεκριμένα ονόματα (ελληνικά και αγγλικά), τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 και στο Σχήμα 1.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 1 | | |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------|
| ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ | | |
| Κίνηση | Ελληνική Ονομασία | Αγγλική Ονομασία |
| ξ_1 | Διαμήκης οριζόντια ταλάντωση | surge |
| ξ_2 | Εγκάρσια οριζόντια ταλάντωση | sway |
| ξ_3 | Κατακόρυφη ταλάντωση | heave |
| $\xi_4 = \theta_1$ | Διατοιχισμός | roll |
| $\xi_5 = \theta_2$ | Προνευτασμός ή πρόνευση | pitch |
| $\xi_6 = \theta_3$ | Στροφική οριζόντια ταλάντωση | yaw |



Σχήμα 1: Ονοματολογία κινήσεων πλοίου.

1.5 Αδρανειακός ρυθμός μεταβολής διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, αναλυμένου στους στιγμιαίους άξονες κινούμενου συστήματος συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε ένα (αδρανειακό) διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$. Ο ρυθμός μεταβολής του ως προς χρόνο, ο οποίος στη συνέχεια θα λέγεται και αδρανειακός ρυθμός μεταβολής του $\mathbf{a}(t)$ και θα συμβολίζεται με $\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}$, ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \doteq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)). \quad (1)$$

Προφανώς ο αδρανειακός ρυθμός μεταβολής ενός διανύσματος είναι ένα νέο διάνυσμα ανεξάρτητο από το τυχόν σύστημα συντεταγμένων $S(t)$ που χρησιμοποιούμε για να αναλύσουμε το $\mathbf{a}(t)$ σε συνιστώσες.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του \mathbf{a} ως προς ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων $S(t)$, το οποίο έχει γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$. Αυτός ο ρυθμός μεταβολής θα συμβολίζεται με $\partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)}$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$\partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \stackrel{1,2,3}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t+\Delta t)} - \mathbf{a}(t)|_{S(t)}) \quad (2)$$

Είναι φανερό ότι το μέγεθος $\partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)}$ εξαρτάται από το σύστημα $S(t)$ και την κινητική του κατάσταση.

Πράγματι, ας υποθέσουμε, κατ' αρχήν, ότι το διάνυσμα \mathbf{a} είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Τότε προφανώς $d\mathbf{a}/dt = 0$. Εξ άλλου, εφαρμόζοντας τη σχέση 1.3 (12), βρίσκουμε

$$\mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t+\Delta t)} \stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{a}(t)|_{S(t+\Delta t)} \stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{a}(t)|_{S(t)} + \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \times \boldsymbol{\Omega} \Delta t + O(\Delta t^2),$$

εφ' όσον το διάνυσμα στροφής του συστήματος $S(t)$ μετά χρόνο Δt δίνεται, σε πρώτη τάξη, από τη σχέση $\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Omega} \Delta t$. Εισάγοντας την τελευταία σχέση στη σχέση ορισμού (2) βρίσκουμε:

$$\partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{a} \times \boldsymbol{\Omega}|_{S(t)} \stackrel{1,2,3}{\neq} 0$$

(εκτός εάν $\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\Omega}$, οπότε $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$). Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι, γενικά,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \neq \partial_t \mathbf{a}|_{S(t)}.$$

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ του αδρανειακού ρυθμού μεταβολής ενός διανύσματος και του ρυθμού μεταβολής των συνιστωσών του ως προς κινούμενο (περιστρεφόμενο) σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 1: Έστω $\mathbf{a}(t)$ ένα (αδρανειακό) διάνυσμα και $S(t)$ ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων. Εάν το σύστημα $S(t)$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega}(t)$, τότε:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \doteq \partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)} + \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t). \quad (3)$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος θα δώσουμε δύο χρήσιμες εφαρμογές (ειδικές περιπτώσεις) της σχέσης (3).

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα $[B]$ κινούμενο ελεύθερα στο χώρο με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega}) = (\mathbf{U}(t), \mathbf{\Omega}(t))$ και το καρτεσιανό σύστημα $S(t)$ σταθερά προσδεδεμένο στο σώμα $[B]$. Προφανώς, στην περίπτωση αυτή η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος συμπίπτει με την γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega}$ του σώματος $[B]$. Θα εφαρμόσουμε τώρα τη σχέση (3) για να υπολογίσουμε τον αδρανειακό ρυθμό μεταβολής: α) ενός σωματοπαγούς διανύσματος θέσης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, και β) της γωνιακής ταχύτητας $\mathbf{\Omega}$ του σώματος $[B]$.

- α) Εφ' όσον το διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ είναι σωματοπαγές, οι συνιστώσες του ως προς το επίσης σωματοπαγές σύστημα $S(t)$ δεν μεταβάλλονται. Άρα,

$$\partial_t \mathbf{r}(t)|_{S(t)} = 0,$$

οπότε, εφαρμόζοντας τη σχέση (3) παίρνουμε

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{r}(t), \quad (4)$$

- β) Στην περίπτωση της γωνιακής ταχύτητας $\mathbf{\Omega}(t)$ η σχέση (3) μας δίνει αμέσως

$$\frac{d\mathbf{\Omega}(t)}{dt} = \partial_t \mathbf{\Omega}(t)|_{S(t)}, \quad (5)$$

εφ' όσον $\mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{\Omega}(t) = 0$. Το φυσικό νόημα της σχέσης (5) είναι ότι οι συνιστώσες

$\partial_t \mathbf{\Omega}(t) = (\partial_t \mathbf{\Omega}_1(t), \partial_t \mathbf{\Omega}_2(t), \partial_t \mathbf{\Omega}_3(t))$ του διανύσματος $\frac{\partial \mathbf{\Omega}(t)}{\partial t}$ πάνω στους άξονες του Σ.Σ., μπορούν να θεωρηθούν ως οι συνιστώσες της απόλυτης (αδρανειακής) επιτάχυνσης του επιπλέοντος σώματος.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε τη μεταβολή $\Delta \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$, καθώς και τις συνιστώσες της $\Delta \mathbf{a}(t)|_{S(t)}$ στο σύστημα $S(t)$. Τότε έχουμε:

$$\Delta \mathbf{a}(t) \doteq \Delta \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} - \mathbf{a}(t)|_{S(t)}. \quad (6)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας την ποσότητα $\mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t + \Delta t)}$ στο δεξιά μέλος της (6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a}(t) \doteq \Delta \mathbf{a}(t)|_{S(t)} &\stackrel{1,2,3}{=} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t + \Delta t)} - \mathbf{a}(t)|_{S(t)} + \\ &+ \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} - \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t + \Delta t)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Όμως οι δύο τελευταίοι όροι της ανωτέρω σχέσης είναι οι συνιστώσες του ίδιου διανύσματος $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ ως προς τα δύο συστήματα $S(t)$ και $S(t + \Delta t)$. Η διαφορά των δύο αυτών όρων υπολογίζεται αμέσως βοήθεια της σχέσεως 1.3 (12), αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι το σύστημα $S(t + \Delta t)$ προκύπτει από το σύστημα $S(t)$ μετά από μία παράλληλη μεταφορά $\mathbf{U}\Delta t$ (η οποία δεν ενδιαφέρει εν προκειμένω) και μια περιστροφή περί τον άξονα $\mathbf{e} = \mathbf{\Omega}/|\mathbf{\Omega}|$ κατά γωνία $\delta\theta = |\mathbf{\Omega}|\Delta t$. Τότε, εφαρμόζοντας τη σχέση 1.3 (12) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t+\Delta t)} &\stackrel{1,2,3}{\cong} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} + \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} \times \mathbf{e}\delta\theta + O(\delta\theta^2) \\ &\stackrel{1,2,3}{\cong} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} + \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \times \mathbf{\Omega}(t)\Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t)} - \mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t+\Delta t)} &\stackrel{1,2,3}{\cong} -\mathbf{a}(t)|_{S(t)} \times \mathbf{\Omega}(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &\stackrel{1,2,3}{\cong} \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Εισάγοντας την (8) στην (7) και διαιρώντας δια Δt βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{a}(t)}{\Delta t} &\doteq \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \stackrel{1,2,3}{\cong} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{a}(t + \Delta t)|_{S(t+\Delta t)} - \mathbf{a}(t)|_{S(t)} \right) + \\ &\quad + \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t)|_{S(t)} + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Παίρνοντας τώρα το όριο για $\Delta t \rightarrow 0$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς (1) και (2), βρίσκουμε

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \doteq \partial_t \mathbf{a}(t)|_{S(t)} + \mathbf{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t)|_{S(t)},$$

η οποία είναι ακριβώς η αποδεικτέα σχέση.

1.6 Εξισώσεις κίνησης επιπλέοντος στερεού σώματος: I. Αδρανειακοί συντελεστές

Ένα σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση της ανάλυσης και εξειδίκευσης των διανυσματικών εξισώσεων κίνησης 1.1 (4) και 1.1 (5) του ελεύθερα επιπλέοντος σώματος, αποτελεί η επεξεργασία (μετασχηματισμός) και η ανάλυση σε συνιστώσες του αριστερά μέλους αυτών. Αυτό ακριβώς είναι το αντικείμενο του παρόντος εδαφίου. Το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή είναι η εισαγωγή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων, με τη βοήθεια του οποίου οι δύο διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις 1.1 (4) και 1.1 (5) μετατρέπονται σε έξι βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις ως προς τις συνιστώσες

$$(U_1(t), U_2(t), U_3(t)) \text{ και } (\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)),$$

της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας $\mathbf{U}(t)$ και $\mathbf{\Omega}(t)$, αντίστοιχα.

Μια πρώτη προφανής επιλογή είναι να χρησιμοποιηθεί ένα ακίνητο (χωροπαγές) σύστημα συντεταγμένων. Όπως όμως συχνά συμβαίνει στην επιστημονική πράξη, η προφανής λύση παρουσιάζει σημαντικά μειονεκτήματα. Στην προκειμένη περίπτωση τα κύρια μειονεκτήματα είναι:

- i) Τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά του επιπλέοντος σώματος (πλοίου) ως προς ακίνητο (χωροπαγές) σύστημα συντεταγμένων καθίστανται συναρτήσεις του χρόνου, οι οποίες μάλιστα εξαρτώνται έμμεσα και περίπλοκα από τις άγνωστες ταχύτητες $\mathbf{U}(t)$ και $\mathbf{\Omega}(t)$ του σώματος, και
- ii) Κατά τη διεξαγωγή μετρήσεων (τόσο σε πειραματικό επίπεδο όσο και στο φυσικό σύστημα) τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα όργανα μέτρησης είναι επιταχυνσιόμετρα τα οποία τοποθετούνται επί του επιπλέοντος σώματος (μοντέλου ή πλοίου), και δίδουν απ' ευθείας συνιστώσες αδρανειακών επιταχύνσεων (και εξ αυτών, δι' ολοκληρώσεως, ταχυτήτων και κινήσεων) ως προς κατευθύνσεις σωματοπαγώς καθορισμένες.

Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις οδηγούμαστε να χρησιμοποιήσουμε σωματοπαγές σύστημα (Σ.Σ.) αναφοράς. Το χρησιμοποιούμενο σύστημα επιλέγεται έτσι ώστε να έχει ως αρχή το σωματοπαγές σημείο αναφοράς των ταχυτήτων. Προφανώς η γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega}(t)$ του Σ.Σ. είναι η ίδια με τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

Δεδομένου ότι τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά του σώματος είναι χρονικώς αμετάβλητα ως προς το σωματοπαγές συντεταγμένων (βλ. και εδάφιο 1.2), έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_B} \rho_B (\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B) dV_B \right) = \int_{V_B} \rho_B \frac{d}{dt} (\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B) dV_B, \quad (1)$$

και

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_B} \rho_B \mathbf{r}_B \times (\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B) dV_B \right) = \int_{V_B} \rho_B \frac{d}{dt} \{ \mathbf{r}_B \times (\mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_B) \} dV_B. \quad (2)$$

Κατά συνέπεια, η ανάλυση του αριστερά μέλους των εξισώσεων κίνησης του ελεύθερα επιπλέοντος σώματος σε συνιστώσες ως προς το Σ.Σ., απαιτεί την ανάλυση σε συνιστώσες ως προς το Σ.Σ. των αδρανειακών παραγώγων

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{r}_B \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B)\} \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B). \quad (3)$$

Η ανάλυση των παραγώγων (3) ως προς το Σ.Σ. γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος 1 του εδαφίου 1.5 και, ειδικότερα, με τη βοήθεια των σχέσεων (3), (4) και (5) του εδαφίου αυτού. Τα προκύπτοντα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) = \underbrace{\partial_t \mathbf{U} - \mathbf{r}_B \times \partial_t \boldsymbol{\Omega}}_{\text{γραμμικοί όροι}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})}_{\text{μη-γραμμικοί όροι}} \quad (4)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}_B \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B)\} &= \underbrace{\mathbf{r}_B \times \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_B) \partial_t \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}_B(\mathbf{r}_B \cdot \partial_t \boldsymbol{\Omega})}_{\text{γραμμικοί όροι}} + \\ &+ \underbrace{\mathbf{r}_B(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{U}(\mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{r}_B \times \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\Omega})}_{\text{μη-γραμμικοί όροι}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Η υποσημειούμενη γραμμικότητα /μη-γραμμικότητα αναφέρεται στις ταχύτητες \mathbf{U} και $\boldsymbol{\Omega}$. Δηλαδή, οι υποσημειούμενοι ως μη-γραμμικοί όροι είναι αυτοί ακριβώς οι όροι οι οποίοι περιέχουν γινόμενα των συνιστωσών των ταχυτήτων της μορφής $U_k \Omega_m$ ή $\Omega_k \Omega_m$. (Όπως θα δούμε στο τέλος αυτού του εδαφίου, οι μη-γραμμικοί όροι δεν είναι πάντοτε ανωτέρας τάξεως, από την άποψη της τάξεως μεγέθους).

Ας σχολιάσουμε για λίγο το φυσικό νόημα των ανωτέρω σχέσεων (4) και (5). (Βλ. επίσης εδάφιο 1.5, καθώς και σχετικά σχόλια στο εδάφιο 1.2). Τα αριστερά μέλη των εξισώσεων αυτών είναι αδρανειακές παράγωγοι αδρανειακών ποσοτήτων, και άρα έχουν «απόλυτο» νόημα. Δηλαδή είναι μεγέθη ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων. Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (4) και (5) είναι διανύσματα τα οποία εξ υποθέσεως νοούνται αναλελυμένα ως προς τους άξονες του σωματοπαγούς συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή, η διανυσματική γραφή δεν έχει «απόλυτο» νόημα (ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων), αλλά αποτελεί μια συντομογραφία των αντιστοίχων συνιστωσών ως προς το Σ.Σ., οι οποίες θα ονομάζονται, για λόγους σαφήνειας, και Σ-συνιστώσες.

Όπως έχει ήδη υποσημειωθεί, τα δεξιά μέλη των σχέσεων (4) και (5) περιέχουν όρους γραμμικούς και όρους μη-γραμμικούς ως προς $\mathbf{U}(t)$ και $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Κατά συνέπεια, στις περιπτώσεις όπου οι συνιστώσες της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας του επιπλέοντος σώματος (ή, έστω, μερικές από αυτές), είναι «μικρές», μπορούμε να προχωρήσουμε σε γραμμικοποίηση, απλουστεύοντας σημαντικά την ανάλυση. Δύο τέτοιες περιπτώσεις θα εξετασθούν στη συνέχεια αυτού του εδαφίου.

- Γραμμικοποίηση του αριστερά μέλους των εξισώσεων κίνησης γύρω από θέση ευσταθούς ισορροπίας

Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι όλες οι συνιστώσες $U_k(t)$, $\Omega_k(t)$, $k=1,2,3$, είναι «μικρές», δηλαδή όλοι οι μη-γραμμικοί όροι είναι δευτέρας τάξεως και αμελούνται. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε:

$$U_k(t) = u_k(t), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6\alpha)$$

και

$$\Omega_k(t) = \omega_k(t), \quad (6\beta)$$

σε συμφωνία με την εξής *γενική σύμβαση*, που θα χρησιμοποιούμε συχνά στη συνέχεια:

Με μικρά (πεζά) γράμματα θα υποδηλώνονται οι «μικρές» ποσότητες, δηλαδή αυτές των οποίων τα τετράγωνα και τα μεταξύ τους γινόμενα αμελούνται, και με κεφαλαία γράμματα θα υποδηλώνονται ποσότητες τάξεως μεγέθους μονάδας, δηλαδή αυτές των οποίων τα τετράγωνα και γενικά οι δυνάμεις είναι όλες της ίδιας τάξεως μεγέθους και δεν μπορούν να αγνοηθούν.

Εισάγοντας τώρα τις σχέσεις (6) στα δεξιά μέλη των (4) και (5) και *γραμμικοποιώντας* (πράγμα που, στην προκειμένη περίπτωση, σημαίνει ότι παραλείπουμε τους υποσημειούμενους μη-γραμμικούς όρους), παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) = \partial_t \mathbf{u} - \mathbf{r}_B \times \partial_t \boldsymbol{\omega}, \quad (7\alpha)$$

και

$$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{r}_B \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) \} = \mathbf{r}_B \times \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_B) \partial_t \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_B (\mathbf{r}_B \cdot \partial_t \boldsymbol{\omega}). \quad (7\beta)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (7) στις 1.1 (4) και 1.1 (5), και αμελώντας το δευτεροτάξιο όρο $M\mathbf{U} \times \mathbf{U}_G$ που εμφανίζεται στο αριστερά μέλος της εξισώσεως 1.1 (5), παίρνουμε την ακόλουθη γραμμικοποιημένη μορφή των εξισώσεων κίνησης του ελεύθερα επιπλέοντος σώματος:

$$\left(\int_{V_B} \rho_B dV_B \right) \partial_t \mathbf{u} - \left(\int_{V_B} \rho_B \mathbf{r} dV_B \right) \times \partial_t \boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}, \quad (8\alpha)$$

και

$$\left(\int_{V_B} \rho_B \mathbf{r}_B dV_B \right) \times \partial_t \mathbf{u} + \int_{V_B} \rho_B \{ (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_B) \partial_t \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_B (\mathbf{r}_B \cdot \partial_t \boldsymbol{\omega}) \} dV_B = \mathbf{K}. \quad (8\beta)$$

Οι εξισώσεις αυτές θα μεταγραφούν σε μητρική μορφή, η οποία θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη συνέχεια. Πρώτα όμως θα εισαγάγουμε τον αναγκαίο συμβολισμό ο οποίος θα μας επιτρέψει να εκφράσουμε κατά μητρικό τρόπο τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του σώματος που υπεισέρχονται στα αριστερά μέλη των εξισώσεων (8):

$$\int_{V_B} \rho_B dV_B = M = \text{μάζα του σώματος} \quad (9)$$

και

$$\int_{V_B} \rho_B \mathbf{r}_B dV_B = \mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3) = M\mathbf{R}_G = M(R_{G_1}, R_{G_2}, R_{G_3}). \quad (10)$$

Ο δεύτερος όρος του αριστερά μέλους της (8β) είναι αρκετά περίπλοκος και απαιτεί περισσότερη προσοχή. Αν θέσουμε $\mathbf{r}_B = (r_1, r_2, r_3)^{(1)}$ και $\partial_t \boldsymbol{\omega} = (\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)$, παίρνουμε:

$$\int_{V_B} \rho_B \{ (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_B) \partial_t \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_B (\mathbf{r}_B \cdot \partial_t \boldsymbol{\omega}) \} dV_B = \int_{V_B} \rho_B \left\{ \sum_{k=1}^3 r_k^2 \sum_{m=1}^3 \dot{\omega}_m \mathbf{i}_m - \sum_{k=1}^3 r_k \mathbf{i}_k \sum_{m=1}^3 r_m \dot{\omega}_m \right\} dV_B =$$

⁽¹⁾ Παραλείπουμε το δείκτη $(_B)$ από τις συνιστώσες του σωματοπαγούς διανύσματος \mathbf{r}_B ως προς το Σ.Σ. για να μην επιβαρύνουμε υπερβολικά το συμβολισμό.

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_B} \rho_B \left\{ (r_2^2 + r_3^2) \dot{\omega}_1 - r_1 r_2 \dot{\omega}_2 - r_1 r_3 \dot{\omega}_3 \right\} dV_B \cdot \mathbf{i}_1 + \\
&+ \int_{V_B} \rho_B \left\{ -r_2 r_1 \dot{\omega}_1 + (r_1^2 + r_3^2) \dot{\omega}_2 - r_2 r_3 \dot{\omega}_3 \right\} dV_B \cdot \mathbf{i}_2 + \\
&+ \int_{V_B} \rho_B \left\{ -r_3 r_1 \dot{\omega}_1 - r_3 r_2 \dot{\omega}_2 + (r_1^2 + r_2^2) \dot{\omega}_3 \right\} dV_B \cdot \mathbf{i}_3 = \\
&= \left(\sum_{k=1}^3 I_{1k} \dot{\omega}_k \right) \mathbf{i}_1 + \left(\sum_{k=1}^3 I_{2k} \dot{\omega}_k \right) \mathbf{i}_2 + \left(\sum_{k=1}^3 I_{3k} \dot{\omega}_k \right) \mathbf{i}_3. \quad (11)
\end{aligned}$$

Στην ανωτέρω σχέση I_{km} είναι ο τανυστής αδράνειας του σώματος ως προς τους άξονες του Σ.Σ., οριζόμενος ως εξής:

$$I_{kk} = \int_{V_B} \rho_B \left(\sum_{m=1}^3 r_m^2 - r_k^2 \right) dV_B, \quad k = 1, 2, 3, \quad (12\alpha)$$

$$I_{km} = - \int_{V_B} \rho_B r_k r_m dV_B, \quad k \neq m, k = 1, 2, 3. \quad (12\beta)$$

Οι όροι I_{kk} ονομάζονται ροπές αδράνειας και οι όροι I_{km} , $k \neq m$, γινόμενα αδράνειας του εξεταζόμενου σώματος ως προς το Σ.Σ..

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (9)-(12) και αναλύοντας σε συνιστώσες ως προς τους άξονες του σωματοπαγούς συστήματος, οι εξισώσεις (8) μετασχηματίζονται στις ακόλουθες έξι βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned}
M\dot{u}_1 + 0 + 0 + 0 + J_3\dot{\omega}_2 - J_2\dot{\omega}_3 &= F_1 \\
0 + M\dot{u}_2 + 0 - J_3\dot{\omega}_1 + 0 + J_1\dot{\omega}_3 &= F_2 \\
0 + 0 + M\dot{u}_3 + J_2\dot{\omega}_1 - J_1\dot{\omega}_2 + 0 &= F_3 \\
0 - J_3\dot{u}_2 + J_2\dot{u}_3 + I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + I_{13}\dot{\omega}_3 &= K_1 \\
J_3\dot{u}_1 + 0 - J_1\dot{u}_3 + I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 &= K_2 \\
J_3\dot{u}_1 + 0 - J_1\dot{u}_3 + I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 &= K_3
\end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

όπου:

$\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ είναι οι ρυθμοί μεταβολής των Σ-συνιστωσών της αδρανειακής ταχύτητας \mathbf{u} (συνοπτικότερα, οι Σ-συνιστώσες του $\partial_t \mathbf{u}$),

$\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ είναι οι ρυθμοί μεταβολής των Σ-συνιστωσών της αδρανειακής γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ (συνοπτικότερα, οι Σ-συνιστώσες του $\partial_t \boldsymbol{\omega}$),

F_1, F_2, F_3 είναι οι Σ-συνιστώσες της δύναμης \mathbf{F} , και

K_1, K_2, K_3 είναι οι Σ-συνιστώσες της ροπής \mathbf{K} .

Οι έξι βαθμωτές εξισώσεις που περιέχονται στη σχέση (13) μπορούν εύκολα να γραφούν σε μητρική μορφή. Ομαδοποιώντας τις εξισώσεις αυτές ανά τρεις (τρεις πρώτες –«εξισώσεις δυνάμεων», τρεις επόμενες –«εξισώσεις ροπών»), μπορούμε να τις γράψουμε στη μορφή:

$$M_{Fu} \dot{\mathbf{u}} + M_{F\omega} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F} \quad , \quad (14\alpha)$$

$$M_{Ku} \dot{\mathbf{u}} + M_{K\omega} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{K} \quad , \quad (14\beta)$$

όπου $\underline{\dot{u}}$, $\underline{\dot{\omega}}$, \underline{F} και \underline{K} είναι η 3×1 μητρική αναπαράσταση των διανυσμάτων $\partial_t \mathbf{u}$, $\partial_t \boldsymbol{\omega}$, \mathbf{F} και \mathbf{K} , αντίστοιχα, δηλαδή

$$\underline{\dot{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

και $M_{F\dot{u}}$, $M_{K\dot{\omega}}$, $M_{F\dot{\omega}}$ και $M_{K\dot{u}}$ είναι 3×3 πίνακες αδρανειακών χαρακτηριστικών οι οποίοι, σύμφωνα με τις εξισώσεις (13), έχουν τη μορφή:

$$M_{F\dot{u}} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad M_{K\dot{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$M_{F\dot{\omega}} = -M_{K\dot{u}} = \begin{pmatrix} 0 & J_3 & -J_2 \\ -J_3 & 0 & J_1 \\ J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

Θα σχολιάσουμε τώρα το φυσικό νόημα των διαφόρων όρων που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (14α,β). Κατ' αρχήν, στην εξεταζόμενη περίπτωση όπου όλες οι συνιστώσες $u_k(t)$ και $\omega_k(t)$, $k=1,2,3$, είναι μικρές (και άρα το επιπλέον σώμα εκτελεί ταλαντωτικές κινήσεις μικρού πάτους γύρω από μια σταθερή μέση θέση), οι Σ -συνιστώσες $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ εκφράζουν (σε πρωτοτάξια προσέγγιση) τις αδρανειακές επιταχύνσεις του σώματος ως προς τους αντίστοιχους Σ -άξονες (δηλαδή τους αντίστοιχους άξονες του $\Sigma.S.$ συντεταγμένων). Αυτό προκύπτει άμεσα από τη σχέση:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + O(u_k \omega_k) \approx \partial_t \mathbf{u} \quad (18)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συνιστώσες $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ εκφράζουν πάντοτε αδρανειακές γωνιακές επιταχύνσεις, εφ' όσον η σχέση

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \partial_t \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \partial_t \boldsymbol{\omega} \quad (19)$$

ισχύει πάντοτε, ανεξαρτήτως γραμμικοποίησης. Βλ. και εδάφιο 1.5.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι στην εξίσωση (14α) («εξίσωση των δυνάμεων») υπεισέρχονται όχι μόνον οι γραμμικές επιταχύνσεις $\underline{\dot{u}}$ αλλά και οι γωνιακές επιταχύνσεις $\underline{\dot{\omega}}$. Αντίστοιχα, στην εξίσωση (14β) («εξίσωση των ροπών») υπεισέρχονται όχι μόνον οι γωνιακές επιταχύνσεις $\underline{\dot{\omega}}$ αλλά και οι γραμμικές επιταχύνσεις $\underline{\dot{u}}$. Δηλαδή **οι εξισώσεις των δυνάμεων και των ροπών είναι συζευγμένες μεταξύ τους**. Η σύζευξη αυτή πραγματοποιείται μέσω των πινάκων $M_{F\dot{\omega}}$ και $M_{K\dot{u}}$, οι οποίοι εξαρτώνται από την ποσότητα $\mathbf{J} = M \mathbf{R}_G = M \overline{\mathbf{OG}}$. Με τη βοήθεια της σχέσεως (17) βλέπουμε ότι

$$M_{F\dot{\omega}} = 0 = M_{K\dot{u}} \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \mathbf{J} = M \overline{\mathbf{OG}} = 0.$$

Δηλαδή, στην περίπτωση ελεύθερα επιπλέοντος σώματος, οι εξισώσεις των δυνάμεων (14α) αποσυζεύγγονται από τις εξισώσεις των ροπών (14β), αν και μόνον αν το σημείο O αναφοράς των ταχυτήτων $\mathbf{U}(t)$ συμπίπτει με το κέντρο μάζας G του σώματος. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (14α,β) παίρνουν την μορφή

$$M_{F\dot{u}} \dot{u} = \tilde{F} \quad , \quad (14\alpha')$$

$$M_{K\dot{\omega}} \dot{\omega} = \tilde{K} \quad . \quad (14\beta')$$

Μια άλλη ειδική περίπτωση η οποία παρουσιάζει εννοιολογικό ενδιαφέρον (αλλά δεν είναι πρακτικά σημαντική, στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος) έχουμε όταν το σημείο O κρατείται ακίνητο και το σώμα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους, περιστρεφόμενο ελεύθερα γύρω από το σημείο αυτό⁽²⁾. Τότε $\dot{u} = 0$, και οι εξισώσεις (14α) και (14β) παίρνουν τη μορφή:

$$M_{F\dot{\omega}} \dot{\omega} = \tilde{F} \quad , \quad (14\alpha'')$$

$$M_{K\dot{\omega}} \dot{\omega} = \tilde{K} \quad . \quad (14\beta'')$$

Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (14β'') αρκούν για τον προσδιορισμό των $\dot{\omega}$, οπότε οι εξισώσεις (14α'') μας δίνουν τις αντιδράσεις \tilde{F} που αναπτύσσονται στο σημείο στηρίξεως O .

Πριν προχωρήσουμε θα δώσουμε μία ακόμη (ισοδύναμη) μητρική αναπαράσταση των εξισώσεων (14α, 14β), η οποία θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη συνέχεια. Ορίζουμε κατ' αρχήν τον 6×6 πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} M_{F\dot{u}} & M_{F\dot{\omega}} \\ M_{K\dot{u}} & M_{K\dot{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & \vdots & 0 & J_3 & -J_2 \\ 0 & M & 0 & \vdots & -J_3 & 0 & J_1 \\ 0 & 0 & M & \vdots & J_2 & -J_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -J_3 & J_2 & \vdots & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ J_3 & 0 & -J_1 & \vdots & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ -J_2 & J_1 & 0 & \vdots & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (20)$$

ο οποίος θα ονομάζεται και **γενικευμένος αδρανειακός τανυστής** του σώματος. Με τη βοήθεια του πίνακα $M = (M_{km})_{6 \times 6}$, οι δύο εξισώσεις (14α) και (14β) ενοποιούνται στην

$$M\dot{u} = \tilde{F} \quad \text{ή} \quad \sum_{m=1}^6 M_{km} \dot{u}_m = F_k, \quad k=1(1)6, \quad (21\alpha,\beta)$$

όπου \dot{u} και F είναι 6×1 πίνακες (6-διάστατα διανύσματα) οριζόμενοι ως εξής:

$$\dot{u} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{F} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

⁽²⁾ Είναι προφανές ότι η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε ελεύθερα επιπλέον σώμα.

δηλαδή, ορίζουμε $\dot{u}_{k+3} = \dot{\omega}_k$, $k=1,2,3$, και $F_{k+3} = K_k$, $k=1,2,3$. Το 6-διάστατο διάνυσμα \underline{F} , το οποίο συμπεριλαμβάνει τα διανύσματα της συνολικής δύναμης \mathbf{F} και της συνολικής ροπής \mathbf{K} , που ασκούνται στο σώμα, θα ονομάζεται και **γενικευμένη δύναμη** ή –καλύτερα– **γενικευμένη φόρτιση**. Αντίστοιχα, το 6-διάστατο διάνυσμα $\underline{\dot{u}}$, το οποίο συμπεριλαμβάνει τις Σ -συνιστώσες της γραμμικής και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος (δηλαδή τα διανύσματα $\partial_i \mathbf{u}$ και $\partial_i \boldsymbol{\omega}$), θα ονομάζεται και **γενικευμένη επιτάχυνση**. Ας σημειωθεί ότι τα ίδια σύμβολα, $\underline{\dot{u}}$ και \underline{F} , χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τόσο τους 3×1 πίνακες που αντιστοιχούν στα διανύσματα $\partial_i \mathbf{u}$ και \mathbf{F} , όσο και τους 6×1 πίνακες της γενικευμένης επιτάχυνσης και της γενικευμένης φόρτισης. Αυτό δεν αναμένεται να φέρει σύγχυση, δεδομένου ότι η ακριβής εκάστοτε έννοια των $\underline{\dot{u}}$ και \underline{F} προκύπτει από τα συμφραζόμενα.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\underline{u} = \underline{\xi}, \quad \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{\xi}}, \quad (23)$$

οι οποίες ισχύουν στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης (21) και στη μορφή

$$M_{\underline{\xi}} \underline{\ddot{\xi}} = \underline{F} \quad \text{ή} \quad \sum_{m=1}^6 M_{km} \ddot{\xi}_m = F_k, \quad k=1(1)6. \quad (24)$$

- **Γραμμικοποίηση των εξισώσεων στην περίπτωση όπου το επιπλέον σώμα κινείται μεγάλη μέση ταχύτητα.**

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το επιπλέον σώμα (πλοίο) κινείται με «μεγάλη» (τάξης μεγέθους μονάδος) μέση ταχύτητα U κατά τον άξονα x_{1B} ($U = \text{σταθερή} = \text{ανεξάρτητη του χρόνου}$), εκτελώντας ταυτόχρονα «μικρές» ταλαντωτικές (παρασιτικές) κινήσεις ως προς όλους τους βαθμούς ελευθερίας του. Τότε, μπορούμε να θέσουμε:

$$U_1(t) = U + u_1(t), \quad U_k(t) = u_k(t), \quad k=2,3 \quad (25\alpha)$$

$$\Omega_k(t) = \omega_k(t) = u_{k+3}(t), \quad k=1,2,3. \quad (25\beta)$$

Στην περίπτωση αυτή τα γινόμενα $u_k u_l$, $k, l=1,2,\dots,6$ μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα (δευτέρας τάξεως) ως προς τους γραμμικούς όρους (που περιέχουν τις συνιστώσες u_m ή ω_m), και να παραλειφθούν. Όμως, τα γινόμενα της μορφής $U u_k$ είναι συγκρίσιμα με τους γραμμικούς όρους και δεν επιτρέπεται να αγνοηθούν. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι μη-γραμμικοί όροι των δεξιά μελών των εξισώσεων (4) και (5) γραμμικοποιούνται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = U \omega_3 \mathbf{i}_2 - U \omega_2 \mathbf{i}_3 + O(u_k \omega_l), \quad (26\alpha)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = O(\omega_k \omega_l), \quad (26\beta)$$

$$\mathbf{r}_B(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = U \omega_l \mathbf{r}_B + O(u_k \omega_l), \quad (26\gamma)$$

$$-\mathbf{U}(\mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}) = -U(\mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{i}_1 + O(u_k \omega_l), \quad (26\delta)$$

$$(\mathbf{r}_B \times \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\Omega}) = O(\omega_k \omega_l). \quad (26\epsilon)$$

Επίσης, γραμμικοποιώντας τον όρο $M \mathbf{U} \times \mathbf{U}_G$ βρίσκουμε

$$\mathbf{M}\mathbf{U} \times \mathbf{U}_G = U(J_1\omega_2 - J_2\omega_1)\mathbf{i}_2 + U(J_1\omega_3 - J_3\omega_1)\mathbf{i}_3 + 0(u_k\omega_1). \quad (26\sigma\tau)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (26α-στ) στις εξισώσεις κίνησης του ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος 1.1(4) και 1.1(5), και γράφοντας τις τελευταίες σε μητρική μορφή (χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις (14)) βρίσκουμε

$$M_{F\dot{u}} \dot{\underline{u}} + M_{F\dot{\omega}} \dot{\underline{\omega}} + UM_{F\omega} \underline{\omega} = \underline{F}, \quad (27\alpha)$$

$$M_{K\dot{u}} \dot{\underline{u}} + M_{K\dot{\omega}} \dot{\underline{\omega}} + UM_{K\omega} \underline{\omega} = \underline{K}, \quad (27\beta)$$

όπου οι καινούργιοι πίνακες $M_{F\omega}$ και $M_{K\omega}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_{F\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M \\ 0 & -M & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{K\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -J_2 & -J_3 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

και εκφράζουν την επίδραση της μόνιμης μεταφορικής κίνησης στις μη-μόνιμες περιστροφικές κινήσεις του επιπλέοντος σώματος (πλοίου).

Οι εξισώσεις (27α) και (27β) μπορούν επίσης να γραφούν σε ενοποιημένη μορφή (κατ' αναλογία με την εξίσωση (21)) ως εξής:

$$M\dot{\underline{u}} + UN\dot{\underline{u}} = \underline{F}, \quad \text{ή} \quad \sum_{m=1}^6 (M_{km}\dot{u}_m + UN_{km}u_m) = F_k, \quad k = 1(1)6 \quad (29)$$

όπου ο νέος 6×6 πίνακας N δίνεται από τη σχέση:

$$N = (N_{km})_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & M_{F\omega} \\ 0 & M_{K\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_2 & -J_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (23) η εξίσωση (29) γράφεται και στη μορφή

$$M\ddot{\underline{\xi}} + UN\dot{\underline{\xi}} = \underline{F} \quad \text{ή} \quad \sum_{m=1}^6 (M_{km}\ddot{\xi}_m + UN_{km}\dot{\xi}_m) = F_k, \quad k = 1(1)6. \quad (31)$$

- Επιπλέον σώμα με κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας

Μια πολύ ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση έχουμε όταν το επίπεδο $[0x_{1B}, 0x_{3B}]$ αποτελεί επίπεδο γεωμετρικής και αδρανειακής συμμετρίας του ελεύθερα επιπλέοντος στερεού σώματος (π.χ. περίπτωση πλοίου χωρίς μόνιμη κλίση). Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$J_2 = R_{G_2} = 0 \quad \text{και} \quad I_{21} = I_{23} = 0, \quad (32)$$

και άρα οι πίνακες M και N γίνονται:

$$M = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & M & 0 & -J_3 & 0 & J_1 \\ 0 & 0 & M & 0 & -J_1 & 0 \\ 0 & -J_3 & 0 & I_{11} & 0 & I_{13} \\ J_3 & 0 & -J_1 & 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & I_{31} & 0 & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

και

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Από τις σχέσεις (33) και (34) βλέπουμε ότι

$$M_{2k-1,2l} = 0, \quad M_{2k,2l-1} = 0, \quad (35\alpha)$$

και

$$N_{2k-1,2l} = 0, \quad N_{2k,2l-1} = 0. \quad (35\beta)$$

Εξ αυτών προκύπτει εύκολα ότι, στην προκειμένη περίπτωση (όπου το επίπεδο $[Ox_{1B}, Ox_{3B}]$ είναι επίπεδο γεωμετρικής και αδρανειακής συμμετρίας), οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση κατά τους άξονες Ox_{1B}, Ox_{3B} και την περιστροφή περί τον Ox_{2B} είναι ασύζευκτες (όσον αφορά το αριστερά μέλος τους) ως προς τις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις, δηλαδή εκείνες που περιγράφουν την κίνηση κατά τον άξονα Ox_{2B} , και τις περιστροφές περί τους Ox_{1B} και Ox_{3B} .

1.7 Εξισώσεις κίνηση επιπλέοντος σώματος: II. Φορτίσεις

Πάνω σ' ένα επιπλέον σώμα (πλοίο, ρυμουλκούμενη κατασκευή, πλωτός γερανός, πλωτήρας με όργανα μέτρησης, κλπ.) αναπτύσσονται φορτίσεις (δυνάμεις και ροπές) από διάφορες αιτίες. Από φαινομενολογική άποψη μπορούμε να κατατάξουμε τα αίτια φόρτισης ως εξής:

- i) Φορτίσεις από το *νερό*,
- ii) Φορτίσεις από τον *αέρα/άνεμο*,
- iii) Φορτίσεις από *επιφάνειες ελέγχου* που συνεργάζονται με το επιπλέον σώμα (π.χ. πηδάλιο, αντιδιατοιχιστικά πτερύγια, κ.λ.π.),
- iv) Φορτίσεις από το *σύστημα πρόωσης*,
- v) Φορτίσεις από *συνδέσμους* με άλλα επιπλέοντα ή ακίνητα σώματα (π.χ. αγκύρωση, ρυμούλκηση, κ.λ.π.).

Συχνά τα περισσότερα από τα ανωτέρω αίτια φόρτισης συνυπάρχουν, καθιστώντας ιδιαίτερα περίπλοκο τον ακριβή προσδιορισμό των φορτίσεων που αναπτύσσονται πάνω στο σώμα. Από την άλλη μεριά, σε ορισμένες περιπτώσεις, διάφορα αίτια φόρτισης μπορούν να παραλειφθούν, λόγω μικρής ποσοστιαίας συμβολής στην ολική φόρτιση του σώματος. Επί παραδείγματι, οι φορτίσεις από αέρα/άνεμο συχνά αμελούνται σε σχέση με τις φορτίσεις από το νερό.

Οι φορτίσεις από το νερό (υδροδυναμικές φορτίσεις) είναι πάντοτε σημαντικές, τόσο για επιπλέοντα όσο και για βυθισμένα σώματα, και δεν μπορούν να αμεληθούν. Οι φορτίσεις αυτές μπορούν να ταξινομηθούν περαιτέρω ως εξής:

- α) Φορτίσεις λόγω αδρανειακής αντίδρασης του περιρρέοντος ρευστού,
- β) Φορτίσεις λόγω δημιουργίας (από την κίνηση του σώματος) επιφανειακών κυματισμών που αλληλεπιδρούν με το σώμα. Στις φορτίσεις αυτές συμπεριλαμβάνεται και η απόσβεση ακτινοβολίας –η οποία υπάρχει και στην περίπτωση όπου παραλείψουμε τις συνεκτικές τάσεις- και η οποία οφείλεται στην απομάκρυνση ενέργειας από το σώμα μέσω των απομακρυνόμενων κυματισμών,
- γ) Φορτίσεις λόγω ανάπτυξης κυκλοφορίας γύρω από το επιπλέον σώμα ή από επί μέρους στοιχεία (παρελκόμενα, επιφάνειες ελέγχου, π.χ. πηδάλιο πλοίου),
- δ) Φορτίσεις λόγω συνεκτικών τάσεων (αντίσταση/απόσβεση λόγω συνεκτικότητας),
- ε) Υδροστατικές φορτίσεις.

Στο εδάφιο αυτό θα εκφράσουμε αναλυτικά τις υδροστατικές φορτίσεις για την περίπτωση μικρών (“άπειροστών”) κινήσεων. Οι υδροδυναμικές φορτίσεις θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

- Υδροστατικές φορτίσεις

Με τον όρο υδροστατικές φορτίσεις εννοούμε τις δυνάμεις και τις ροπές που αναπτύσσονται από τις υδροστατικές πιέσεις πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του επιπλέοντος σώματος. Η συνολική μόνιμη δύναμη και ροπή (ως προς κάποιο κέντρο αναφοράς) που αναπτύσσεται λόγω του μόνιμου μέρους των υδροστατικών πιέσεων, εξισορροπείται από το βάρος του επιπλέοντος σώματος. Περαιτέρω, όταν το επιπλέον σώμα εκτελεί μικρές κινήσεις $\xi = (\xi_j)_{6 \times 1}$ γύρω από μια θέση ευσταθούς υδροστατικής ισορροπίας, τότε αναπτύσσονται

πρόσθετες υδροστατικές φορτίσεις $\underline{F}^{(Y\Sigma)} = \left(F_j^{(Y\Sigma)} \right)_{6 \times 1}$, οι οποίες έχουν χαρακτήρα δυνάμεων επαναφοράς και δίνονται από τη σχέση

$$\underline{F}^{(Y\Sigma)} = -C \cdot \underline{\xi}, \quad (1)$$

όπου C είναι ένας 6×6 πίνακας της μορφής

$$C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34}|^2 & C_{35}|^1 & 0 \\ 0 & 0 & C_{43}|^2 & C_{44} & C_{45}|_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{53}|^1 & C_{54}|_2 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

με

$$\left. \begin{aligned} C_{33} &= \rho g A \\ C_{34} &= C_{43} = \rho g A_2 \\ C_{35} &= C_{53} = -\rho g A_1 \\ C_{44} &= Mg \overline{GB} + \rho g A_{22} \\ C_{45} &= C_{54} = -\rho g A_{12} \\ C_{55} &= Mg \overline{GB} + \rho g A_{11} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

όπου M είναι η μάζα του επιπλέοντος σώματος, A είναι το εμβαδόν της ισάλου του σώματος, A_k, A_{km} , $k, m = 1, 2$, είναι οι πρώτες και οι δεύτερες ροπές του εμβαδού της ισάλου, αντιστοίχως, οριζόμενες από τις σχέσεις

$$A_k = \int_A x_k dA, \quad A_{km} = \int_A x_k x_m dA, \quad (4)$$

και \overline{GB} είναι η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του κέντρου βάρους G και του κέντρου άντωσης B του επιπλέοντος σώματος, θεωρούμενη θετική όταν το B βρίσκεται ψηλότερα από το G .

Τα στοιχεία του πίνακα C ονομάζονται **υδροστατικοί συντελεστές** του επιπλέοντος σώματος. Περαιτέρω, οι συμβολισμοί $C_{km}|^1$, (αντιστοίχως, $C_{pq}|_2$), χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι οι υδροστατικοί συντελεστές C_{km} (αντιστοίχως, C_{pq}) μηδενίζονται όταν το επίπεδο $[x_{1B} = 0]$ (αντιστοίχως, τα επίπεδα $[x_{1B} = 0]$ και $[x_{2B} = 0]$) είναι επίπεδο(α) συμμετρίας του σώματος.

Η απόδειξη των γραμμικοποιημένων σχέσεων (3) είναι σχετικά απλή και μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους (π.χ. ολοκλήρωση πιέσεων ή εφαρμογή θεωρήματος Green). Βλ. σχετικά στα βιβλία Λουκάκης, Πέρρας και Τζαμπίρας (1993), Semyonov et al., (1978), Newman, (1977).

Η μορφή του πίνακα C , και ειδικότερα το ότι η πρώτη, η δεύτερη και η έκτη γραμμή του είναι μηδενικές, αντανακλά το φυσικό γεγονός ότι *οι οριζόντιες κινήσεις, ξ_1, ξ_2, ξ_6 , δεν επάγουν υδροστατικές αντιδράσεις.*

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (1), ή **εξίσωση κίνησης** (24, εδάφιο 1.6) επιπλέοντος σώματος το οποίο *ταλαντεύεται γύρω από θέση ευσταθούς υδροστατικής ισορροπίας*, παίρνει τη μορφή

$$M\ddot{\xi} + C\dot{\xi} = \underline{F}^{(E\Xi)} + \underline{F}^{(Y\Delta)}, \quad (5)$$

όπου $\underline{F}^{(Y\Delta)}$ είναι οι υδροδυναμικές φορτίσεις (οι οποίες, γενικά, εξαρτώνται από τις ταχύτητες $\dot{\xi}$ και τις επιταχύνσεις $\ddot{\xi}$ του επιπλέοντος σώματος), και $\underline{F}^{(E\Xi)}$ είναι οι υπόλοιπες εξωτερικές φορτίσεις.

Περαιτέρω, η **εξίσωση κίνησης** (31, εδάφιο 1.6), επιπλέοντος σώματος το οποίο *ταλαντεύεται γύρω από μόνιμη κίνηση με σταθερή μέση ταχύτητα U* , παίρνει τη μορφή

$$M\ddot{\xi} + UN\dot{\xi} + C\dot{\xi} = \underline{F}^{(E\Xi)} + \underline{F}^{(Y\Delta)}. \quad (6)$$

1.8 Βασικές έννοιες και απλά μαθηματικά εργαλεία για την ταξινόμηση, μελέτη και επίλυση ταλαντωτικών συστημάτων και κυματικών φαινομένων

Η μελέτη και πρόβλεψη της δυναμικής συμπεριφοράς επιπλεόντων σωμάτων (π.χ. πλοίου) σε κυματισμούς περιλαμβάνει:

- i) Τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης αυτών, θεωρουμένων ως στερεών σωμάτων σε αλληλεπίδραση με το κυματικό πεδίο του περιρρέοντος νερού, και
- ii) Την επίλυση των λαμβανομένων εξισώσεων, με σκοπό τον προσδιορισμό των (ταλαντωτικών) αποκρίσεων των επιπλεόντων σωμάτων.

Σκοπός του παρόντος εδαφίου είναι η υπενθύμιση ορισμένων βασικών εννοιών και εργαλείων τα οποία είναι ιδιαίτερος χρήσιμα για την ταξινόμηση, μελέτη και επίλυση ταλαντωτικών συστημάτων, όπως αυτών που προκύπτουν στα πλαίσια της μελέτης της δυναμικής συμπεριφοράς επιπλεόντων σωμάτων. Δεδομένου ότι στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε διεξοδικά και με τους επιφανειακούς κυματισμούς βαρύτητας (οι οποίοι διεγείρουν τα επιπλέοντα σώματα και αλληλεπιδρούν δυναμικά με αυτούς), οι έννοιες και τα μαθηματικά εργαλεία που θα παρουσιάσουμε (υπενθυμίσουμε) θα διατυπωθούν έτσι ώστε να καλύπτουν και κυματικά φαινόμενα.

Λόγω του μερικού και εργαλειακού χαρακτήρα των υπομνήσεων αυτών, θα τις παρουσιάσουμε υπό τη μορφή **Ερωτήσεων-Απαντήσεων**. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η εστίαση στα σημεία ενδιαφέροντος, χωρίς πλατυασμούς και γενικολογίες.

Ερώτηση 1: Τα ταλαντωτικά συστήματα και τα κυματικά φαινόμενα⁽¹⁾ διακρίνονται σε **γραμμικά** και **μη-γραμμικά**. Ποιό είναι το κριτήριο μέσω του οποίου γίνεται αυτή η διάκριση; ■

Απάντηση: Ας συμβολίσουμε με f τη διέγερση του συστήματος (διεγείρον αίτιο του φαινομένου) και με $L(f)$ την απόκριση του συστήματος (δηλ., την προκύπτουσα ταλαντωτική κίνηση ή κυματική διαταραχή). Το **κριτήριο** (συνθήκη) **γραμμικότητας** μπορεί τότε να διατυπωθεί ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι κάθε μια από τις διεγέρσεις f_1, f_2 (όταν δρα μόνη της) δημιουργεί την απόκριση (κυματική διαταραχή, κυματικό πεδίο)

$$y_n(\mathbf{x}, t) = L(f_n), \quad n = 1, 2.$$

Εάν επιδράσουν ταυτόχρονα (και αθροιστικά) οι διεγέρσεις f_1 και f_2 , δηλαδή εάν η διέγερση γίνει $f = f_1 + f_2$, προκύπτει τότε η απόκριση (κυματική διαταραχή)

$$y(\mathbf{x}, t) = L(f) = L(f_1 + f_2).$$

Εάν ισχύει η σχέση

$$y(\mathbf{x}, t) = y_1(\mathbf{x}, t) + y_2(\mathbf{x}, t) \Leftrightarrow L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2), \quad (1)$$

⁽¹⁾ Όπως και κάθε άλλου είδους συστήματα και φαινόμενα.

για κάθε ζεύγος δυνατών διεγέρσεων f_1, f_2 , τότε το σύστημα (φαινόμενο) θα λέγεται **γραμμικό**. Εάν η σχέση (1) δεν ισχύει, τότε το σύστημα (φαινόμενο) θα λέγεται μη-γραμμικό.

Η συνθήκη (1) αναφέρεται επίσης ως *Αρχή της* (γραμμικής) *υπέρθεσης*.

Ερώτηση 2: Πώς μπορούν να ταξινομηθούν περαιτέρω τα μη-γραμμικά ταλαντωτικά συστήματα (κυματικά φαινόμενα); ■

Απάντηση: Ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος ή φαινομένου ως μη-γραμμικού είναι αποφαιτικός (αρνητικός). Δεν προσδιορίζει κατ' ουσίαν τί ιδιότητες *έχει* το σύστημα (φαινόμενο). Απλώς μας λέει ότι *δεν έχει* τη συγκεκριμένη ιδιότητα της γραμμικότητας. Με αυτήν την έννοια είναι ιδιαίτερα σημαντικό να προχωρήσουμε σε μια θετικού χαρακτήρα ταξινόμηση των μη-γραμμικών συστημάτων και φαινομένων, με βάση συγκεκριμένες χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ας σημειωθεί ότι αυτό το ερώτημα ταξινόμησης είναι ιδιαίτερος περίπλοκο και -στη γενικότητά του- δεν έχει απαντηθεί πλήρως.

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να αναφέρουμε μια κατηγορία μη-γραμμικών συστημάτων (φαινομένων), η οποία χαρακτηρίζεται κατά θετικό τρόπο, από συγκεκριμένες ιδιότητες. Αυτή είναι η κατηγορία των *πολυωνομικώς μη-γραμμικών συστημάτων (φαινομένων)*⁽²⁾ (polynomially non-linear systems/phenomena). Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, θα διατυπώσουμε τον χαρακτηρισμό μόνον των τετραγωνικώς μη-γραμμικών φαινομένων.

Έστω ότι κάθε μια διεγερση f_n (όταν δρα μόνη της) δημιουργεί την απόκριση (κυματική διαταραχή, κυματικό πεδίο) $y_n(\mathbf{x}, t) = Q(f_n)$, $n = 1, 2, 3$. Εάν επιδράσουν ταυτόχρονα (και αθροιστικά) και οι τρεις διεγέρσεις f_1, f_2, f_3 , δηλαδή εάν η διεγερση γίνει $f = f_1 + f_2 + f_3$, τότε προκύπτει η απόκριση (κυματική διαταραχή) $y(\mathbf{x}, t) = Q(f) = Q(f_1 + f_2 + f_3)$.

Το σύστημα (φαινόμενο) θα λέγεται *τετραγωνικώς μη-γραμμικό* (ή *τετραγωνικό*) εάν ισχύει η σχέση

$$Q(f_1 + f_2 + f_3) = Q(f_1 + f_2) + Q(f_2 + f_3) + Q(f_3 + f_1) - Q(f_1) - Q(f_2) - Q(f_3), \quad (1)$$

για κάθε τριάδα δυνατών διεγέρσεων f_1, f_2, f_3 .

Με παρόμοιο, αν και πιο πολύπλοκο, τρόπο διατυπώνονται συνθήκες για την κυβική μη-γραμμικότητα και, γενικώς, για την *πολυωνομική μη-γραμμικότητα τάξεως n* . Η συνθήκη της πολυωνομικής μη-γραμμικότητας τάξεως $n+1$ εμπλέκει την ταυτόχρονη (και αθροιστική) δράση n ανεξαρτήτων διεγέρσεων.

Ερώτηση 3: Πώς ταξινομούνται τα (ντετερμινιστικά) ταλαντωτικά/κυματικά φαινόμενα ως προς τη χρονική εξάρτησή τους; ■

⁽²⁾ Το επίθετο "πολυωνομικός", εν προκειμένω, έλκει την καταγωγή του από την συνήθη έννοια του πολυωνύμου, αλλά εδώ νοείται κατά πολύ γενικότερο τρόπο.

Απάντηση: Χωρίς την απαίτηση να καλύψουμε κάθε δυνατή περίπτωση, μπορούμε να διακρίνουμε τρεις γενικές (και σημαντικές) κατηγορίες ταλαντωτικών/κυματικών φαινομένων, ως προς το είδος της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής:

- Τα **μεταβατικά** (transient) φαινόμενα,
- Τα **χρονικώς περιοδικά** (time periodic) φαινόμενα, με ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία τα **χρονικώς αρμονικά** (time harmonic) φαινόμενα, και
- Τα **μόνιμα** (steady) κυματικά φαινόμενα.

Ως **μεταβατικά φαινόμενα** θεωρούμε αυτά που ξεκινούν από μια αρχική κατάσταση (συνήθως ηρεμία), εξελίσσονται κατά γενικό τρόπο στο χρόνο, και τέλος αποσβεννύονται ή μεταπίπτουν σε μια από τις δύο άλλες κατηγορίες (περιοδικά ή μόνιμα).

Τα (χρονικώς) **περιοδικά φαινόμενα** έχουν κι αυτά ένα χαρακτήρα μονιμότητας. Στην περίπτωση αυτή, υποτίθεται ότι η αιτία (πηγή) της διαταραχής έχει χρονικώς περιοδική υφή και δρα διαρκώς (δηλαδή για μεγάλο χρονικό διάστημα), οπότε και το αποτέλεσμα (ταλάντωση, κυματική διαταραχή) είναι –έχει πλέον καταστεί– χρονικώς περιοδικό. Η περίπτωση **χρονικώς αρμονικής** (time harmonic) διέγερσης είναι ιδιαίτερος σημαντική για τα γραμμικά και τα πολυωνυμικώς μη-γραμμικά συστήματα. Ειδικώς για τα **γραμμικά συστήματα**, η (μόνιμη) απόκριση είναι και αυτή **χρονικώς αρμονική, με την ίδια συχνότητα**.

Τέλος, ως **μόνιμα κυματικά φαινόμενα** θεωρούμε αυτά τα οποία καθίστανται ανεξάρτητα του χρόνου ως προς κατάλληλο σύστημα αναφοράς (παρατηρητή). Ως ένα παράδειγμα αυτής της (κάπως ιδιότυπης) κατηγορίας κυματικών φαινομένων αναφέρουμε το σύστημα των κυματισμών που παράγει ένα πλοίο, λόγω της κίνησής του με σταθερή ταχύτητα σε ήρεμη θάλασσα (Kelvin ship wave pattern). Αυτό το σύστημα κυματισμών είναι μόνιμο (ανεξάρτητο του χρόνου) ως προς παρατηρητή επί του πλοίου. Βέβαια, το ίδιο σύστημα κυματισμών είναι μεταβατικό ως προς παρατηρητή ακίνητο ως προς τη Γη.

Σχόλιο 1: Η δεύτερη και η τρίτη κατηγορία αποτελούν συχνά εξιδανικεύσεις των πραγματικών φαινομένων. Είναι όμως πολύ χρήσιμες όσον αφορά το μαθηματικό χειρισμό των αντιστοίχων προβλημάτων.

Σχόλιο 2: Τα πραγματικά ταλαντωτικά και κυματικά φαινόμενα εμφανίζουν συνήθως και τους τρεις χαρακτήρες, αν και σε διαφορετικές κλίμακες χώρου-χρόνου.

Σχόλιο 3: Συχνά χρησιμοποιείται η ακόλουθη ορολογία. Στην περίπτωση μεταβατικής χρονικής εξάρτησης, λέμε ότι μελετάμε το φαινόμενο (πρόβλημα) στο **πεδίο του χρόνου**, ενώ στην περίπτωση (χρονικώς) αρμονικής εξάρτησης, λέμε ότι μελετάμε το φαινόμενο (πρόβλημα) στο **πεδίο συχνοτήτων**. Η ορολογία αυτή θα χρησιμοποιηθεί συστηματικά στη συνέχεια.

Ερώτηση 4: Πώς διαφοροποιείται η μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη των ταλαντωτικών και κυματικών προβλημάτων, αναλόγως με το είδος της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής; ■

Απάντηση: Στην περίπτωση των μεταβατικών φαινομένων, η μαθηματική μοντελοποίηση οδηγεί σε **προβλήματα αρχικών τιμών**. Απαιτείται, δηλαδή, η γνώση της αρχικής κατάστασης του εξεταζομένου συστήματος (ή κυματικού πεδίου), η οποία,

σε συνδυασμό με τους νόμους που διέπουν τα φαινόμενα (π.χ., διαφορικές ή ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις), μας επιτρέπει να μελετήσουμε (προβλέψουμε) την εξέλιξή του στο χρόνο. Στην περίπτωση ταλαντώσεων συγκεντρωμένων συστημάτων (lumped systems), τα αντίστοιχα μαθηματικά προβλήματα είναι προβλήματα **αρχικών τιμών συνήθων διαφορικών εξισώσεων**. Μια γενική μέθοδος επίλυσης **γραμμικών προβλημάτων αρχικών τιμών** μας παρέχει η εφαρμογή του **μετασχηματισμού Laplace**:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f(t); t \rightarrow s], \quad s = \sigma + j\omega, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ως γνωστόν, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού αυτού οι χρονικές παράγωγοι αλγεβρικοποιούνται λόγω της βασικής τελεστικής ιδιότητας

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0+) = s \cdot \hat{f}(s) - f(0+), \quad (2)$$

εκ της οποίας προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots \\ &\quad - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+), \quad n > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Στη συνέχεια επιλύεται το μετασχηματισμένο πρόβλημα, και η λύση του αρχικού προβλήματος λαμβάνεται με εφαρμογή του Θεωρήματος αντιστροφής. Βλ. και στο Κεφάλαιο ??, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά αλλά με πληρότητα η βασική θεωρία του μετασχηματισμού Laplace και δίδονται διάφορες χρήσιμες εφαρμογές.

Όσον αφορά τα **κυματικά φαινόμενα**, και εφόσον αυτά εκτείνονται στο χώρο, πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και η επίδραση των συνοριακών επιφανειών, οι οποίες περιορίζουν το χωρικό πεδίο, καθώς και των διεπιφανειών, οι οποίες προσδιορίζουν ασυνέχειες παραμέτρων μέσα στο πεδίο. Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά προβλήματα μέσω των οποίων μοντελοποιείται η κυματική κίνηση είναι, γενικώς, προβλήματα **αρχικών-συνοριακών τιμών** (initial-boundary value problems) μερικών διαφορικών (ή άλλων) εξισώσεων, στα οποία (ενδεχομένως) υπεισέρχονται και **συνθήκες συναρμογής** (matching conditions) στις διεπιφάνειες. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace βοηθά στην επίλυση και αυτών των προβλημάτων –εφ' όσον είναι ή μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά- απαλείφοντας τις χρονικές παραγώγους και απλοποιώντας τα προβλήματα σε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Στην περίπτωση (χρονικώς) περιοδικής ταλαντωτικής (κυματικής) κίνησης δεν τίθεται ζήτημα αρχικών τιμών. Ειδικά στην περίπτωση **γραμμικών** και **χρονικώς αρμονικών** συστημάτων (φαινομένων), η χρονική εξάρτηση είναι τελείως συγκεκριμένης μορφής και μπορεί εύκολα να απαλειφθεί (αλγεβρικοποιηθεί) με τη βοήθεια μιγαδικών αναπαραστάσεων (παραστατικών μιγάνων. Βλ. κατωτέρω, Ερώτηση XX). Έτσι, στην περίπτωση αυτή, οι μεν γραμμικές ταλαντώσεις ανάγονται σε αλγεβρικά συστήματα, τα δε γραμμικά κυματικά προβλήματα ανάγονται σε προβλήματα **συνοριακών τιμών** (ενδεχομένως, και με συνθήκες συναρμογής, εάν υπάρχουν διεπιφάνειες).

Ερώτηση 5: Πώς μπορούμε να απαλείψουμε τη χρονική εξάρτηση από τα γραμμικά (χρονικώς) αρμονικά προβλήματα; ■

Απάντηση: Αυτό γίνεται εύκολα, με τη βοήθεια των αρμονικών συναρτήσεων $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ ή, κατά πιο συστηματικό τρόπο, με τη βοήθεια του μιγαδικού εκθετικού

$\exp(-j\omega t)$ (³). Λόγω της μεγάλης χρησιμότητάς της, η όλη μεθοδολογία της απαλοιφής (αλγεβρικοποίησης) του χρόνου, στην περίπτωση αρμονικών κυμάτων, περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

Έστω $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ το (οποιοδήποτε) θεμελιώδες πεδιακό μέγεθος το οποίο αναπαριστά την κυματική διαταραχή. Εφ' όσον η χρονική εξάρτηση υποτίθεται αρμονική, μιας ορισμένης συχνότητας ω (**μονοχρωματικό κύμα**), η κυματική διαταραχή θα γράφεται στη μορφή

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_c(\mathbf{x}) \cdot \cos \omega t + \eta_s(\mathbf{x}) \cdot \sin \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (1)$$

όπου

$$\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) = \eta_c(\mathbf{x}) + j\eta_s(\mathbf{x}) \quad (2)$$

είναι το **μυγαδικό πλάτος** του χρονικά αρμονικού κύματος. Το μέγεθος $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ θα αναφέρεται επίσης και ως **μυγαδικό πεδίο**. Η χρήση του μυγαδικού πεδίου $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ δεν έχει κάποια ιδιαίτερη φυσική σημασία. Αποτελεί απλώς ένα βολικό τρόπο μαθηματικού χειρισμού της χρονικά αρμονικής εξάρτησης. Η μαθηματική ευκολία που προκύπτει με τη χρήση του μυγαδικού πεδίου $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ καθίσταται φανερή από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\eta_{,t}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega) \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (3\alpha)$$

$$\eta_{,tt}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (3\beta)$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial^n \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t^n} = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \quad (3\gamma)$$

οι οποίες δείχνουν την αντιστοιχία:

$$\text{Αν } \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \text{ είναι το μυγαδικό πλάτος του } \eta(\mathbf{x}, t),$$

$$\text{Τότε } (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \text{ είναι το μυγαδικό πλάτος του } \frac{\partial^n \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t^n}. \quad (4)$$

Με αυτόν τον τρόπο, στην περίπτωση (χρονικώς) αρμονικών κυματικών διαταραχών, η χρονική παράγωγος αλγεβρικοποιείται κατά πολύ απλό και συστηματικό τρόπο.

Ερώτηση 6: Να προσδιορίσετε την ιδιοσυχνότητα του **απλού γραμμικού ταλαντωτή**,

$$mX''(t) + 2bX'(t) + \kappa X(t) = 0, \quad (1)$$

(m είναι η ταλαντευόμενη μάζα, $2b$ ο συντελεστής απόσβεσης, και κ η σταθερά ελατηρίου) με τη βοήθεια της μυγαδικής αναπαράστασης των χρονικώς αρμονικών μεγεθών. ■

(³) Το πρόσημο (-) που εμφανίζεται στο όρισμα του εκθετικού είναι συμβατικό. Μπορούμε, εξίσου καλά, να επιλέξουμε το πρόσημο (+). Το μόνο που έχει σημασία είναι η συνέπεια των χειρισμών.

Απάντηση: Υποθέτοντας αρμονική χρονική εξάρτηση για την άγνωστη συνάρτηση (κίνηση του ταλαντωτή) $X(t)$, θέτουμε

$$X(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\}, \quad (2)$$

όπου ω είναι μια (άγνωστη, προς το παρόν) κυκλική συχνότητα, και $\overset{\circ}{X}$ είναι το μιγαδικό πλάτος (σταθερά). Αναπαραστάσεις όπως η (2), ανωτέρω, χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές μηχανικού, όπως π.χ. στην Ηλεκτροτεχνία. Το μιγαδικό πλάτος $\overset{\circ}{X}$ αναφέρεται συνήθως ως ο **παραστατικός μιγάς** του (χρονικώς αρμονικού) μεγέθους $X(t)$.

Εισάγοντας την αναπαράσταση (2) στη διαφορική εξίσωση (1), παίρνουμε

$$\begin{aligned} m \cdot \operatorname{Re}\left\{(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\} + 2b \cdot \operatorname{Re}\left\{(-j\omega) \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\} + \kappa \cdot \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{\left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa\right] \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι **ισοδύναμη**⁽⁴⁾ με την

$$\left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa\right] \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} = 0. \quad (4)$$

Ο παράγοντας $e^{-j\omega t}$ μπορεί να απλοποιηθεί διότι $|e^{-j\omega t}| = 1 \neq 0$. Υποθέτοντας, περαιτέρω, ότι $\overset{\circ}{X} \neq 0$ (πράγμα αναγκαίο προκειμένου να οδηγηθούμε σε **μη τετριμμένη λύση**), η (4) παίρνει τη μορφή αλγεβρικής εξίσωσης ως προς την κυκλική συχνότητα ω (**χαρακτηριστική εξίσωση** της (1)):

$$m \cdot \omega^2 + 2bj \cdot \omega - \kappa = 0. \quad (5)$$

Οι δύο ρίζες της (5) δίδονται από τη σχέση: $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \frac{b^2}{m^2}} - \frac{b}{m}j$. (6)

Εάν $b = 0$ (**μηδενική απόσβεση**), τότε $\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\kappa/m} = \pm \omega_0$, Στην περίπτωση αυτή οι δύο συναρτήσεις

$$X_1(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_0 t}\right\} \quad \text{και} \quad X_2(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{j\omega_0 t}\right\}, \quad (7\alpha)$$

είναι **γραμμικά ανεξάρτητες** και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (1). (Να το αποδείξετε!). Κατά συνέπεια η γενική κίνηση του ταλαντωτή θα δίδεται ως υπέρθεση των δύο αυτών λύσεων:

$$X(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_0 t}\right\} + \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{j\omega_0 t}\right\} =$$

⁽⁴⁾ Να αποδείξετε την ισοδυναμία (3) \Leftrightarrow (4). Η κατεύθυνση (4) \Rightarrow (3) είναι τετριμμένη. Για την απόδειξη της (3) \Rightarrow (4) απαιτείται να αξιοποιήσετε το γεγονός ότι η (3) ισχύει για κάθε $t > t_0$.

$$= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (7\beta)$$

Η σταθερά ω_0 είναι η (κυκλική) ιδιοσυχνότητα στην περίπτωση αυτή.

Εάν $b^2 < \kappa m$ (**ασθενής απόσβεση**), τότε $\omega_1 \neq \omega_2$, και η (γενική) κίνηση του ταλαντωτή θα είναι υπέρθεση των ακόλουθων δύο συναρτήσεων:

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_1 t} \right\} \quad \text{και} \quad X_2(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-j\omega_2 t} \right\}. \quad (8)$$

(Να αποδείξετε ότι οι δύο ανωτέρω συναρτήσεις ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (1) και είναι **γραμμικά ανεξάρτητες**). Κατά συνέπεια, η γενική λύση της εξίσωσης (1) (οφείλει να) γράφεται στη μορφή

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_1 t} + \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-j\omega_2 t} \right\}. \quad (9)$$

Στην περίπτωση αυτή οι δύο ρίζες $\omega_{1,2}$, βλ. εξίσωση (6), γράφονται στη μορφή $\omega_{1,2} = \pm \tilde{\omega}_0(b) - \frac{b}{m}j$, όπου $\tilde{\omega}_0(b) \equiv \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}}$. Η γενική λύση (9) παίρνει τότε τη μορφή

$$\begin{aligned} X(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j(\tilde{\omega}_0(b) - bj/m)t} + \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-j(-\tilde{\omega}_0(b) - bj/m)t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\tilde{\omega}_0(b)t} + \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{j\tilde{\omega}_0(b)t} \right\} \cdot e^{-\frac{b}{m}t} = \\ &= \left(A \cos(\tilde{\omega}_0(b)t) + B \sin(\tilde{\omega}_0(b)t) \right) \cdot e^{-\frac{b}{m}t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Η σταθερά $\tilde{\omega}_0(b)$ παίζει τώρα το ρόλο της (κυκλικής) ιδιοσυχνότητας με την οποία μπορεί να ταλαντεύεται το σύστημά μας.

Εάν $b^2 = \kappa m$ (**κρίσιμη απόσβεση**), τότε $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{b}{m}j$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1) είναι τώρα οι

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-\frac{b}{m}t} \right\} \quad \text{και} \quad X_2(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{20} \cdot t \cdot e^{-\frac{b}{m}t} \right\}. \quad (11)$$

(Να το αποδείξετε!). Τέλος, όταν $b^2 > \kappa m$ (**υπερκρίσιμη απόσβεση**), η λύση είναι και πάλι της μορφής (9), με ρίζες $\omega_{1,2}$ καθαρά φανταστικούς αριθμούς. Θέτοντας $\omega_{1,2} = -j\beta_{1,2}$, η λύση (9) γίνεται

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-\beta_1 t} + \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-\beta_2 t} \right\}. \quad (12)$$

Από τη μορφή των λύσεων (11) και (12) είναι φανερό ότι το σύστημα δεν έχει ταλαντωτικές λύσεις. Κατά συνέπεια, στις δύο τελευταίες περιπτώσεις δεν έχει ιδιαίτερο νόημα να μιλάμε για ιδιοσυχνότητα, παρά το ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι καλώς ορισμένη.

Ερώτηση 7: Να μελετήσετε την εξαναγκασμένη ταλάντωση *απλού γραμμικού ταλαντωτή*, με τη βοήθεια των παραστατικών μιγάδων. ■

Απάντηση: Το πρόβλημα της *εξαναγκασμένης ταλάντωσης* του απλού γραμμικού ταλαντωτή διατυπώνεται ως μη-ομογενής (συνήθης) διαφορική εξίσωση, στη μορφή

$$mX''(t) + 2bX'(t) + \kappa X(t) = F(t). \quad (1)$$

Υποθέτοντας ότι τόσο η διέγερση όσο και η απόκριση είναι αρμονικές, μπορούμε να γράψουμε

$$F(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{F} \cdot e^{-j\omega t}\right\} \quad \text{και} \quad X(t) = \operatorname{Re}\left\{\overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t}\right\}. \quad (2)$$

Εισάγοντας τις αναπαραστάσεις (2) στη διαφορική εξίσωση (1), και εργαζόμενοι ως ανωτέρω, Ερώτηση 6, εύκολα βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύει η αλγεβρική εξίσωση

$$\left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa \right] \cdot \overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{F}. \quad (3)$$

Από την τελευταία υπολογίζεται αμέσως το μιγαδικό πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:

$$\overset{\circ}{X} = - \frac{\overset{\circ}{F}}{m\omega^2 - \kappa + 2j\omega b}. \quad (4)$$

Εισάγοντας την (4) στην (2), βρίσκουμε την απόκριση $X(t)$.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΠΛΟΙΟΥ ΣΕ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Κεφάλαιο 2

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | | σελ. |
|------|---|------|
| 2.1 | Γενικά | 47 |
| 2.2 | Διατύπωση του γενικού υδρομηχανικού προβλήματος αλληλεπίδρασης επιπλέοντων σωμάτων και κυματισμών. Προβλήματα περίθλασης και ακτινοβολίας | 50 |
| 2.3 | Υδροδυναμικές φορτίσεις: Φορτίσεις Froude-Krylon, φορτίσεις περίθλασης και φορτίσεις ακτινοβολίας. Γενικευμένες πρόσθετες μάζες και αποσβέσεις ακτινοβολίας | 60 |
| 2.4 | Εξισώσεις κίνησης επιπλέοντος στερεού σώματος | 64 |
| 2.5 | Η έπ' άπειρον συμπεριφορά των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης | 66 |
| 2.6 | Αναλυτικές ιδιότητες των γενικευμένων πρόσθετων μαζών, των αποσβέσεων και των υδροδυναμικών φορτίσεων | 76 |
| 2.7 | Μέθοδοι επίλυσης των υδροδυναμικών προβλημάτων ακτινοβολίας και περίθλασης | 86 |
| 2.8 | Υπολογισμοί πρόσθετων μαζών, αποσβέσεων και φορτίσεων απλών τρισδιάστατων γεωμετρικών σωμάτων | 106 |
| 2.9 | Απλοποιημένος υπολογισμός των κατακόρυφων δυνάμεων Froude-Krylon και περίθλασης. Η προσέγγιση μεγάλου μήκους κύματος (long-wave approximation) και η υπόθεση της «σχετικής ταχύτητας» του Korvin-Kroukovsky | 122 |
| 2.10 | Πρόσθετες μάζες, αποσβέσεις και φορτίσεις επιμήκων σωμάτων. Αναγωγή στο δισδιάστατο πρόβλημα. Θεωρία λωρίδων | 134 |

| | | |
|------|---|-----|
| 2.11 | Ταλαντώσεις διδιαστάτου πλωτού σώματος | 144 |
| 2.12 | Παράρτημα Κεφαλαίου 2: Γενική αναπαράσταση των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης στο κυλινδρικό χωρίο $D_{R_N R_F}$ | 160 |
| 2.13 | Ασκήσεις και Εφαρμογές | |
| 2.14 | Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2 | |

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΠΙΠΛΕΟΝΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

2.1 Γενικά

Στα πλαίσια της προσπάθειας της κατανόησης των διαφόρων φαινομένων και διαδικασιών, ο ανθρώπινος νους συχνά (συνήθως) λειτουργεί αναγωγικά. Δηλαδή, επιδιώκει να αναγνωρίσει επί μέρους στοιχεία που συνθέτουν το εξεταζόμενο φαινόμενο (διαδικασία), να τα απομονώσει και να τα μελετήσει, ανάγοντας την πολυπλοκότητα του αρχικού συστήματος σε απλούστερα στοιχεία. Η τάση αυτή (ανάλυση στα επί μέρους, αναγωγή στα στοιχεία)⁽¹⁾ είναι προφανώς απαραίτητη, τουλάχιστον στη φάση ανάλυσης και κατανόησης. Βέβαια, στη συνέχεια, απαιτείται η φάση της σύνθεσης, όπου εξετάζεται, κατανοείται και μοντελοποιείται ο τρόπος αλληλεπίδρασης των στοιχείων, έτσι ώστε να ερμηνευθεί (αναπαραχθεί) η λειτουργία του αρχικού συστήματος. Η επιστήμη και η Τεχνολογία αναπτύσσονται κατά κανόνα μέσα από την αλληλουχία τέτοιων φάσεων ανάλυσης και σύνθεσης, διεισδύοντας σε ολοένα πιο περίπλοκα φαινόμενα και δημιουργώντας ολοένα πιο σύνθετα συστήματα.

Παρά τον αναπόδραστο χαρακτήρα των φάσεων της ανάλυσης και της σύνθεσης, υπάρχουν ορισμένα κρίσιμα ερωτήματα σχετικά με τη «νομιμότητα» (εφαρμοσιμότητα) αυτής της μεθοδολογίας, τουλάχιστον σε μερικές περιπτώσεις. Ιστορικά, η πρώτη σοβαρή αντίρρηση όσον αφορά τη «νομιμότητα» του αναγωγισμού αναφέρεται σε σχέση με τη μελέτη βιολογικών συστημάτων (έμβιων όντων): Είναι δυνατόν να κατανοηθούν οι λειτουργίες της ζωής, από τη μελέτη των κυττάρων, όταν εξετάζουμε τα τελευταία αποκομμένα από το όλο έμβιο όν; Σήμερα μπορούμε να θέσουμε αντίστοιχα ερωτήματα και σε σχέση με διάφορα πολύπλοκα τεχνολογικά και τεχνοκοινωνικά συστήματα, όπως είναι τα δίκτυα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας (που εκτείνονται σε πολλές χώρες), ή το διαδύκτιο (internet), που λειτουργεί σε παγκόσμια κλίμακα.

Δεν επιθυμούμε να εμπλακούμε εδώ στη φιλοσοφική συζήτηση εάν η λειτουργία ενός περίπλοκου συστήματος είναι ή δεν είναι δυνατόν (ανεξαρτήτως κόπου και χρόνου) να αναχθεί με σαφή τρόπο στις ιδιότητες και τις επί μέρους λειτουργίες των συστατικών του στοιχείων. Ανεξαρτήτως της σημασίας και της βαθύτητας του ερωτήματος αυτού, μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζήτημα από μια άλλη σκοπιά, θέτοντας το ακόλουθο «πρακτικό» ερώτημα. Υπάρχει, μήπως, κάποια άλλη μεθοδολογία προσέγγισης και μελέτης των φαινομένων και των διαδικασιών, η οποία αποφεύγει – σε κάποιο βαθμό – τον αναγωγισμό; Η Γενική Θεωρία Συστημάτων, που αναπτύχθηκε θεαματικά το δεύτερο ήμισυ του 20^{ου} αιώνα, μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσπάθεια υπέρβασης του αναγωγισμού, και ανάπτυξης «ολιστικών» θεωρήσεων και μεθοδολογιών⁽²⁾, που δίδουν έμφαση στη συνολική συγκρότηση και στη λειτουργική ενότητα των εξεταζόμενων συστημάτων.

⁽¹⁾ Η τάση αυτή, θεωρούμενη στη γενικότητά της, ονομάζεται «αναγωγισμός» (αγγλικά, reductionism).

⁽²⁾ Χωρίς βεβαίως, να εγκαταλείπεται η κλασσική διαδικασία της ανάλυσης.

Ας θεωρήσουμε ένα (απολύτως απαραμόρφωτο) στερεό σώμα $[\Sigma]$ που επιπλέει⁽³⁾ στην ελεύθερη επιφάνεια ∂D_F υγρού (βλ. Σχήμα 1). Θεωρούμε ότι το σώμα $[\Sigma]$ ούτε ρυμουλκείται ούτε αυτοπροωθείται, με συνέπεια η μέση θέση του να είναι σταθερή στο χώρο. Υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι αυτή η μέση θέση είναι μία θέση *ευσταθούς υδροστατικής ισορροπίας*, και ότι το σώμα $[\Sigma]$ εκτελεί κινήσεις *μικρού πλάτους* γύρω από αυτήν, οι οποίες διεγείρονται είτε από ένα προσπίπτοντα απλό αρμονικό κυματισμό, είτε από άλλες εξωτερικές δυνάμεις, είτε και από τις δύο αυτές αιτίες ταυτόχρονα.

Το υγρό που περιρρέει το σώμα $[\Sigma]$ θεωρείται, ως συνήθως, *ατριβές και ασυμπίεστο*, και η κίνηση του *αστρόβιλη, άκυκλη*⁽⁴⁾ και *μικρού πλάτους*. Η υπόθεση του ατριβούς (μη-συνεκτικού) υγρού αποτελεί μια σοβαρή απλοποίηση του προβλήματος, εφ' όσον μας επιτρέπει να αποφύγουμε τη χρήση των εξισώσεων Navier-Stokes και, αντ' αυτών, να χρησιμοποιήσουμε την κατά πολύ απλούστερη θεωρία δυναμικού (potential flow). Από την άποψη της ορθότητας των λαμβανομένων αποτελεσμάτων, η απλοποίηση αυτή είναι ικανοποιητική σε πολλές περιπτώσεις χρονικώς μεταβαλλόμενων (π.χ. ταλαντευόμενων) ροών με ελεύθερη επιφάνεια. Εδικά στην περίπτωση της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου σε κυματισμούς, η ανωτέρω υπόθεση οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα για όλες τις κινήσεις του πλοίου πλην του διατοιχισμού (roll).

Όσον αφορά τη γεωμετρική μορφολογία του εξεταζόμενου υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$ ⁽⁵⁾, σημειώνουμε ότι το σχήμα του στερεού σώματος μπορεί να είναι εντελώς γενικό, ενώ το πεδίο ροής D υποτίθεται ότι περιορίζεται από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού ∂D_F , τη βρεχόμενη επιφάνεια του στερεού ∂D_B , και τον πυθμένα ∂D_{Π} , ενώ επεκτείνεται στο άπειρο προς όλες τις οριζόντιες κατευθύνσεις. Ο πυθμένας θεωρείται οριζόντιος και ταυτίζεται με το επίπεδο $[x_3 = -h]$. Σε περιπτώσεις όπου το βάθος h είναι μεγαλύτερο του ημίσεως (και πλέον) του μήκους κύματος ($h > \lambda/2$), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $h = \infty$, δηλαδή ότι το βάθος του υγρού είναι άπειρο (γιατί;). Η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται εκτενώς στην ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίων και πλωτών κατασκευών στην ανοικτή θάλασσα, η οποία σχεδόν πάντοτε θεωρείται απείρου βάθους (χωρίς αυτό να συνεπάγεται κάποιο σφάλμα, όσον αφορά τις αποκρίσεις σε επιφανειακούς κυματισμούς).

Στη πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου θα μελετήσουμε διεξοδικά τις (χρονικά) αρμονικές *φορτίσεις (δυνάμεις και ροπές)* που αναπτύσσονται επί ταλαντευόμενου επιπλέοντος σώματος από το περιρρέον υγρό, και θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος στο πεδίο συχνοτήτων. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το πλάτος των κινήσεων και των ταχυτήτων είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε να είναι επιτρεπτή η *γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης* του στερεού και του περιρρέοντος υγρού. Υπό αυτούς τους όρους ισχύει η αρχή της γραμμικής υπέρθεσης, η οποία μας επιτρέπει να αποσυνθέσουμε το δυναμικό ταχύτητας σε *δυναμικό περίθλασης* και *δυναμικό ακτινοβολίας*. Για τα επί μέρους αυτά

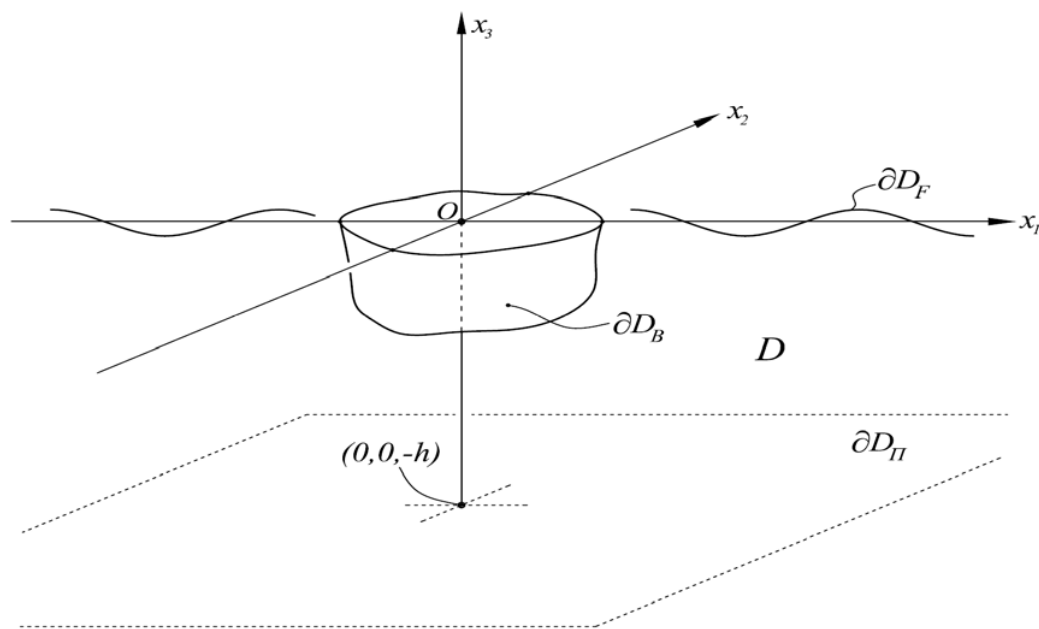
⁽³⁾ Η ανάλυση που ακολουθεί εφαρμόζεται και σε σώματα βυθισμένα, υπό την προϋπόθεση ότι η μέση θέση τους είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

⁽⁴⁾ Η υπόθεση αυτή χρειάζεται όταν το πεδίο ροής δεν είναι απλά συνεκτικό σημειοσύνολο.

⁽⁵⁾ Με το σύμβολο $[\Sigma + Y + EE]$ υποδηλώνουμε το πλήρες υδρομηχανικό σύστημα, που αποτελείται από το σώμα $[\Sigma]$ και το περιρρέον υγρό (Y) με την ελεύθερη επιφάνεια (EE).

δυναμικά διατυπώνονται προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία επιλύσιμα οδηγούν στον προσδιορισμό των υδροδυναμικών δυνάμεων. Τα προβλήματα αυτά δυστυχώς δεν επιλύονται αναλυτικά (δηλαδή με τη βοήθεια απλών κλειστών τύπων) ούτε για τις απλούστερες δυνατές γεωμετρίες επιπλέοντων σωμάτων (π.χ. σφαίρα), και άρα – για να παράγουμε αριθμητικά αποτελέσματα- απαιτείται χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Επίσης, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ορισμένες σημαντικές αναλυτικές ιδιότητες των υδροδυναμικών δυνάμεων, και θα παρουσιάσουμε την ενεργειακή ερμηνεία τους.

Οι εξισώσεις κίνησης του υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$, που παράγονται στο κεφάλαιο αυτό, αποτελούν τη βάση για την *αναλυτική πρόβλεψη των δυναμικών αποκρίσεων πλοίων και άλλων πλωτών θαλάσσιων κατασκευών (συστημάτων) σε πραγματικούς θαλάσσιους κυματισμούς*, οι οποίοι, όπως γνωρίζουμε, προσομοιώνονται με στοχαστικές διαδικασίες.



Σχήμα 1: Γεωμετρική μορφολογία του υδρομηχανικού συστήματος – Συμβολισμοί

2.2 Διατύπωση του γενικού υδρομηχανικού προβλήματος αλληλεπίδρασης επιπλέοντων σωμάτων και κυματισμών. Προβλήματα περίθλασης και ακτινοβολίας

Σκοπός αυτού του εδαφίου είναι να μελετήσουμε τις υδροδυναμικές δυνάμεις που αναπτύσσονται πάνω σ' ένα στερεό σώμα το οποίο ταλαντεύεται γύρω από μια σταθερή μέση θέση, πάνω (ή κοντά) στην ελεύθερη επιφάνεια, σε αλληλεπίδραση με απλούς αρμονικούς κυματισμούς. Προς τούτο, πρέπει να μελετήσουμε το πεδίο ροής του περιρρέοντος υγρού.

Αγνοώντας τη συνεκτικότητα και υποθέτοντας αστρόβιλη ροή (potential flow), το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ⁽¹⁾ εκφράζεται με τη βοήθεια ενός δυναμικού ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$ από τη σχέση

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

όπου D είναι το γεωμετρικό χωρίο που καταλαμβάνεται από το υγρό.

Εάν $p^{(Y\Delta)} = p^{(Y\Delta)}(\mathbf{x}, t)$ είναι η *υδροδυναμική πίεση* που ασκείται πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος ∂D_B , οι αναπτυσσόμενες υδροδυναμικές φορτίσεις (δυνάμεις και ροπές) δίδονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{F}^{(Y\Delta)} = \iint_{\partial D_B} p^{(Y\Delta)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS_B, \quad (2\alpha)$$

$$\mathbf{K}^{(Y\Delta)} = \iint_{\partial D_B} p^{(Y\Delta)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS_B. \quad (2\beta)$$

(Εφ' όσον το πεδίο ροής υποτίθεται μη-συνεκτικό, η παρούσα μοντελοποίηση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε φορτίσεις οφειλόμενες σε ορθές τάσεις -την πίεση, δηλαδή- αλλά όχι φορτίσεις που οφείλονται σε διατμητικές τάσεις, δηλαδή δυνάμεις τριβής.)

Οι δύο ανωτέρω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε ενιαία μορφή (πρβλ. εξισώσεις (21,22, εδάφιο 1.6)) με τη βοήθεια του *γενικευμένου* (εξαδιάστατου) «καθέτου» *διανύσματος* $\underline{n} = (n_k)_{k=1(1)6}$, το οποίο ορίζεται ως εξής: n_1, n_2, n_3 είναι οι τρεις συνιστώσες του (συνήθους) καθέτου διανύσματος \mathbf{n} , και n_4, n_5, n_6 είναι οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} n_4 &= r_2 n_3 - r_3 n_2, \\ n_5 &= r_3 n_1 - r_1 n_3, \\ n_6 &= r_1 n_2 - r_2 n_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Με τη βοήθεια του (n_k) , $k = 1, 2, \dots, 6$, οι σχέσεις (2α,β) ενοποιούνται στη μορφή:

$$F_k^{(Y\Delta)} = \iint_{\partial D_B} p^{(Y\Delta)}(\mathbf{x}, t) n_k dS_B, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (2\gamma)$$

⁽¹⁾ Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο \mathbf{x} για να δηλώσουμε το γενικό πεδιακό σημείο μέσα στο πεδίο ροής. Δηλαδή $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Περαιτέρω, δεδομένου ότι οι κινήσεις και οι ταχύτητες όλων των σημείων του συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$ υποτίθενται μικρού πλάτους, προχωρούμε στη γραμμικοποίηση και των υδροδυναμικών εξισώσεων, σε συμφωνία με την αντίστοιχη γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης του στερεού σώματος (εδάφιο 1.6). Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, η υδροδυναμική πίεση $p^{(Y\Delta)} = p^{(Y\Delta)}(\mathbf{x}, t)$ εκφράζεται μέσω του δυναμικού ταχύτητας από τη σχέση

$$p^{(Y\Delta)} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv -\rho \dot{\Phi}, \quad (2) \quad (4)$$

οπότε οι υδροδυναμικές φορτίσεις (2γ), που ασκούνται πάνω στο επιπλέον σώμα από το περιρρέον υγρό, δίνονται από τη σχέση:

$$F_k^{(Y\Delta)} = -\rho \iint_{\partial D_B} \dot{\Phi} n_k dS_B, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (5)$$

όπου –λόγω της γραμμικοποίησης- ∂D_B είναι πλέον η **μέση θέση της βρεχόμενης επιφάνειας του σώματος**.

Θα δώσουμε τώρα την ακριβή μαθηματική διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος από το οποίο προκύπτει το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$, και άρα και οι υδροδυναμικές φορτίσεις (5). Ας σημειωθεί ότι στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχονται **δύο άγνωστα πεδία**: εφ' ενός το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$ και, αφ' ετέρου, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta(x_1, x_2, t)$. Επίσης στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχονται και άγνωστες θέσεις και ταχύτητες του επιπλέοντος σώματος.

Τα δύο άγνωστα πεδία $\Phi(\mathbf{x}, t)$ και $\eta(x_1, x_2, t)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

- Στο **εσωτερικό του πεδίου ροής** $D = D(\eta)$, το δυναμικό $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ικανοποιεί την **εξίσωση Laplace**, η οποία εκφράζει τη συνέχεια (διατήρηση μάζας) και το αστρόβιλο του πεδίου ροής:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (6a)$$

- Στην **βρεχόμενη επιφάνεια** ∂D_B του επιπλέοντος σώματος ισχύει η **συνθήκη συνέχειας των κάθετων ταχυτήτων** υγρού-στερεού σώματος (συνθήκη μη-εισχώρησης):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \sum_{k=1}^6 \dot{\xi}_k n_k, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B. \quad (6b)$$

- Στην **ελεύθερη επιφάνεια** ∂D_F , εφαρμόζονται δύο οριακές συνθήκες: η **δυναμική συνθήκη** (πίεση = σταθερή), η οποία μετά τη γραμμικοποίησή της γράφεται στη μορφή

$$\dot{\Phi} + g\eta = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (6\gamma')$$

(²) Γενικότερα έχουμε $p^{(Y\Delta)} = -\rho \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \rho |\nabla \Phi|^2$, αλλά ο τετραγωνικός όρος παραλείπεται λόγω γραμμικοποίησης.

και η **κινηματική συνθήκη** (κάθετη ταχύτητα της επιφάνειας = κάθετη ταχύτητα των επιφανειακών στοιχείων του ρευστού), η οποία μετά τη γραμμικοποίησή της παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \dot{\eta}, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0. \quad (6\gamma'')$$

Απαλείφοντας την ανύψωση $\eta(x_1, x_2, t)$ από τις (6γ') και (6γ'') παίρνουμε την

$$\ddot{\Phi} + g\Phi_{,3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0 \quad (6\gamma)$$

- **Στον πυθμένα** ∂D_{Π} , το δυναμικό $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ικανοποιεί τη **συνθήκη μη-εισχώρησης**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (6\delta)$$

Οι παραπάνω συνθήκες πρέπει να συμπληρωθούν και από μία κατάλληλη «**έπ' άπειρον συνθήκη**», η οποία περιγράφει τη συμπεριφορά του δυναμικού $\Phi(\mathbf{x}, t)$, σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα, δηλαδή όταν $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Η συνθήκη αυτή εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος που εξετάζουμε, και είναι ποιοτικού χαρακτήρα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η **έπ' άπειρον** συμπεριφορά του δυναμικού $\Phi(\mathbf{x}, t)$ είναι καθοριστικής σημασίας για τις υδροδυναμικές φορτίσεις που ασκούνται πάνω στο σώμα $[\Sigma]$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ανωτέρω, στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το **χρονικά αρμονικό πρόβλημα**, όπου το όλο υδρομηχανικό σύστημα $[\Sigma + Y + EE]$ ταλαντεύεται αρμονικά με συχνότητα ω . Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \text{Re}_j \left\{ \dot{\Phi}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right\}, \quad (7)$$

όπου η συνάρτηση $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ παίζει το ρόλο του μιγαδικού πλάτους του χρονικά αρμονικού μεγέθους, εδώ του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Υπενθυμίζεται ότι το μέγεθος $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ είθισται παραδοσιακά (σε συγκεκριμένες περιοχές των επιστημών μηχανικού) να ονομάζεται **παραστατικός μιγάδας** της ποσότητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Ας σημειωθεί ότι η (7) δεν είναι παρά μία (πολύ βολική) συντομογραφία της σχέσης

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_C(\mathbf{x}) \cos \omega t + \Phi_S(\mathbf{x}) \sin \omega t. \quad (8)$$

Παρόμοιες αναπαραστάσεις, μέσω παραστατικών μιγάδων, θα χρησιμοποιήσουμε και για όλα τα άλλα μεγέθη που μεταβάλλονται αρμονικά με το χρόνο, π.χ.

$$p(\mathbf{x}, t) = \text{Re}_j \left\{ \dot{p}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right\}, \quad (9\alpha)$$

(³) Οι οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας εφαρμόζονται κατ' αρχήν **πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια**, δηλαδή στα σημεία $\mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = \eta(x_1, x_2, t)$. Μετά τη γραμμικοποίηση, όμως, οι συνθήκες αυτές αναφέρονται –κατά προσέγγιση– στη **μέση θέση της ελεύθερης επιφάνειας** $\mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0$.

$$\eta(x_1, x_2, t) = \operatorname{Re}_j \left\{ \dot{\eta}(x_1, x_2) e^{j\omega t} \right\}, \quad (9\beta)$$

$$\xi_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{\xi}_k e^{j\omega t} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (9\gamma)$$

κ.λπ.

Εισάγοντας τις αναπαραστάσεις (7) και (9) στις εξισώσεις (6α) έως (6δ) βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για το δυναμικό $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\Phi}_{,11} + \dot{\Phi}_{,22} + \dot{\Phi}_{,33} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (10\alpha)$$

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n} = \sum_{k=1}^6 j\omega \dot{\xi}_k n_k, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (10\beta)$$

$$\mu \dot{\Phi} - \dot{\Phi}_{,33} = 0, \quad \mu = \omega^2 / g, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (10\gamma)$$

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{II}. \quad (10\delta)$$

Οι συνθήκες αυτές πρέπει να συμπληρωθούν από την κατάλληλη *έπ' άπειρον συμπεριφορά του* $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$, πράγμα που θα γίνει στη συνέχεια.

Από τη συνθήκη γάστρας (10β) φαίνεται ότι το πεδιακό δυναμικό $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ είναι συζευγμένο με τις κινήσεις $\dot{\xi}_k$ του επιπλέοντος σώματος. Από την άλλη μεριά, οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης (5, εδάφιο 1.7) του σώματος $[\Sigma]$, οι οποίες με τη βοήθεια των παραστατικών μιγάδων παίρνουν τη μορφή

$$(j\omega)^2 \underline{M} \cdot \dot{\underline{\xi}} + \underline{C} \dot{\underline{\xi}} = \dot{\underline{F}} + \dot{\underline{F}}^{(Y\Delta)}, \quad (11)$$

είναι συζευγμένες με το πεδιακό δυναμικό $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ μέσω των υδροδυναμικών δυνάμεων $\dot{F}^{(Y\Delta)}$, εξίσωση (5).

Οι εξισώσεις (10) και (11), από κοινού, αποτελούν ένα πλήρες σύστημα συζευγμένων εξισώσεων ως προς το δυναμικό $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ και τις κινήσεις $\dot{\xi}_k$, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της χρονικά αρμονικής ταλαντωτικής κίνησης του υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, με τη βοήθεια μιας κατάλληλης γραμμικής αποσύνθεσης του δυναμικού $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$, είναι δυνατόν να αποσυζεύξουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος (11) από τις υδροδυναμικές εξισώσεις (10), εκφράζοντας την υδροδυναμική αλληλεπίδραση μέσω *υδροδυναμικών συντελεστών που είναι ανεξάρτητοι της κίνησης του σώματος*. Η κατανόηση της αποσύνθεσης αυτής και ο ακριβής ορισμός (και τελικώς, ο υπολογισμός) των υδροδυναμικών συντελεστών είναι ο κύριος σκοπός του παρόντος κεφαλαίου.

Η γραμμικότητα των εξισώσεων (10) και η μορφή της συνθήκης γάστρας (10β) μας οδηγούν να εισάγουμε την ακόλουθη γραμμική αποσύνθεση για το δυναμικό $\dot{\Phi}(\mathbf{x})$:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}) = \dot{\Phi}^*(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^6 j\omega \dot{\xi}_k \dot{\Phi}_k(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Το (ανεξάρτητο των κινήσεων $\dot{\xi}_k$) δυναμικό $\dot{\Phi}^*(\mathbf{x})$ περιλαμβάνεται στην αποσύνθεση (12) διότι η ύπαρξη της ελεύθερης επιφάνειας δίδει τη δυνατότητα να διαδίδονται κυματισμοί **ακόμη και όταν το σώμα $[\Sigma]$ είναι («κρατείται») ακίνητο!** Έτσι, το δυναμικό $\dot{\Phi}^*(\mathbf{x})$ περιλαμβάνει το δυναμικό του **προσπίπτοντος** (αδιατάρακτου) **κυματισμού**, καθώς και το **δυναμικό περίθλασης** (diffraction or scattering potential), το οποίο περιγράφει την «αλλοίωση» του προσπίπτοντος κυματισμού λόγω της παρουσίας του ακίνητου («κρατημένου» στη μέση θέση του) σώματος.

Για να γίνουν καλύτερα κατανοητά, από φυσική σκοπιά, τα διάφορα κυματικά πεδία που αναπτύσσονται και εμπλέκονται στο φαινόμενο της αλληλεπίδρασης επιπλέοντος σώματος και επιφανειακών κυματισμών, θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις ακόλουθες δύο ειδικές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης:

- 1) Περίθλαση απλού, προοδευτικού, αρμονικού κυματισμού από το σώμα $[\Sigma]$ όταν το τελευταίο «κρατείται» ακίνητο στη μέση θέση του (**το πρόβλημα της περίθλασης**), και
- 2) Εξαναγκασμένη ταλάντωση του σώματος $[\Sigma]$ πάνω σε μία αδιατάρακτη -από άλλη αιτία- ελεύθερη επιφάνειας (**το πρόβλημα της ακτινοβολίας**).

- Το πρόβλημα της περίθλασης (diffraction problem)

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχήν ότι έχουμε μόνο το υγρό, χωρίς επιπλέον σώμα μέσα σ' αυτό, και ότι δια μέσου του υγρού διαδίδεται ένας απλός, αρμονικός, προοδευτικός κυματισμός. Εάν η γωνία της φασικής ταχύτητας \mathbf{C} του κυματισμού και του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{i}_1 είναι β (βλ. Σχήμα 1), τότε το δυναμικό $\Phi_I(x, t)$ του κυματισμού δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_I(\mathbf{x}, t) = \text{Re}_j \left\{ \dot{\Phi}_I(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right\}, \quad (13)$$

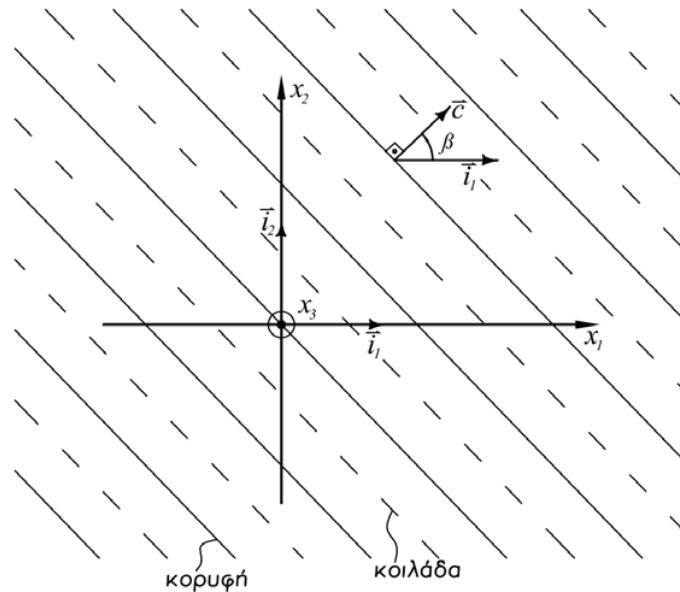
όπου

$$\dot{\Phi}_I(\mathbf{x}) = \frac{jgA}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \exp[-j(k_0 \cos\beta \cdot x_1 + k_0 \cdot \sin\beta \cdot x_2)],$$

ή, θέτοντας

$$\mathbf{k}_0 = k_0(\cos\beta \mathbf{i}_1 + \sin\beta \mathbf{i}_2), \quad \text{και} \quad \mathbf{R} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + 0 \mathbf{i}_3, \quad (14)$$

$$\dot{\Phi}_I(\mathbf{x}) = \frac{jgA}{\omega} \cdot \frac{\cosh k_0(x_3 + h)}{\cosh k_0 h} \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}), \quad (15)$$



Σχήμα 1: Προσπίπτων αρμονικός κυματισμός. Γεωμετρική μορφολογία και συμβολισμοί

όπου A είναι το πλάτος του κυματισμού⁽⁴⁾, h είναι το βάθος του υγρού, και k_0 είναι ο αριθμός κύματος (κυματικός αριθμός)⁽⁵⁾, που ορίζεται ως (η μοναδική) θετική ρίζα της εξίσωσης

$$\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 h). \quad (16)$$

Το μέγεθος \mathbf{k}_0 (βλ. εξίσωση (14)) ονομάζεται **διανυσματικός αριθμός κύματος**. Το διάνυσμα \mathbf{k}_0 έχει (εξ ορισμού) κατεύθυνση και φορά τις ίδιες με αυτές της φασικής ταχύτητας \mathbf{C} του κυματισμού, και μέτρο ίσο με k_0 .

Στην περίπτωση του βαθιού νερού ($h > \lambda/2$) η έκφραση (15) απλουστεύεται στην

$$\dot{\Phi}_I(\mathbf{x}) = \frac{jgA}{\omega} \cdot \exp(k_0 x_3 - j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}) \quad (17)$$

όπου $k_0 = \omega^2 / g$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εισάγουμε το σώμα $[\Sigma]$ στο υγρό και το «κρατάμε» ακίνητο στη μέση θέση του ∂D_B , $\left(\dot{\xi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,6 \right)$. Είναι φανερό ότι **η παρουσία του σώματος θα προκαλέσει μία «παραμόρφωση» των κυματισμών**, στην περιλαμβάνεται, μεταξύ άλλων,

⁽⁴⁾ Ακριβέστερα το μέτρο του A είναι το πλάτος του κυματισμού. Γενικά μπορεί να έχουμε $A = |A| \cdot \exp(j\delta)$, οπότε η ποσότητα δ αλλάζει απλώς τη φάση του κυματισμού.

⁽⁵⁾ Υπενθυμίζεται ότι ο **κυματικός αριθμός** k_0 συνδέεται με το **μήκος κύματος** με τη σχέση: $k_0 = 2\pi / \lambda$

και μια μερική «ανάκλαση» τους. Βέβαια, ανάκλαση, με την έννοια της γεωμετρικής κυματικής, θα έχουμε μόνο όταν το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κυματισμού είναι μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος $[\Sigma]$ και την καμπυλότητα της ισάλου. Στην περίπτωση όπου **το μήκος κύματος και οι διαστάσεις του σώματος είναι συγκρίσιμες** (και η οποία κυρίως μας ενδιαφέρει) **το φαινόμενο είναι πιο περίπλοκο και ονομάζεται περίθλαση** (diffraction). Το δυναμικό αυτού του δευτερογενούς πεδίου, των περιθλώμενων κυματισμών, ονομάζεται δυναμικό περίθλασης (diffraction potential) και θα συμβολίζεται με $\Phi_D(\mathbf{x}, t)$. Αρκετό χρόνο μετά την εισαγωγή του σώματος στο υγρό, οπότε τα μεταβατικά φαινόμενα θα έχουν αποσβεσθεί, το δυναμικό περίθλασης μπορεί να θεωρηθεί ως μία χρονικά αρμονική συνάρτηση, της ίδιας συχνότητας με τον προσπίπτοντα κυματισμό (λόγω της γραμμικότητας):

$$\Phi_D(\mathbf{x}, t) = \text{Re}_j \left\{ \dot{\Phi}_D(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right\}. \quad (18)$$

Τότε, το συνολικό πεδιακό δυναμικό θα δίνεται από την σχέση:

$$\dot{\Phi}^*(\mathbf{x}) = \dot{\Phi}_I(\mathbf{x}) + \dot{\Phi}_D(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Δεδομένου ότι το δυναμικό $\dot{\Phi}^*(\mathbf{x})$ πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (10) με $\xi_k = 0$, $k=1,2,\dots,6$, και ότι το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού $\dot{\Phi}_I(\mathbf{x})$ ικανοποιεί τις (10α,γ,δ), προκύπτει αμέσως ότι το δυναμικό περίθλασης $\dot{\Phi}_D(\mathbf{x})$ οφείλει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\dot{\Phi}_{D,11} + \dot{\Phi}_{D,22} + \dot{\Phi}_{D,33} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (20\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\dot{\Phi}_I + \dot{\Phi}_D \right) = 0, \quad \text{ήτοι} \quad \frac{\partial \dot{\Phi}_D}{\partial n} = -\frac{\partial \dot{\Phi}_I}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (20\beta)$$

$$\mu \dot{\Phi}_D - \dot{\Phi}_{D,3} = 0, \quad \mu = \omega^2 / g, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (20\gamma)$$

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_D}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{\Pi}. \quad (20\delta)$$

Η έπ' άπειρον συμπεριφορά του $\dot{\Phi}_D(\mathbf{x})$ υποβάλλεται από τον τρόπο παραγωγής των περιθλώμενων κυματισμών:

$$\text{Σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα το } \dot{\Phi}_D(\mathbf{x}) \text{ πρέπει να έχει τη μορφή} \quad (20\epsilon) \\ \text{απομακρυνόμενων κυλινδρικών κυματισμών, συχνότητας } \omega \text{ }^{(6)}.$$

Η ακριβής ασυμπτωτική έκφραση του $\dot{\Phi}_D(\mathbf{x})$ σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα $[\Sigma]$ θα δοθεί στο εδάφιο ??.

- Το πρόβλημα ακτινοβολίας (radiation problem)

⁽⁶⁾ Το γεγονός ότι αυτή η, φυσικής προέλευσης, έπ' άπειρον συνθήκη είναι συμβιβαστή με τις (20α,γ,δ) δεν είναι κατά κάποια έννοια αναλυτικά προφανές, και πρέπει να αποδειχτεί (βλ. εδάφιο ??).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το επιπλέον σώμα $[\Sigma]$ εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις συχνότητας ω και (μιγαδικού) πλάτους

$$\dot{\xi}_k = \left| \dot{\xi}_k \right| \exp(j\varepsilon_k), \quad k=1,2,\dots,6, \quad (21)$$

πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια ενός αδιατάρακτου – από άλλη αιτία – υγρού. Αρκετό χρόνο μετά την έναρξη της κίνησης του σώματος, οπότε τα μεταβατικά φαινόμενα θα έχουν αποσβεσθεί, το περιρρέον υγρό θα εκτελεί μία ταλαντωτική κίνηση με την ίδια συχνότητα ω (λόγω της γραμμικότητας). Το συνολικό δυναμικό $\Phi_R(\mathbf{x}, t)$ της προκύπτουσας ροής (διεγειρόμενης αποκλειστικά από τις κινήσεις του σώματος) θα είναι τότε μία χρονικά αρμονική συνάρτηση της μορφής

$$\Phi_R(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}_j \left\{ \dot{\Phi}_R(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \right\}, \quad (22)$$

όπου $\dot{\Phi}_R(\mathbf{x})$ ο παραστατικός μιγάδας του μεγέθους $\Phi_R(\mathbf{x}, t)$.

Σύμφωνα με τα όσα ελέχθησαν ανωτέρω, το δυναμικό $\dot{\Phi}_R(\mathbf{x})$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (10), ενώ σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα θα έχει τη μορφή απομακρυνόμενων κυλινδρικών αρμονικών κυματισμών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μέσω των κυματισμών αυτών απάγεται προς το άπειρο («ακτινοβολείται») ενέργεια. Γι' αυτό το λόγο το δυναμικό $\dot{\Phi}_R(\mathbf{x})$ λέγεται (συνολικό) δυναμικό ακτινοβολίας (radiation potential).

Η μορφή της συνθήκης γάστρας (10β), σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι το υγρό δεν διεγείρεται σε κίνηση από καμιά άλλη αιτία εκτός από την ταλάντωση του σώματος $[\Sigma]$, υποβάλλουν την ακόλουθη γραμμική αποσύνθεση του δυναμικού ακτινοβολίας $\dot{\Phi}_R(\mathbf{x})$:

$$\dot{\Phi}_R(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^6 j\omega \dot{\xi}_k \dot{\Phi}_k(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Εισάγοντας την (23) στην (10β) βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^6 \dot{\xi}_k \left(\frac{\partial \dot{\Phi}_k}{\partial n} - n_k \right) = 0,$$

η οποία, εφαρμοζόμενη για $\dot{\xi}_k = 1$ και $\dot{\xi}_\ell = 0$, $\ell \neq k$, οδηγεί στις

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_k}{\partial n} = n_k, \quad k=1,2,\dots,6, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B.$$

Κατά συνέπεια, τα δυναμικά $\dot{\Phi}_k(\mathbf{x})$, τα οποία θα ονομάζονταν (επί μέρους) δυναμικά ακτινοβολίας θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\mathring{\Phi}_{k,11} + \mathring{\Phi}_{k,22} + \mathring{\Phi}_{k,33} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (24\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathring{\Phi}_k}{\partial n} = n_k, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (24\beta)$$

$$\mu \mathring{\Phi}_k - \mathring{\Phi}_{k,3} = 0, \quad \mu = \omega^2 / g, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (24\gamma)$$

$$\frac{\partial \mathring{\Phi}_k}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{II}, \quad (24\delta)$$

και

Σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα το $\mathring{\Phi}_k(\mathbf{x})$ παίρνει τη μορφή
 απομακρυνόμενων κυλινδρικών κυματισμών, συχνότητας ω . (24ε)

- Το γενικό πρόβλημα

Ας επανέλθουμε τώρα στη γενική περίπτωση όπου έχουμε ένα *ελεύθερα επιπέδον σώμα* $[\Sigma]$ *πάνω στο οποίο προσπίπτει ένας απλός, προοδευτικός, αρμονικός κυματισμός*. Τότε, θα συμβούν ταυτόχρονα τα φαινόμενα της περίθλασης του προσπίπτοντος κυματισμού λόγω της παρουσίας του σώματος, και της ακτινοβολίας πρόσθετων κυματισμών λόγω των ταλαντωτικών κινήσεων που θα εκτελέσει το σώμα. Κατά συνέπεια, και σύμφωνα με τα όσα ελέχθησαν προηγουμένως για τα προβλήματα περίθλασης και ακτινοβολίας, το συνολικό δυναμικό $\mathring{\Phi}(\mathbf{x})$ του αναπτυσσόμενου γύρω από το σώμα πεδίου ροής θα είναι της μορφής:

$$\mathring{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathring{\Phi}_I(\mathbf{x}) + \mathring{\Phi}_D(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^6 j\omega \xi_k \mathring{\Phi}_k(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Πριν προχωρήσουμε εισάγουμε την ακόλουθη τροποποίηση του συμβολισμού. Θέτουμε:

$$\mathring{\Phi}_I(\mathbf{x}) = j\omega A \mathring{\Phi}_0(\mathbf{x}), \quad (26\alpha)$$

$$\mathring{\Phi}_D(\mathbf{x}) = j\omega A \mathring{\Phi}_d(\mathbf{x}), \quad (26\beta)$$

και παραλείπουμε (όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης) τους μικρούς κύκλους πάνω από τα σύμβολα των παραστατικών μιγάδων των δυναμικών, των κινήσεων του σώματος, και των άλλων χρονικά αρμονικών ποσοτήτων. Τότε η σχέση (25) γράφεται στη μορφή

$$\Phi(\mathbf{x}) = j\omega A (\Phi_0(\mathbf{x}) + \Phi_d(\mathbf{x})) + \sum_{k=1}^6 j\omega \xi_k \Phi_k(\mathbf{x}) \quad (27\alpha)$$

ή

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} j\omega \xi_{\lambda} \Phi_{\lambda}(\mathbf{x}), \quad \lambda \in \{0, d, 1, 2, \dots, 6\}, \quad (27\beta)$$

όπου $\xi_0 = \xi_d = A$.

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, η διατύπωση των εξισώσεων (20) και (24), που ικανοποιούν τα δυναμικά περίθλασης και ακτινοβολίας, ενοποιείται ως εξής:

$$\Phi_{\ell,11} + \Phi_{\ell,22} + \Phi_{\ell,33} = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (28\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial n} = n_\ell, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (28\beta)$$

$$\mu \Phi_\ell - \Phi_{\ell,3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0 \quad (28\gamma)$$

$$\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_\Pi. \quad (28\delta)$$

Σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα ($R \rightarrow \infty$) το δυναμικό $\Phi_\ell(\mathbf{x})$ συμπεριφέρεται ως απομακρυνόμενος, αρμονικός, κυλινδρικός κυματισμός συχνότητας ω , (28ε)

όπου $\ell \in \{d, 1, 2, \dots, 6\}$,

$$\text{και } n_d = -\Phi_{0,1}n_1 - \Phi_{0,2}n_2 - \Phi_{0,3}n_3, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (28\sigma\tau)$$

Η ακριβής μορφή της έπ' άπειρον συνθήκης (28ε) θα δοθεί στο εδάφιο ??.

Από τις εξισώσεις (28) προκύπτουν τα ακόλουθα χρήσιμα συμπεράσματα για τα δυναμικά ακτινοβολίας και περίθλασης:

Σ1) Τα δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell \in \{d, 1, 2, \dots, 6\}$, είναι **ανεξάρτητα από τις κινήσεις** ξ_k του επιπλέοντος σώματος.

Σ2) Τα δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell \in \{d, 1, 2, \dots, 6\}$ **εξαρτώνται από:**

- 1) τη **γεωμετρική μορφολογία της βρεχόμενης επιφάνειας** του επιπλέοντος σώματος ∂D_B ,
- 2) το **βάθος του υγρού** h ,
- 3) τη **συχνότητα ταλάντωσης** ω .

Επί πλέον, το **δυναμικό περίθλασης** Φ_d **εξαρτάται** και από:

- 4) την **κατεύθυνση του προσπίπτοντος κυματισμού**, ήτοι τη γωνία $\beta \neq \angle(\mathbf{i}_1, \mathbf{c})$ (που υπεισέρχεται στην ποσότητα n_d). Ας σημειωθεί ότι το δυναμικό Φ_d σε αντίθεση με το Φ_D δεν εξαρτάται από το πλάτος A του προσπίπτοντος κυματισμού.

Σύμφωνα με τα **Σ1)** και **Σ2)** έχουμε:

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}; \partial D_B, h, \omega), \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (29\alpha)$$

$$\Phi_d(\mathbf{x}) = \Phi_d(\mathbf{x}; \partial D_B, h, \omega, \beta). \quad (29\beta)$$

Το γεγονός ότι τα δυναμικά Φ_ℓ είναι ανεξάρτητα από τα πλάτη ξ_k των κινήσεων του σώματος έχει πολύ μεγάλη σημασία. Αυτό ακριβώς το γεγονός μας επιτρέπει να αποσυζεύξουμε τελικά τις εξισώσεις κίνησης του επιπλέοντος σώματος (11) από τις εξισώσεις κίνησης του περιρρέοντος υγρού (10). Οι αποσυζευγμένες (έξι) εξισώσεις κίνησης του επιπλέοντος σώματος περιέχουν υδροδυναμικούς όρους (υδροδυναμικούς συντελεστές), οι οποίοι υπολογίζονται από τα δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$ και, άρα, είναι ανεξάρτητοι των κινήσεων.

2.3 Υδροδυναμικές φορτίσεις: Φορτίσεις Froude-Krylov, φορτίσεις περίθλασης και φορτίσεις ακτινοβολίας. Γενικευμένες πρόσθετες μάζες και αποσβέσεις ακτινοβολίας

Ας δούμε τώρα τις επιπτώσεις της προηγούμενης ανάλυσης του δυναμικού $\Phi(\mathbf{x})$ στον υπολογισμό των υδροδυναμικών φορτίσεων, που ασκούνται πάνω στο στερεό σώμα $[\Sigma]$. Σύμφωνα με τις σχέσεις (5, εδάφιο 2.2) και (27, εδάφιο 2.2), έχουμε

$$F_k^{(Y\Delta)} = -(j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_0 n_k dS_B - (j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_d n_k dS_B - (j\omega)^2 \rho \sum_{\ell=1}^6 \xi_\ell \iint_{\partial D_B} \Phi_\ell n_k dS_B \equiv$$

$$\equiv X_{0k} + X_{dk} + \sum_{\ell=1}^6 X_{\ell k}. \quad (1)$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η συνολική υδροδυναμική φόρτιση (επί του σώματος $[\Sigma]$) αποτελείται από τις εξής επί μέρους φορτίσεις:

1) Τις **φορτίσεις** (δυνάμεις και ροπές) **Froude-Krylov**,

$$X_{0k} = -(j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_0 n_k dS_B, \quad (2\alpha)$$

που οφείλονται αποκλειστικά στον αδιατάρακτο προσπίπτοντα κυματισμό. Οι φορτίσεις αυτές υπολογίζονται άμεσα⁽¹⁾, ολοκληρώνοντας την πίεση του πεδίου ροής του αδιατάρακτου κυματισμού (επί το κατάλληλο γενικευμένο συνημίτονο κατεύθυνσης) πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του $[\Sigma]$. Η ονομασία **Froude-Krylov**, των φορτίσεων αυτών, έχει δοθεί προς τιμή των Ναυπηγών William Froude (1810-1879) και Aleksei Nikolayevich Krylov (1863-1945), Αγγλου και Ρώσου αντιστοίχως, οι οποίοι έθεσαν τις βάσεις της μελέτης της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου.

2) Τις **φορτίσεις** (δυνάμεις και ροπές) **περίθλασης** (diffraction forces and moments),

$$X_{dk} = -(j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_d n_k dS_B, \quad (2\beta)$$

που οφείλονται στο πεδίο πιέσεων των περιθλώμενων (από το σώμα $[\Sigma]$) κυματισμών. Για τον προσδιορισμό των φορτίσεων αυτών απαιτείται να υπολογισθεί πρώτα το δυναμικό περίθλασης Φ_d , πράγμα που γίνεται με λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (28, εδάφιο 2.2), για $\ell = d$ ⁽²⁾.

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2α,β), οι φορτίσεις Froude-Krylov, X_{0k} , και περίθλασης, X_{dk} , είναι ανάλογες προς το πλάτος A του διεγείροντος (προσπίπτοντος) κυματισμού. Οι

⁽¹⁾ Δεν απαιτείται δηλαδή λύση υδροδυναμικού προβλήματος για τον υπολογισμό τους.

⁽²⁾ Στη συνέχεια θα δούμε πως οι δυνάμεις X_{dk} μπορούν να υπολογισθούν και με τη βοήθεια των δυναμικών ακτινοβολίας Φ_k . Κατά συνέπεια, είναι δυνατόν να αποφευχθεί η επίλυση του προβλήματος περίθλασης, υπό την προϋπόθεση ότι έχουν λυθεί τα προβλήματα ακτινοβολίας (28, εδάφιο 2.2), για $\lambda = 1, 2, \dots, 6$.

φορτίσεις αυτές, από κοινού θεωρούμενες, αποτελούν τις (υδροδυναμικές) *διεγείρουσες φορτίσεις* (exciting forces and moments or exciting loads).

3) Τις *φορτίσεις* (δυνάμεις και ροπές) *ακτινοβολίας* (radiation forces and moments),

$$X_{lk} = -(j\omega)^2 \rho \xi_l \iint_{\partial D_B} \Phi_l n_k dS_B, \quad k, l = 1, 2, \dots, 6, \quad (2\gamma)$$

που οφείλονται στο πεδίο πιέσεων των «ακτινοβολουμένων» από το ταλαντευόμενο σώμα κυματισμών. Η φόρτιση X_{lk} προκύπτει από την ολοκλήρωση του πεδίου πιέσεων που παράγεται όταν το σώμα $[\Sigma]$ εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους ξ_l , κατά τη (γενικευμένη) κατεύθυνση k , πάνω στην αδιατάρακτη –από άλλη αιτία– ελεύθερη επιφάνεια. Για τον προσδιορισμό των φορτίσεων ακτινοβολίας X_{lk} απαιτείται η λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών (28, εδάφιο 2.2), για $l = 1, 2, \dots, 6$.

Θα αναλύσουμε τώρα περαιτέρω τις *δυνάμεις ακτινοβολίας*. Θέτοντας

$$\Pi_{lk} = \rho \iint_{\partial D_B} \Phi_l n_k dS_B, \quad (3)$$

η (2γ) γίνεται

$$X_{lk} = -(j\omega)^2 \xi_l \Pi_{lk}. \quad (4)$$

Βάσει της σχέσης ορισμού (3), τα μεγέθη (υδροδυναμικοί συντελεστές) Π_{lk} φαίνεται να είναι πλήρως αντίστοιχα με τους *πρόσθετους αδρανειακούς συντελεστές* (γενικευμένες πρόσθετες μάζες) στερεού σώματος κινούμενου σε (αστρόβιλο, ασυμπιεστο) υγρό χωρίς ελεύθερη επιφάνεια⁽³⁾. Υπάρχουν όμως ορισμένες σημαντικές διαφορές σε σύγκριση με τη χωρίς ελεύθερη επιφάνεια περίπτωση. Κατ' αρχήν, *τα μεγέθη Π_{lk} εξαρτώνται όχι μόνο από τη γεωμετρία του στερεού σώματος (και του όλου πεδίου, γενικώτερα), αλλά και από τη συχνότητα ω της κίνησης, εφ' όσον το δυναμικό ακτινοβολίας Φ_l εξαρτάται τόσο από τη γεωμετρία, όσο και από τη συχνότητα (μέσω της συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας)⁽⁴⁾. Υπάρχει ακόμη μια σημαντική –πλην όμως «αφανής»- διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων (με και χωρίς ελεύθερη επιφάνεια). Στην παρούσα περίπτωση (ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας και υγρό εκτεινόμενο στο άπειρο κατά την οριζόντια κατεύθυνση), το δυναμικό Φ_l και άρα και *οι ποσότητες Π_{lk} , λαμβάνουν (γενικώς) μιγαδικές τιμές*. Αυτή τη στιγμή δεν μπορούμε να αποδείξουμε (ή να «πείσουμε») ότι τα δυναμικά Φ_l παίρνουν πράγματι μιγαδικές τιμές. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι το γεγονός αυτό σχετίζεται άμεσα με την έπ' άπειρον συμπεριφορά των δυναμικών ακτινοβολίας Φ_l (Βλ. σχετικά στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου).*

⁽³⁾ Ο αναγνώστης που δεν γνωρίζει τη θεωρία των πρόσθετων αδρανειακών συντελεστών στερεού σώματος που κινείται μέσα σε αστρόβιλο, ασυμπιεστο υγρό χωρίς ελεύθερη επιφάνεια, μπορεί να αγνοήσει αυτή τη σύγκριση. Η όλη παρουσίαση των υδροδυναμικών συντελεστών Π_{lk} , και η μελέτη των ιδιοτήτων τους, θα γίνει εδώ αυτοτελώς, χωρίς καμιά ουσιαστική αναγωγή στη χωρίς ελεύθερη επιφάνεια περίπτωση.

⁽⁴⁾ Στη χωρίς ελεύθερη επιφάνεια περίπτωση, και όταν το περιρρέον υγρό δεν φράσσεται από κανένα άλλο σύνορο (δηλαδή, το μοναδικό σύνορο του πεδίου ροής είναι η βρεχόμενη επιφάνεια του στερεού σώματος $[\Sigma]$), οι πρόσθετοι αδρανειακοί συντελεστές του $[\Sigma]$ ορίζονται κατά μονοσήμαντο τρόπο, και είναι παντελώς ανεξάρτητοι της κινητικής κατάστασης του σώματος.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, θέτουμε

$$\Pi_{lk} = \Pi_{lk}(\omega) = A_{lk}(\omega) + \frac{1}{j\omega} B_{lk}(\omega), \quad (5)$$

όπου **οι ποσότητες** $A_{lk}(\omega)$ και $B_{lk}(\omega)$ **είναι πλέον πραγματικές**. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (5), ανωτέρω, παίρνουμε

$$X_{lk} \equiv X_{lk}(\omega) = -(j\omega)^2 \xi_l A_{lk}(\omega) - (j\omega) \xi_l B_{lk}(\omega). \quad (6\alpha)$$

Εισάγοντας ρητά τη χρονική εξάρτηση με τη βοήθεια των σχέσεων $\xi_l(t|\omega) = \text{Re}\{\xi_l e^{j\omega t}\}$ και $X_{lk}(t|\omega) = \text{Re}\{X_{lk} e^{j\omega t}\}$ (5), η (6α) γράφεται ισοδυνάμως στη μορφή

$$X_{lk}(t|\omega) = -\ddot{\xi}_l(t|\omega) A_{lk}(\omega) - \dot{\xi}_l(t|\omega) B_{lk}(\omega). \quad (6\beta)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η δύναμη ακτινοβολίας στο πεδίο συχνοτήτων, $X_{lk} = X_{lk}(\omega)$, αναλύεται (ανά συχνότητα) σε δύο μέρη:

- Ένα ανάλογο με την επιτάχυνση $\ddot{\xi}_l(t) \equiv \ddot{\xi}_l(t|\omega)$ του στερεού σώματος $[\Sigma]$, με συντελεστή αναλογίας $A_{lk}(\omega)$, οποίος ονομάζεται **πρόσθετος αδρανειακός συντελεστής** του σώματος $[\Sigma]$ (**πρόσθετη μάζα** ή **πρόσθετη μαζική ροπή** ή **πρόσθετη ροπή αδράνειας**, ανάλογα με τις μονάδες που τον χαρακτηρίζουν), και
- Ένα άλλο ανάλογο με την ταχύτητα $\dot{\xi}_l(t) \equiv \dot{\xi}_l(t|\omega)$ του σώματος $[\Sigma]$, με συντελεστή αναλογίας $B_{lk}(\omega)$, ο οποίος ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης (ακτινοβολίας)** του σώματος $[\Sigma]$ (6).

Οι πρόσθετοι αδρανειακοί συντελεστές $A_{lk}(\omega)$ ονομάζονται επίσης **γενικευμένες πρόσθετες μάζες**, ή απλά **πρόσθετες μάζες**, αν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης ή σύγχυσης. Σύμφωνα με τις σχέσεις (6) και (1), η **συνολική δύναμη ακτινοβολίας** που ασκείται στο ταλαντευόμενο με συχνότητα ω σώμα $[\Sigma]$, κατά τη γενικευμένη κατεύθυνση k , δίδεται από τη σχέση

$$X_{Rk}(t|\omega) \equiv \sum_{l=1}^6 X_{lk}(t|\omega) = -\sum_{l=1}^6 A_{lk}(\omega) \ddot{\xi}_l(t|\omega) - \sum_{l=1}^6 B_{lk}(\omega) \dot{\xi}_l(t|\omega). \quad (7\alpha)$$

Η σχέση (7α), γράφεται επίσης στην ακόλουθη μητρική μορφή:

(5) Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι εργαζόμαστε στο **πεδίο συχνοτήτων** –δηλαδή η **χρονική εξάρτηση** όλων των χρονομεταβλητών μεγεθών είναι **πάντοτε αρμονική**, αδιαφόρως του είδους της αναλυτικής αναπαράστασης που χρησιμοποιούμε. Έτσι, οι σχέσεις (6α) και (6β) είναι δύο ισοδύναμες γραφές του ίδιου αποτελέσματος, και ισχύουν στο πεδίο συχνοτήτων. Ας σημειωθεί ότι, στην προκειμένη περίπτωση, οι σχέσεις (6β), οι οποίες συχνά γράφονται στην απλούστερη μορφή $X_{lk}(t) = -\ddot{\xi}_l(t) A_{lk} - \dot{\xi}_l(t) B_{lk}$, δεν ισχύουν στο πεδίο του χρόνου.

(6) Η απόσβεση ακτινοβολίας δεν σχετίζεται με απόσβεση λόγω τριβών ή συνεκτικότητας. Προκύπτει ως φαινόμενη απόσβεση της μηχανικής ενέργειας του επιπλέοντος σώματος, λόγω απομάκρυνσης («ακτινοβολίας») αυτής μέσω των απομακρυνόμενων κυματισμών που παράγει η κίνηση του σώματος.

$$\underline{X}_R(t|\omega) = -\underline{A}(\omega) \cdot \ddot{\underline{\xi}}(t|\omega) - \underline{B}(\omega) \cdot \ddot{\underline{\xi}}(t|\omega). \quad (7\beta)$$

2.4 Εξισώσεις Κίνησης Επιπλέοντος Στερεού Σώματος

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (1 και 7, εδάφιο 2.3), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τις συνολικές υδροδυναμικές φορτίσεις που ασκούνται πάνω στο επιπλέον σώμα $[\Sigma]$:

$$F_k^{(Y\Delta)}(t|\omega) = X_{0k}(t|\omega) + X_{dk}(t|\omega) - \sum_{l=1}^6 A_{lk}(\omega)\ddot{\xi}_l(t|\omega) - \sum_{l=1}^6 B_{lk}(\omega)\dot{\xi}_l(t|\omega). \quad (1)$$

Η ανωτέρω σχέση, σε συνδυασμό με την (11, εδάφιο 2.2), μας οδηγεί στην ακόλουθη μορφή της εξίσωσης κίνησης του επιπλέοντος σώματος:

$$(\underline{M} + \underline{A}(\omega)) \cdot \ddot{\underline{\xi}}(t|\omega) + \underline{B}(\omega) \cdot \dot{\underline{\xi}}(t|\omega) + \underline{C} \cdot \underline{\xi}(t|\omega) = \underline{\hat{F}}(t|\omega) + \underline{X}_0(t|\omega) + \underline{X}_d(t|\omega), \quad (2\alpha)$$

ή

$$(j\omega)^2 (\underline{M} + \underline{A}(\omega)) \cdot \underline{\xi} + (j\omega)\underline{B}(\omega) \cdot \underline{\xi} + \underline{C} \cdot \underline{\xi} = \underline{\hat{F}}(\omega) + \underline{X}_0(\omega) + \underline{X}_d(\omega), \quad (2\beta)$$

όπου τα μεγέθη $\underline{\xi}$, $\underline{\hat{F}}(\omega)$, $\underline{X}_0(\omega)$, $\underline{X}_d(\omega)$ είναι οι παραστατικοί μιγάδες των χρονικά αρμονικών μεγεθών $\underline{\xi}(t|\omega)$, $\underline{\hat{F}}(t|\omega)$, $\underline{X}_0(t|\omega)$, $\underline{X}_d(t|\omega)$, αντιστοίχως.

Οι συντελεστές \underline{M} , \underline{A} , \underline{B} και \underline{C} , του αριστερά μέλους των εξισώσεων (2), καθώς και οι διεγείρουσες φορτίσεις, \underline{F} , \underline{X}_0 , \underline{X}_d , που εμφανίζονται στο δεξιά μέλος των εξισώσεων (2), είναι ανεξάρτητοι(ες) από τις κινήσεις ξ_l του σώματος $[\Sigma]$. Τα ανωτέρω μεγέθη εξαρτώνται από διάφορα χαρακτηριστικά του σώματος $[\Sigma]$ και του πεδίου ροής, ως εξής:

$$\underline{M} = \underline{M}(\mathcal{G}_B, \rho_B), \quad (3\alpha)$$

$$\underline{A} = \underline{A}(\omega, \partial D_B, h, \rho), \quad (3\beta)$$

$$\underline{B} = \underline{B}(\omega, \partial D_B, h, \rho), \quad (3\gamma)$$

$$\underline{C} = \underline{C}(\mathcal{G}_B, \rho), \quad (3\delta)$$

$$\underline{X}_0 = \underline{X}_0(\omega, \partial D_B, h, \beta, \rho), \quad (3\epsilon)$$

$$\underline{X}_d = \underline{X}_d(\omega, \partial D_B, h, \beta, \rho), \quad (3\sigma\tau)$$

όπου \mathcal{G}_B παριστάνει τη γεωμετρική μορφολογία του επιπλέοντος σώματος, ρ_B και ρ είναι η πυκνότητα του σώματος και του περιρρέοντος υγρού, αντιστοίχως, ω είναι η συχνότητα του προσπίπτοντος κυματισμού και της κίνησης του σώματος, h το βάθος του νερού, και β η γωνία πρόσπτωσης του διεγείροντος κυματισμού.

Σύμφωνα με τη μέχρι τώρα ανάλυση του προβλήματος, το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων (10,11, εδάφιο 2.2), οι οποίες διέπουν τη χρονικά αρμονική κίνηση του υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$, είναι ισοδύναμο με το σύστημα των εξισώσεων (προβλημάτων συνοριακών τιμών) (28, εδάφιο 2.2) και (2), ανωτέρω. **Στο τελευταίο σύστημα εξισώσεων [(28/2.2)+(2)] οι εξισώσεις κίνησης του υγρού και του στερεού είναι αποσυσζευγμένες.** Έτσι, από τη λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών (28, εδάφιο 2.2) προσδιορίζουμε τις υδροδυναμικές ποσότητες \underline{A} , \underline{B} , \underline{X}_0 , \underline{X}_d , με τη βοήθεια των οποίων διατυπώνονται οι δυναμικές εξισώσεις του επιπλέοντος σώματος (2). Στη συνέχεια,

επιλύοντας τις εξισώσεις (2), βρίσκουμε τις κινήσεις ξ_i του επιπλέοντος σώματος. Τέλος, το πεδίο ροής σε κάθε σημείο $x \in D$, υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (27, εδάφιο 2.2).

Κλείνουμε το εδάφιο αυτό με την παρατήρηση ότι οι εξισώσεις κίνησης (2) ισχύουν μόνο για την περίπτωση της χρονικά αρμονικής ταλάντωσης του υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$ (πεδίο συχνοτήτων). Εάν η **χρονική εξάρτηση είναι γενική**, τότε η εξίσωση κίνησης του επιπλέοντος σώματος έχει την ακόλουθη, ουσιαστικά διαφορετική, μορφή (βλ., π.χ., Wehausen 1967, 1971):

$$(M + A(\infty))\ddot{\xi}(t) + \int_0^t L(t - \tau)\ddot{\xi}(\tau)d\tau = \hat{F}(t) + F_0(t) + F_d(t), \quad (4)$$

όπου $A(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_{lk}(\omega) \right)_{6 \times 6}$ είναι 6x6-πίνακας με στοιχεία τις υψίσυχνες ($\omega \rightarrow \infty$) ασυμπτωτικές τιμές των (γενικευμένων) πρόσθετων μαζών $A_{lk}(\omega)$, και $L(t) = (L_{lk}(t))_{6 \times 6}$ είναι 6x6-πίνακας με στοιχεία εξαρτώμενα από το χρόνο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συνελκτικοί πυρήνες $L_{kl}(t)$ σχετίζονται με τους υδροδυναμικούς συντελεστές $A_{lk}(\omega)$ και $B_{lk}(\omega)$ ως εξής:

$$L_{lk}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (A_{lk}(\omega) - A_{lk}(\infty)) \cos(\omega t) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{lk}(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega. \quad (5)$$

Η ανωτέρω σχέση (ταυτότητα) υποδηλώνει ότι υπάρχουν σχέσεις μεταξύ των υδροδυναμικών συντελεστών $A_{lk}(\omega)$ και $B_{lk}(\omega)$. Αυτές είναι γνωστές ως **σχέσεις Kramers-Kronig**, και έχουν τη μορφή

$$A_{lk}(\sigma) - A_{lk}(\infty) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{lk}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2 - \sigma^2}, \quad (6\alpha)$$

$$B_{lk}(\sigma) = -\frac{2}{\pi} \sigma^2 \int_0^{\infty} (A_{lk}(\omega) - A_{lk}(\infty)) \frac{d\omega}{\omega^2 - \sigma^2}. \quad (6\beta)$$

Οι υδροδυναμικές φορτίσεις, $F_0(t)$ και $F_d(t)$, που εμφανίζονται στο δεξιά μέλος της εξίσωσης (4), προκύπτουν από τη δράση του προσπίπτοντος και του περιθλώμενου κυματισμού, αντιστοίχως, στο πεδίο του χρόνου. Στην περίπτωση αυτή **δεν υπάρχει κανένας περιορισμός όσον αφορά το είδος της χρονικής εξάρτησης** (του προσπίπτοντος κυματισμού, η των εξωτερικών δυνάμεων ή των κινήσεων του σώματος). Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τη δυναμική επιπλέοντων σωμάτων στο πεδίο του χρόνου, παραπέμπεται στις εργασίες των Cummins (1962), Wehausen (1967, 1971), Beck and Liapis (1987).

2.5 Η επ' άπειρον συμπεριφορά των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης

Ο καθορισμός της επ' άπειρον συμπεριφοράς του πεδίου ροής γύρω (μακριά) από ένα επιπλέον σώμα είναι ένα ουσιώδες προαπαιτούμενο για την επίλυση των προβλημάτων αλληλεπίδρασης κύματος σώματος (wave-body interaction problems) στην ανοικτή θάλασσα. Όταν εργαζόμαστε **στο πεδίο του χρόνου**, δηλαδή όταν μελετάμε κυματικές διαταραχές που έχουν ξεκινήσει από την ηρεμία πριν από πεπερασμένο χρόνο, ο καθορισμός της επ' άπειρον συμπεριφοράς του πεδίου είναι τετριμμένος: για κάθε t πεπερασμένο, το πεδίο είναι (ή τείνει «γρήγορα») στο μηδέν, καθώς $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Η συνθήκη αυτή είναι άμεση συνέπεια του φυσικού γεγονότος ότι η **κυματική διαταραχή ταξιδεύει με πεπερασμένη ταχύτητα** και άρα (σε πεπερασμένο χρόνο) δεν μπορεί να έχει διαδοθεί σε οσοδήποτε μεγάλες αποστάσεις. Η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική **στο πεδίο συχνοτήτων**, όπου η υπόθεση της αρμονικής χρονικής εξάρτησης σ' ολόκληρη την έκταση του πεδίου, ισοδυναμεί με την υπόθεση μιας **χρονικά αρμονικής διέγερσης που δρά άπειρο χρόνο**. Έτσι, η κυματική διαταραχή «έχει προλάβει» να διαδοθεί σε οσοδήποτε μεγάλες αποστάσεις («στο άπειρο»), και έχει λάβει μια συγκεκριμένη μορφή μακριά από το επιπλέον σώμα. Η γνώση της μορφής αυτής είναι απαραίτητη για τον πλήρη προσδιορισμό των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης.

Αν και συχνά χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις «επ' άπειρον συνθήκη» ή «συνθήκη ακτινοβολίας» ή «συνθήκη Sommerfeld» όταν αναφερόμαστε στην επ' άπειρον συμπεριφορά των δυναμικών $\Phi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell = d, 1, 2, \dots, 6$, στο πεδίο συχνοτήτων, θα πρέπει να έχουμε κατά νού ότι η «συνθήκη» αυτή είναι πολύ διαφορετικού χαρακτήρα από τις άλλες συνθήκες (ελεύθερης επιφάνειας, στερεού συνόρου, κλπ.) που ικανοποιούν τα δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$. Κατ' αρχήν, η «επ' άπειρον συνθήκη» **δεν εφαρμόζεται σε κάποιο συγκεκριμένο σύνορο, δεν προκύπτει με απλές θεωρήσεις**, όπως οι άλλες συνθήκες, **ούτε είναι «καθολικής» ισχύος**, με την έννοια ότι η ακριβής μορφή της εξαρτάται από το είδος του εξεταζόμενου προβλήματος.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια του εδαφίου αυτού, ο προσδιορισμός της επ' άπειρον συμπεριφοράς των δυναμικών $\Phi_\ell(\mathbf{x})$ μακριά από το επιπλέον σώμα⁽¹⁾ είναι ένα ενδιαφέρον, ειδικό, μαθηματικό πρόβλημα, που λύνεται με την **κατασκευή κατάλληλων αναπαραστάσεων** που ισχύουν σε μια «γειτονιά» του απείρου, και την **ασυμπτωτική μελέτη αυτών**. Η πρώτη συστηματική ανάλυση ενός τέτοιου προβλήματος έγινε από το Γερμανό Φυσικό Arnold Sommerfeld, για το μακρινό πεδίο γύρω από σφαιρικό σκεδαστή (βλ., π.χ., Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, 1949). Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον η επ' άπειρον συμπεριφορά («επ' άπειρον συνθήκη») φέρει συχνά το όνομα του Sommerfeld, ακόμη και σε προβλήματα τα οποία ουδέποτε μελέτησε ο ίδιος. Το πρόβλημα της επ' άπειρον συμπεριφοράς των πεδίων περίθλασης και ακτινοβολίας υδατίνων κυμάτων (στο πεδίο συχνοτήτων), που μας ενδιαφέρει εδώ, μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Αμερικανό Μαθηματικό Fritz John (1950). Ένας εναλλακτικός τρόπος μελέτης του ίδιου προβλήματος, αρχίζοντας από το πεδίο του χρόνου όπου μια εξωτερική, χρονικά αρμονική διέγερση τίθεται σε λειτουργία σε $t = 0$, θεωρώντας τη λύση του προβλήματος για $t > 0$, και παίρνοντας τα όρια αυτής, πρώτα για $t \rightarrow \infty$ (ώστε η εξαναγκασμένη, χρονικά αρμονική διαταραχή να έχει διαδοθεί σε ολόκληρο το πεδίο) και ύστερα για $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$, αναπτύχθηκε από τον Stoker (1953). Βλ. επίσης το εδάφιο 6.7 του κλασσικού βιβλίου *Water Waves* του ίδιου συγγραφέα (Stoker 1957).

⁽¹⁾ Και, γενικότερα, ο προσδιορισμός της επ' άπειρον συμπεριφοράς οποιουδήποτε (απέρατου) κυματικού πεδίου μακριά από (φραγμένους) σκεδαστές ή άλλες ανομοιογένειες.

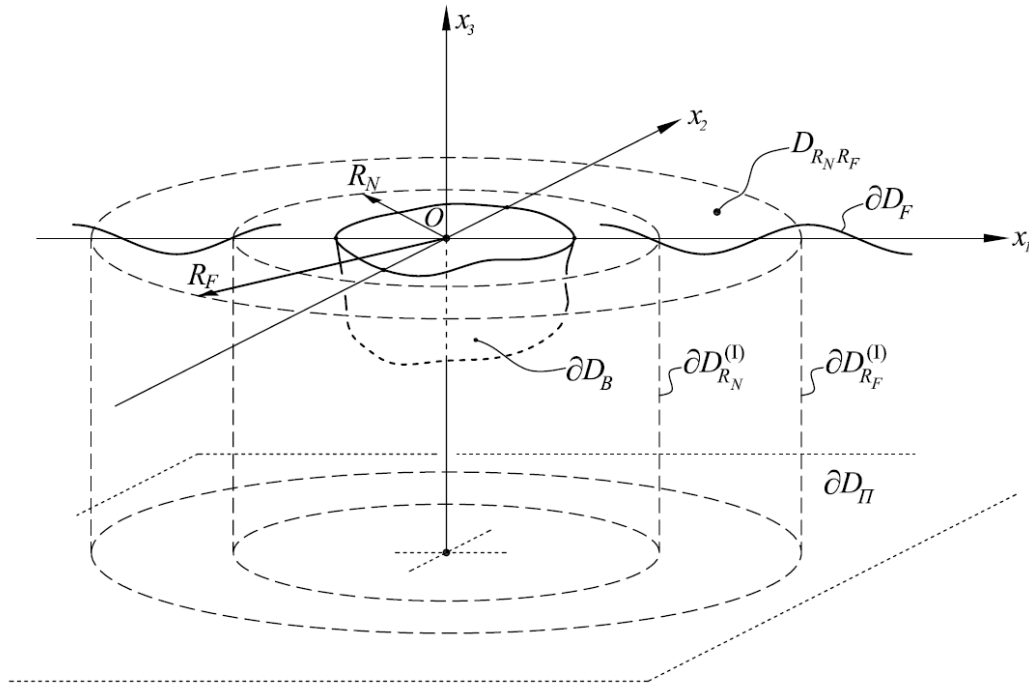
Στο παρόν εδάφιο θα παράγουμε και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα του John, από τα οποία προκύπτουν –μεταξύ άλλων- και πολλές σπουδαίες ιδιότητες των υδροδυναμικών συντελεστών (προσθέτων μαζών και αποσβέσεων) των επιπλεόντων στερεών σωμάτων. Οι τελευταίες θα παρουσιασθούν σε επόμενο εδάφιο.

- **Γενική μορφή των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης μακριά από το σώμα** $[\Sigma]$

Ενδιαφερόμεθα για την «επ' άπειρον» συμπεριφορά του πεδίου ροής, δηλαδή ενδιαφερόμεθα για τη γενική μορφή των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης στο εξωτερικό ενός οποιουδήποτε φραγμένου χωρίου, το οποίο περικλείει το σώμα $[\Sigma]$. Προκειμένου να αποφύγουμε «λήψη του ζητουμένου», η μελέτη μας πρέπει να γίνει, κατ' αρχήν, σε κατάλληλο φραγμένο χωρίο, το οποίο να μπορεί κατά ομαλό και συνεχή τρόπο να επεκταθεί μέχρι το άπειρο. Το «σχέδιο» είναι να βρούμε τη γενική μορφή του δυναμικού σ' αυτό το κατάλληλο φραγμένο χωρίο και, στη συνέχεια, να εξετάσουμε το όριο της λύσης όταν το χωρίο διευρύνεται απεριόριστα και $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$. Με σκοπό να διευκολύνουμε τη μαθηματική ανάλυση του προβλήματος, επιλέγουμε –κατά περίπτωση- το απλούστερο δυνατό χωρίο. Εν προκειμένω, η καλύτερη επιλογή είναι το **χωρίο μορφής κυλινδρικού δακτυλίου**

$$D_{R_N R_F} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (r, \theta, z) : -h \leq z \equiv x_3 \leq 0, R_N \leq r \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R_F \right\}, \quad (1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το σώμα $[\Sigma]$ κείται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του μικρότερου κυλίνδρου



Σχήμα 1: Το κυλινδρικό χωρίο $D_{R_N R_F}$.

$$D_{R_N} = \{ \mathbf{x} = (r, \theta, z) : -h \leq z \leq 0, \quad r < R_N \}.$$

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε και να λύσουμε το «γενικό πρόβλημα αναπαράστασης των δυναμικών $\Phi_\ell(\mathbf{x})$ στο ενδιάμεσο χωρίο D_{R_N, R_F} ». Δεδομένου ότι η ανάλυση είναι γενική και αφορά σε όλα τα επί μέρους δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell \in \{d, 1, 2, \dots, 6\}$, στη συνέχεια θα παραλείψουμε το δείκτη (ℓ) .

Να βρεθούν όλα τα δυνατά πεδία δυναμικού $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D_{R_N, R_F}$, τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες μέσα στον κυλινδρικό δακτύλιο D_{R_N, R_F} :

$$\Delta \Phi \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in D_{R_N, R_F} \quad (R_N \leq r \leq R_F) \quad (2\alpha)$$

$$\mu \Phi - \Phi_{,z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F \quad (z = 0) \quad (2\beta)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv \Phi_{,z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{II} \quad (z = -h). \quad (2\gamma)$$

Ουδεμία συνθήκη επιβάλλεται στα παράπλευρα κυλινδρικά σύνορα

$$\partial D_{R_N}^{(I)} \left[\dot{\eta} \partial D_{R_F}^{(I)} \right] = \{ \mathbf{x} = (r, \theta, z) : -h \leq z \leq 0, \quad r = R_N \left[\dot{\eta} R_F \right] \} \text{ και} \quad (3)$$

πράγμα που οδηγεί σε πρόβλημα που έχει ως λύση μια άπειρη οικογένεια συναρτήσεων δυναμικού. Σκοπός μας εδώ είναι να προσδιορίσουμε αυτή την άπειρη οικογένεια λύσεων του προβλήματος (2) και να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της όταν $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$. Όπως αποδεικνύεται αναλυτικά στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου, ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα Αναπαράστασης του μακρινού πεδίου: Κάθε συνάρτηση δυναμικού $\Phi(\mathbf{x})$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις (2α,β,γ) και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο χωρίο D_{R_N, R_F} , γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) \equiv \Phi(r, \theta, z) = & \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_0 r) \left\{ \begin{array}{l} a_m^{(1)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(1)} \sin m\theta \end{array} \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_0 r) \left\{ \begin{array}{l} a_m^{(2)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(2)} \sin m\theta \end{array} \right\} \right) \cdot g_0(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} K_m^{(K)}(k_n r) \left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{(K)} \cos m\theta + \\ + b_{mn}^{(K)} \sin m\theta \end{array} \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{(I)}(k_n r) \left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^{(I)} \cos m\theta + \\ + b_{mn}^{(I)} \sin m\theta \end{array} \right\} \right) \cdot g_n(z), \quad (4) \end{aligned}$$

όπου

$$g_0(z) = \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh(k_0 h)}, \quad g_n(z) = \frac{\cos[k_n(z+h)]}{\cos(k_n h)}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5\alpha, \beta)$$

$H_m^{(1)}$ και $H_m^{(2)}$ είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους, και I_m και K_m είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντιστοίχως, k_0 είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης (σχέσης διασποράς, dispersion relation)

$$\mu h = k h \tanh(k h), \quad (5\gamma)$$

k_n , $n=1,2,3, \dots$ είναι οι (άπειρες) θετικές ρίζες της εξίσωσης

$$-\mu h = kh \tan(kh), \quad \mu = \omega^2 / g \quad (5\delta)$$

(για τις οποίες ισχύει ότι $k_n \rightarrow n\pi$, καθώς $n \rightarrow +\infty$),

και

$a_m^{(1,2)}$, $b_m^{(1,2)}$, $a_{mn}^{(K,I)}$ και $b_{mn}^{(K,I)}$ είναι ελεύθεροι (απροσδιόριστοι) συντελεστές, για τους οποίους η μόνη –κατ' αρχήν– απαίτηση είναι να συγκλίνουν οι διάφορες άπειρες σειρές, που εμφανίζονται στην ανωτέρω σχέση (4). ■

Από την ανάλυση που παρουσιάζεται διεξοδικά στο Παράρτημα αυτού του Κεφαλαίου, καθίσταται φανερό ότι το ανωτέρω Θεώρημα Αναπαράστασης (4) ισχύει για κάθε ζεύγος ακτίνων $R_N < R_F$, υπό την προϋπόθεση ότι το επιπλέον σώμα $[\Sigma]$ κείται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του κυλίνδρου με τη μικρότερη ακτίνα R_N . Άρα, η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου $\Phi(\mathbf{x})$, όταν $r \rightarrow \infty$, μπορεί να προκύψει από τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων $H_m^{(1,2)}$, I_m και K_m , οι οποίες υπεισέρχονται στην αναπαράσταση (4). Η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων $H_m^{(1,2)}$, I_m και K_m , αποτελεί κεντρικό αντικείμενο των περισσότερων από τα βιβλία που μελετούν τις **Ειδικές Συναρτήσεις της Μαθηματικής Φυσικής (Special Functions of Mathematical Physics)**⁽²⁾. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε και θα αξιοποιήσουμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα (για μεγάλες τιμές του ορίσματος u) για τις συναρτήσεις $H_m^{(1,2)}$, I_m και K_m , παραπέμποντας τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται για τη μεθοδολογία παραγωγής τους, στην ειδική βιβλιογραφία που δίδεται στο τέλος του εδαφίου αυτού, και ειδικότερα στο βιβλίο του Lebedev (1965/1972).

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel $H_m^{(1,2)}(u)$ καθώς $u = k_0 r \rightarrow +\infty$, δίδεται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$H_m^{(1)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{i\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)} (1 + O(u^{-1})), \quad (6\alpha)$$

$$H_m^{(2)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-i\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)} (1 + O(u^{-1})). \quad (6\beta)$$

Δηλαδή, για μεγάλες τιμές του ορίσματος u , οι συναρτήσεις Hankel $H_m^{(1,2)}(u)$ παρουσιάζουν **φθίνουσα ταλαντωτική συμπεριφορά**, με αργά μειούμενο πλάτος, το οποίο τείνει στο μηδέν με ρυθμό $O(u^{-1/2})$.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $I_m(u)$ και $K_m(u)$, αντίστοιχα, καθώς $u = k_n r \rightarrow +\infty$, $n=1,2,\dots$, δίδεται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

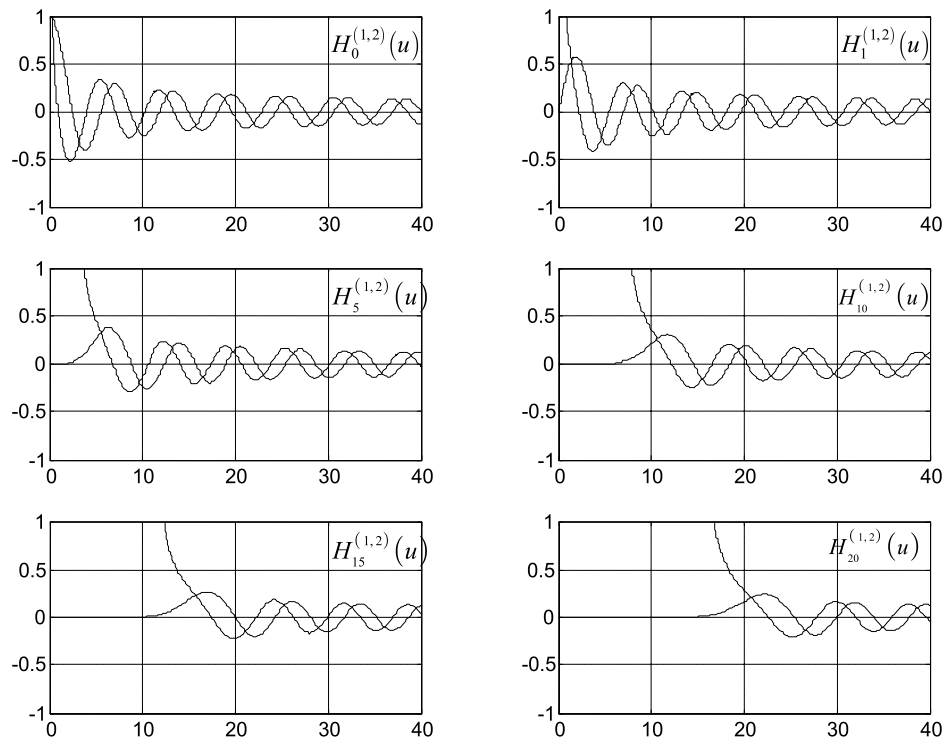
$$I_m(u) = \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} (1 + O(u^{-1})), \quad K_m(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{2u/\pi}} (1 + O(u^{-1})). \quad (7\alpha, \beta)$$

⁽²⁾ Βλ. βιβλιογραφικά σχόλια στο τέλος του εδαφίου.

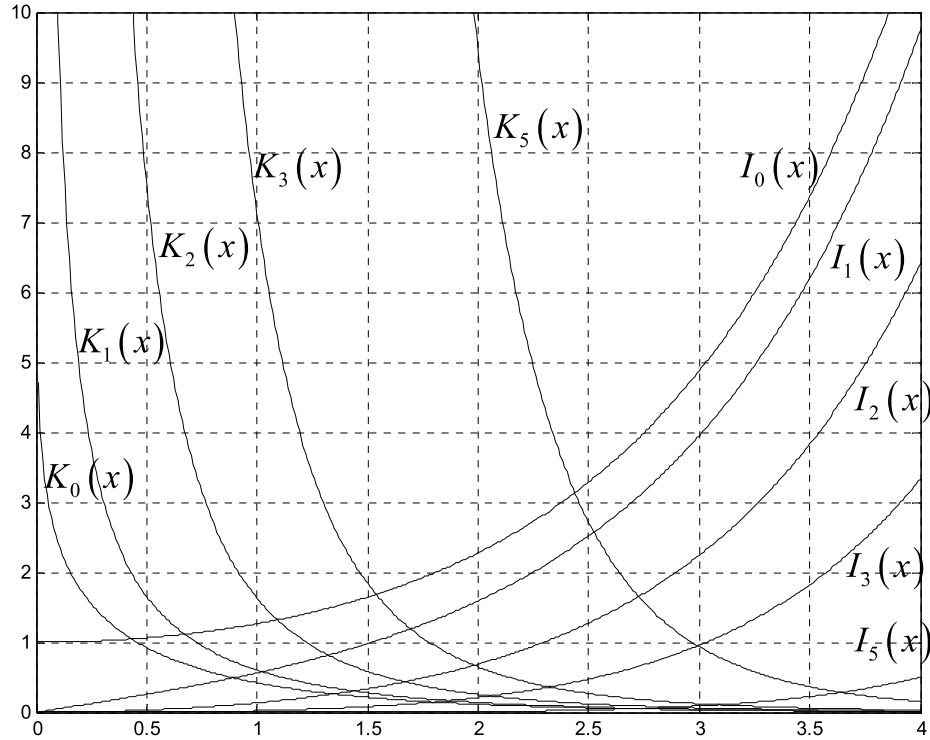
Δηλαδή, για μεγάλες τιμές του ορίσματος u , οι συναρτήσεις $I_m(u)$ απειρίζονται εκθετικά, ενώ οι συναρτήσεις $K_m(u)$ μηδενίζονται εκθετικά.

Στα Σχήματα 2 και 3 παρουσιάζονται τα γραφήματα των συναρτήσεων $H_m^{(2)}$, I_m και K_m , για διάφορες τιμές της τάξης m . Ειδικότερα, στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται τα γραφήματα των συναρτήσεων Hankel $H_m^{(1,2)}(u) = J_m(u) \pm iY_m(u)$, για $0 < u < 40$ και για $m = 0, 1, 5, 10, 15$ και 20 . Με τη συνεχή γραμμή δείχνεται το πραγματικό μέρος $J_m(u)$, ενώ με τη διακεκομμένη γραμμή δείχνεται το φανταστικό μέρος $-Y_m(u)$. Σε όλες τις περιπτώσεις φαίνεται καθαρά η «επ' άπειρον» (δηλαδή, για μεγάλες τιμές του ορίσματος u) συμπεριφορά, η οποία δίδεται αναλυτικά από τις ασυμπτωτικές σχέσεις (6). Από το Σχήμα 2 παρατηρούμε επίσης ότι, καθώς η τάξη m μεγαλώνει, η ασυμπτωτική (ταλαντωτική) συμπεριφορά του γραφήματος της $H_m^{(1,2)}$ αρχίζει από μεγαλύτερες τιμές του ορίσματος u .

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζονται τα γραφήματα των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $I_m(u)$ και $K_m(u)$, για $0 < u < 4$ και $m = 0, 1, 2, 3, 5$. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά (7) είναι εμφανής για τις τάξεις $m = 0, 1, 2$. Για μεγαλύτερες τάξεις η ασυμπτωτική συμπεριφορά εμφανίζεται για μεγαλύτερες τιμές του ορίσματος u .



Σχήμα 2. Γραφήματα των συναρτήσεων Hankel $H_m^{(1,2)}(u)$ για $m = 0, 1, 5, 10, 15, 20$.



Σχήμα 3. Γραφήματα των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $I_m(u)$ και $K_m(u)$ για $m = 0, 1, 2, 3, 5$.

Από τα ανωτέρω ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις $H_m^{(1,2)}$, I_m και K_m , προκύπτει ότι οι όροι που περιέχουν τις συναρτήσεις $I_m(k_n r)$ οδηγούν σε ισχυρούς (εκθετικούς) απειρισμούς, και άρα πρέπει να «απαλειφθούν» από το ανάπτυγμα. Επιλέγουμε λοιπόν $a_m^{(l)} = b_m^{(l)} = 0$. Περαιτέρω, εφ' όσον οι συναρτήσεις $K_m(k_n r)$ μηδενίζονται εκθετικά, όταν $k_n r \rightarrow +\infty$, ενώ οι συναρτήσεις Hankel $H_m^{(1,2)}(k_n r)$ μηδενίζονται πολύ αργά (με ρυθμό $O(k_n r)^{-1/2}$), είναι φανερό ότι η διπλή σειρά που περιέχει τις $K_m(k_n r)$, δεν αναμένεται να συμβάλει στη διαμόρφωση της βασικής επ' άπειρον μορφής του πεδίου. Οδηγούμεθα, λοιπόν, στην ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή του πεδίου $\Phi(\mathbf{x}) \equiv \Phi(r, \theta, z)$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_0 r) \begin{Bmatrix} a_m^{(1)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(1)} \sin m\theta \end{Bmatrix} g_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_0 r) \begin{Bmatrix} a_m^{(2)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(2)} \sin m\theta \end{Bmatrix} g_0(z) \right) \cdot \left(1 + O((k_0 r)^{-1}) \right)$$

δηλαδή

$$\Phi(r, \theta, z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_0 r) \begin{Bmatrix} a_m^{(1)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(1)} \sin m\theta \end{Bmatrix} g_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_0 r) \begin{Bmatrix} a_m^{(2)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(2)} \sin m\theta \end{Bmatrix} g_0(z) \quad (8)$$

με σχετικό σφάλμα $O((k_0 r)^{-1})$.

Οι δύο συναρτήσεις $H_m^{(1)}(k_0 r)$ και $H_m^{(2)}(k_0 r)$, διαφέρουν –ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά τους για μεγάλες τιμές του r – μόνο κατά το πρόσημο της φάσης $\left(e^{\pm i \left(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2} \right)} \right)$. Το φυσικό νόημα αυτής της διαφοράς καθίσταται φανερό αν «επιστρέψουμε» στη συνήθη χρονική εξάρτηση, με τη βοήθεια των παραστατικών μιγάδων. Πράγματι, λαμβάνοντας τα πραγματικά μέρη $\text{Re}\{H_m^{(1,2)}(k_0 r)e^{i\omega t}\}$, βρίσκουμε

$$R_m^{(1)}(t) = \text{Re}\{H_m^{(1)}(k_0 r)e^{i\omega t}\} \stackrel{k_0 r \gg 1}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \text{Re}\left\{e^{i\left(k_0 r + \omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cos\left(k_0 r + \omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \quad (9\alpha)$$

και

$$R_m^{(2)}(t) = \text{Re}\{H_m^{(2)}(k_0 r)e^{i\omega t}\} \stackrel{k_0 r \gg 1}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \text{Re}\left\{e^{-i\left(k_0 r - \omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cos\left(k_0 r - \omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right), \quad (9\beta)$$

εκ των οποίων διαπιστώνουμε τα ακόλουθα: Έχοντας επιλέξει τον phasor στη μορφή $e^{i\omega t}$, οι όροι της αναπαράστασης (8) που περιέχουν τη συνάρτηση $H_m^{(1)}(k_0 r)$ αντιστοιχούν σε **εισερχόμενα κύματα**, δηλαδή σε κύματα τα οποία κινούνται (συγκλίνουν) από το άπειρο προς το σώμα, ενώ αντίθετα οι όροι της αναπαράστασης (8) που περιέχουν τη συνάρτηση $H_m^{(2)}(k_0 r)$ αντιστοιχούν σε **εξερχόμενα κύματα**, δηλαδή σε κύματα τα οποία κινούνται (αποκλίνουν) από το σώμα προς το άπειρο. Αν επιλέξουμε τον phasor στη μορφή $e^{-i\omega t}$, τότε ο ρόλος των $H_m^{(1)}(k_0 r)$ και $H_m^{(2)}(k_0 r)$ εναλλάσσεται.

Στην περίπτωση των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης, **η φυσική του προβλήματος επιβάλλει να αποκλείσουμε (μηδενίσουμε) τα εισερχόμενα κύματα**. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας $a_m^{(1)} = b_m^{(1)} = 0$, οπότε η ασυμπτωτική μορφή (8) του πεδίου $\Phi(\mathbf{x}) \equiv \Phi(r, \theta, z)$ απλοποιείται περαιτέρω ως εξής:

$$\Phi(r, \theta, z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_0 r) \left\{ \begin{array}{l} a_m^{(2)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(2)} \sin m\theta \end{array} \right\} g_0(z) \quad (10)$$

Αυτή είναι λοιπόν η γενική μορφή των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης στην περιοχή $r > R_N$. Εισάγοντας στην αναπαράσταση (10), ανωτέρω, την ασυμπτωτική συμπεριφορά (6β) της συνάρτησης Hankel $H_m^{(2)}(k_0 r)$, και τη μορφή (5α) της κατακόρυφης συνάρτησης $g_0(z)$, παίρνουμε

$$\Phi(r, \theta, z) = -\frac{jg}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh k_0 h} \cdot \mathcal{H}(\theta) + O\left((k_0 r)^{-3/2}\right), \quad (11\alpha)$$

όπου η συνάρτηση $\mathcal{H}(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\tilde{a}_m^{(2)} \cos m\theta + \tilde{b}_m^{(2)} \sin m\theta)$ περιγράφει την αζιμουθιακή

συμπεριφορά του μακρινού πεδίου (far field), και αναφέρεται ως **συνάρτηση Kochin** (*Kochin's H-function*), προς τιμή του σημαντικού Ρώσου Φυσικού και μαθηματικού Nikolai Ye. Kochin (1901-1944). [Βλ. βιογραφικά στοιχεία για τον N. Ye. Kochin στο τέλος του εδαφίου]. Παραγωγίζοντας την (11α) βρίσκουμε

$$\frac{\partial \Phi(r, \theta, z)}{\partial r} = \frac{g}{\omega} \sqrt{\frac{2k_0}{\pi r}} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh k_0 h} \cdot \mathcal{H}(\theta) + O((k_0 r)^{-3/2}), \quad (11\beta)$$

Στην περίπτωση που έχουμε υγρό απείρου βάθους ($h = \infty$) οι σχέσεις (11α,β) παίρνουν τη μορφή

$$\Phi(r, \theta, z) = -\frac{jg}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \exp(k_0 z) \cdot \mathcal{H}(\theta) + O((k_0 r)^{-3/2}), \quad (12\alpha)$$

και

$$\frac{\partial \Phi(r, \theta, z)}{\partial r} = \frac{g}{\omega} \sqrt{\frac{2k_0}{\pi r}} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \exp(k_0 z) \cdot \mathcal{H}(\theta) + O((k_0 r)^{-3/2}). \quad (12\beta)$$

όπου τώρα $k_0 = \omega^2 / g$.

Από τις σχέσεις (11) [ή (12), για νερό απείρου βάθους] βλέπουμε ότι για μεγάλες τιμές του (αδιάστατου) αριθμού $k_0 r$ ισχύει η ασυμπτωτική εκτίμηση

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + jk_0 \Phi \right) = O((k_0 r)^{-3/2}), \quad (13\alpha)$$

η οποία παρουσιάζεται ενίοτε και στην (ατελή) μορφή

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + jk_0 \Phi \right) = 0. \quad (13\beta)$$

Η σχέση (13α) [ή (13β)], η οποία εμφανίζει μια φορμαλιστική (και μόνο!) αναλογία με τη συνοριακή συνθήκη Robin [$\partial \Phi / \partial r + \sigma \Phi = 0$], είναι γνωστή ως «**συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld**» (Sommerfeld's radiation condition)⁽³⁾.

Η ποσότητα της πληροφορίας για το μακρινό πεδίο ροής που παρέχεται από τη συνθήκη (13α) [ή (13β)] είναι, τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως, μικρότερη αυτήν που παρέχεται μέσω των αναπαραστάσεων (11) και (12). Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις αυτή η «μειωμένη» πληροφορία είναι αρκετή για το χειρισμό των προβλημάτων ακτινοβολίας και περίθλασης, και γι' αυτόν ακριβώς το λόγο η απλουστευμένη «έπ' άπειρον συνθήκη» (13) έχει μεγάλη χρήση στη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του υδρομηχανικού συστήματος $[\Sigma + Y + EE]$.

⁽³⁾ Η συνθήκη αυτή εισήχθη από τον Sommerfeld στα πλαίσια της μελέτης της περίθλασης των ακουστικών κυμάτων. Βλ. σχετικά Sommerfeld (1949, σελ. 188). Η φυσική σημασία της συνθήκης Sommerfeld σχολιάζεται εκτενώς στο βιβλίο του Stoker (1957).

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο θεωρούμε σκόπιμο να τονίσουμε ότι η «έπ' άπειρον συνθήκη» (13), σε αντίθεση με όλες τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες για τα Φ_λ (βλ. σχέσεις (10β,γ,δ) του εδαφίου 2.2), δεν μπορεί να διατυπωθεί *a priori*, ως μια φυσική απαίτηση της βασικής μαθηματικής μοντελοποίησης, αλλά προκύπτει μετά από μια προσεκτική προκαταρκτική ανάλυση του (όχι συμπληρωμένου) προβλήματος που ορίζουν οι εξισώσεις (10α,γ,δ) του εδαφίου 2.2.

Βιβλιογραφικά σχόλια: Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για βαθύτερη και πληρέστερη μελέτη των Ειδικών Συναρτήσεων της Μαθηματικής Φυσικής (συμπεριλαμβανομένων, βεβαίως, και των συναρτήσεων $H_m^{(1,2)}(u)$, $I_m(u)$, $K_m(u)$), μπορεί να συμβουλευτεί τα εξαιρετικά –και βατά– βιβλία των Lebedev (1963/1965/1972), Nikiforov and Ouvarov (1974/1976) ή Hochstadt (1971/1986). Αναφέρουμε επίσης τα δύο “Standard” Handbooks of Special Functions (Αμερικανικό και Ρωσικό): Abramowitz and Stegun (1964/1972) και Gradshteyn and Ryzhik (1965). Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το βιβλίο των Zhang and Jin (1996), το οποίο παρουσιάζει σύνοψη θεωρητικών αποτελεσμάτων και προγράμματα (subroutines) σε FORTRAN-77 για τον υπολογισμό πολλών ειδικών συναρτήσεων. Τα τρία τελευταία βιβλία (Handbooks) παρουσιάζουν ένα τεράστιο αριθμό από μαθηματικά αποτελέσματα (π.χ. αναπτύγματα των ειδικών συναρτήσεων σε σειρές, ολοκληρωτικές αναπαράστασεις, ασυμπτωτικές αναπτύξεις για μεγάλες τιμές του ορίσματος (u) και της τάξης (m), γραφήματα, υπολογισμούς ορισμένων ολοκληρωμάτων των ειδικών συναρτήσεων, κ.ά. χρήσιμα αποτελέσματα), χωρίς αποδείξεις, αλλά με παραπομπές στις πηγές.

Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρουμε ότι σήμερα όλες οι ευρέως χρησιμοποιούμενες ειδικές συναρτήσεις υπολογίζονται άμεσα με τη βοήθεια **υπολογιστικών περιβαλλόντων** όπως το MATLAB, το MATHEMATICA ή το MAPLE. Τα δύο τελευταία είναι περιβάλλοντα «συμβολικών υπολογισμών» (symbolic calculations), και άρα είναι σε θέση να αναπαράγουν και αναλυτικές μαθηματικές ιδιότητες (μαθηματικά αποτελέσματα) των Ειδικών Συναρτήσεων, όπως π.χ. (τους περισσότερους από) τους τύπους που δίδονται στα θεωρητικά βιβλία και στα Handbooks.

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, 1964, republished by Dover Publications, Inc., 1972
- Hochstadt, H., *The Functions of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience, 1971, republished by Dover Publications, Inc., 1986
- Lebedev, N.N., *Special Functions & Their Applications*, Prentice-Hall, 1965 (translated from the 2nd Russian Edition of 1963), republished by Dover Publications, Inc., 1972
- Nikiforov, A. and Ouvarov, V., *Elements de la Theorie des Fonctions Speciales*, Nauka (in Russian) 1974, MIR Editions (traduction française), 1976
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, M.I., *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press, Inc., 1965
- Zhang, S. and Jin, J., *Computation of Special Functions*, John Wiley & Sons, Inc., 1996

Nikolai Yevgrafovich Kochin

Born: 1901 in St Petersburg, Russia

Died: 31 Dec 1944 in Moscow, USSR

[Show birthplace location](#)

[Previous](#) (Chronologically) [Next](#) [Biographies Index](#)

[Previous](#) (Alphabetically) [Next](#) [Main index](#)

Kochin graduated from Petrograd University (St Petersburg changed its name to Petrograd in 1914 and then to Leningrad in 1924) in 1923. He was appointed to Leningrad State University in 1924 and taught mathematics and mechanics there until 1934.

As an undergraduate he had already met [Pelageia Polubarinova](#) and the two found that they had much in common, for Kochin's research was on meteorology, gas dynamics and shock waves in compressible fluids. In 1925 [Pelageia Polubarinova](#) and Kochin married by simply registering the event. This was all that was necessary in Russia following the revolution.

Kochin moved Moscow University in 1934 and worked there for the rest of his life. In addition he was head of the mechanics section of the Mechanics Institute of the [USSR Academy of Sciences](#) from 1939 to 1944.

The German armies reached the outskirts of Moscow in late 1941 and his wife and two daughters were evacuated to Kazan. Kochin, however, remained in Moscow carrying out military research. By 1943 the German army had suffered defeats by Soviet troops and Moscow was safe enough for [Kochina](#) to return. This she did, but Kochin became ill and died before the end of the war. At the time of his death he had been in the middle of lecture courses and [Kochina](#) took over the courses and completed delivering them.

Kochin's research was on meteorology, gas dynamics and shock waves in compressible fluids. He gave the solution to the problem of small amplitude waves on the surface of an uncompressed liquid in *Towards a Theory of Cauchy-Poisson Waves* in 1935.

He also worked on the pitch and roll of ships. In aerodynamics he introduced formulae for aerodynamic force and for the distribution of pressure.

He wrote textbooks on hydromechanics and vector analysis.

Article by: *J J O'Connor* and *E F Robertson*

The URL of this page is: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Kochin.html>

2.6 Αναλυτικές ιδιότητες των γενικευμένων πρόσθετων μαζών, των αποσβέσεων και των φορτίσεων περίθλασης

Στο εδάφιο αυτό θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες των

- (Γενικευμένων) προσθέτων μαζών $A_{lk}(\omega)$ και αποσβέσεων $B_{lk}(\omega)$, και
- Διεγερουσών φορτίσεων περίθλασης $X_{dk}(\omega)$,

οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές τόσο από εννοιολογική όσο και από υπολογιστική σκοπιά. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

I.1) Οι πίνακες $(A_{lk}(\omega))_{6 \times 6}$ και $(B_{lk}(\omega))_{6 \times 6}$ είναι συμμετρικοί, δηλαδή

$$A_{lk}(\omega) = A_{kl}(\omega) \quad \text{και} \quad B_{lk}(\omega) = B_{kl}(\omega). \quad (1\alpha, \beta)$$

I.2) Οι συντελεστές απόσβεσης μπορούν να εκφραστούν μέσω της επ' άπειρον μορφής των πεδίων ακτινοβολίας (δηλαδή της ασυμπτωτικής μορφής των εξερχόμενων κυματισμών μακριά από το σώμα $[\Sigma]$) με τη βοήθεια της σχέσεως

$$B_{lk}(\omega) = \rho\omega \frac{\sigma(k_0 h)}{\pi k_0} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_l(\theta; \omega) \overline{\mathcal{H}_k(\theta; \omega)} d\theta, \quad (2\alpha)$$

όπου η σταθερά $\sigma(k_0 h)$ δίδεται από τη σχέση (21β) στη συνέχεια, και η συνάρτηση $\mathcal{H}_l(\theta; \omega)$ ορίζει την αζιμουθιακή κατανομή του μακρινού πεδίου των εξερχόμενων κυματισμών του προβλήματος ακτινοβολίας Φ_l , σύμφωνα με τη σχέση

$$\Phi_k(r, \theta, z; \omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh k_0 h} \cdot \mathcal{H}_k(\theta; \omega) + O((k_0 r)^{-3/2}). \quad (2\beta)$$

Η συνάρτηση $\mathcal{H}_l(\theta; \omega)$ αναφέρεται και ως *συνάρτηση Kochin του προβλήματος ακτινοβολίας* Φ_l . Εφαρμόζοντας τη σχέση (2α) για $l=k$, βρίσκουμε ότι $B_{kk}(\omega) \geq 0$.

I.3) Οι φορτίσεις (δυνάμεις και ροπές) περίθλασης μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των δυναμικών ακτινοβολίας Φ_k και προσπίπτοντος κυματισμού Φ_0 , από τη σχέση

$$X_{dk}(\omega) = (j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS_B. \quad (3)$$

Κατά συνέπεια, οι φορτίσεις περίθλασης μπορούν να υπολογισθούν χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα περίθλασης.

I.4) Οι συνολικές (Froude-Krylov και περίθλασης) διεγείρουσες φορτίσεις στην κατεύθυνση $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ του σώματος $[\Sigma]$, μπορούν να εκφραστούν μέσω του επ' άπειρον (ασυμπτωτικού) πλάτους κύματος του πεδίου ακτινοβολίας Φ_k στην (οριζόντια) κατεύθυνση $\theta_* = \pi + \beta$, όπου β είναι η γωνία που σχηματίζει ο προσπίπτον κυματισμός με τον άξονα x_1 [$\beta = \angle(\mathbf{i}_1, \mathbf{k})$], τη βοήθεια της σχέσεως

$$X_{0k}(\omega) + X_{dk}(\omega) = \rho g A \frac{\sigma(k_0 h)}{k_0} \mathcal{H}_k(\pi + \beta; \omega), \quad (4)$$

όπου $\sigma(c_0 h) = \frac{\sin 2k_0 h + 2k_0 h}{\cosh k_0 h + 1} \cdot [\mathcal{H}_k(\theta_*; \omega)]$ είναι η **συνάρτηση Kochin** που εμφα-

νίζεται στην ασυμπτωτική αναπαράσταση (2β) του δυναμικού ακτινοβολίας Φ_k].

Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη των ανωτέρω σημαντικών ιδιοτήτων των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών επιπλέοντος σώματος (καθώς και άλλων παρόμοιων αποτελεσμάτων, σημαντικών σε άλλες εφαρμογές) είναι το, γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση, **Θεώρημα Green** (βλ., π.χ., Παντελίδη, Μαθηματική Ανάλυση, τόμος ΙΙΙ, 1994, Καφάλαιο XV, Ολοκληρωτικοί τύποι, §3 Θεώρημα Gauss και ολοκληρωτικοί τύποι Green). Λόγω της μεγάλης σημασίας τους για τη μελέτη των υδροδυναμικών πεδίων, θα υπενθυμίσουμε τους ολοκληρωτικούς τύπους Green και ορισμένα συναφή αποτελέσματα, με τη βοήθεια των οποίων θα αποδείξουμε στη συνέχεια τις ιδιότητες **I.1) – I.4)**.

- Ολοκληρωτικοί τύποι Green. Γενικά

Η θεμελιώδης ολοκληρωτική ταυτότητα, από την οποία παράγονται όλα τα ολοκληρωτικά θεωρήματα (Green, Gauss, Stokes) είναι η ακόλουθη (Παντελίδης, ό.α., σελ. 530):

$$\iiint_D \Psi_{,k} dV = \iint_{\partial D} \Psi n_k dS, \quad (5)$$

όπου $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(x_1, x_2, x_3, t)$ είναι βαθμωτό πεδίο, ορισμένο στο **φραγμένο** χωρίο D , με **συνεχείς πρώτες παραγώγους στο** D , και **συνεχές στο κλειστό** $\bar{D} = D \cup \partial D$, όπου ∂D είναι το σύνορο του D . Το σύνορο ∂D υποτίθεται **κατά τμήματα λείο**, με συνέπεια το $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D (με φορά προς τα έξω σε σχέση με το D) να είναι καλά ορισμένο σχεδόν παντού στο ∂D . Εφαρμόζοντας την ταυτότητα (5) για $\Psi = \Psi_1 \Psi_{2,k}$, βρίσκουμε

$$\iiint_D \Psi_1 \cdot \Psi_{2,kk} dV + \iiint_D \Psi_{1,k} \Psi_{2,k} dV = \iint_{\partial D} \Psi_1 \cdot \Psi_{2,k} n_k dS. \quad (6\alpha)$$

Αθροίζοντας τώρα ως προς k , για $k = 1, 2, 3$, παίρνουμε

$$\iiint_D \Psi_1 \cdot \Delta \Psi_2 dV + \iiint_D \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Psi_2 dV = \iint_{\partial D} \Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dS. \quad (6\beta)$$

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των Ψ_1 και Ψ_2 , βρίσκουμε

$$\iiint_D \Psi_2 \cdot \Delta \Psi_1 dV + \iiint_D \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Psi_1 dV = \iint_{\partial D} \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} dS, \quad (6\gamma)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη τις (6β) και (6γ) παίρνουμε την

$$\iiint_D (\Psi_1 \cdot \Delta \Psi_2 - \Psi_2 \cdot \Delta \Psi_1) dV = \iint_{\partial D} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS, \quad (7\alpha)$$

που είναι γνωστή σαν **δεύτερη ταυτότητα του Green**. Στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις Ψ_1 και Ψ_2 είναι **αρμονικές**, δηλαδή αν ικανοποιούν την εξίσωση Laplace στο χωρίο D ,

$$\Delta\Psi_1 = 0, \quad \Delta\Psi_2 = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (8)$$

η (7α) παίρνει τη μορφή

$$\iint_{\partial D} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (7\beta)$$

- **Ολοκληρωτικοί τύποι Green. Εφαρμογή σε κυματικές συναρτήσεις**

Η ταυτότητα (7β) ισχύει για δύο οποιοσδήποτε συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση Laplace στο (αυθαίρετο αλλά) **φραγμένο χωρίο** D , με σύνορο ∂D φραγμένο και κατά τμήματα λείο. Στην περίπτωση των υδροδυναμικών πεδίων που αναπτύσσονται γύρω από επιπλέοντα σώματα (η οποία μας ενδιαφέρει εδώ) το πεδίο (χωρίο) ροής D εκτείνεται στο άπειρο (τουλάχιστον κατά την οριζόντια έννοια) γεγονός που δεν επιτρέπει την απ' ευθείας εφαρμογή της ταυτότητας (7β). Η δυσκολία αυτή αντιμετωπίζεται **εφαρμόζοντας** [κατ' αρχήν] **την (7β) στο φραγμένο τμήμα του πεδίου ροής** D_R , που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό ενός κατακόρυφου κυκλικού κυλίνδρου C_R με άξονα Ox_3 και ακτίνα R . Η ακτίνα R λαμβάνεται αρκετά μεγάλη ώστε το σώμα $[\Sigma]$ να βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στον κύλινδρο C_R (βλ., π.χ., Σχήμα 1 του εδαφίου 5). Το σύνορο ∂D_R του φραγμένου πεδίου D_R αποτελείται από τα ακόλουθα τμήματα:

- Τη βρεχόμενη επιφάνεια του επιπλέοντος σώματος ∂D_B (ολόκληρη!),
- Το τμήμα της ελεύθερης επιφάνειας που βρίσκεται στο εσωτερικό του C_R , το οποίο θα συμβολίζεται με $\partial D_{F,R}$ ⁽¹⁾
- Την κατακόρυφη παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου $\partial D_{Vert,R}$, και
- Το τμήμα του πυθμένα που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο C_R , το οποίο θα συμβολίζεται με $\partial D_{\Pi,R}$. Έχουμε δηλαδή

$$\partial D_R = \partial D_B \cup \partial D_{F,R} \cup \partial D_{Vert,R} \cup \partial D_{\Pi,R}. \quad (9)$$

Βάσει της (9), η δεύτερη ταυτότητα Green για αρμονικές συναρτήσεις, εφαρμοσμένη στο D_R γίνεται

$$\left(\iint_{\partial D_B} + \iint_{\partial D_{F,R}} + \iint_{\partial D_{Vert,R}} + \iint_{\partial D_{\Pi,R}} + \right) \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (10)$$

Εάν υποθέσουμε, επί πλέον, ότι οι συναρτήσεις Ψ_1 , Ψ_2 ικανοποιούν τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

$$\mu \Psi_k - \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F, \quad \mu = \omega^2 / g, \quad k=1,2, \quad (11\alpha)$$

⁽¹⁾ Αναφερόμαστε πάντοτε στις μέσες θέσεις των συνόρων του υγρού.

τότε

$$\iint_{\partial D_{F,R}} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = \iint_{\partial D_{F,R}} (\Psi_1 \cdot \mu \Psi_2 - \Psi_2 \cdot \mu \Psi_1) dS = 0, \quad (11\beta)$$

εφ' όσον $\partial \Psi_k / \partial n = \partial \Psi_k / \partial x_3$ πάνω στην (μέση) ελεύθερη επιφάνεια. Περαιτέρω, εάν οι Ψ_1, Ψ_2 ικανοποιούν και τη συνθήκη τυθμένα

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{\Pi}, \quad k=1,2, \quad (12\alpha)$$

τότε θα ισχύει προφανώς και η σχέση

$$\iint_{\partial D_{\Pi,R}} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (12\beta)$$

Οι αρμονικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες (11α) και (12α) λέγονται **κυματικές συναρτήσεις** (*wave functions*). Σύμφωνα με την ανωτέρω ανάλυση, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: [*H δεύτερη ταυτότητα Green για κυματικές συναρτήσεις*]: Εάν οι συναρτήσεις Ψ_1 και Ψ_2 ικανοποιούν τις εξισώσεις (8), (11α) και (12α), είναι δηλαδή κυματικές συναρτήσεις, τότε θα ικανοποιούν και την ταυτότητα

$$\iint_{\partial D_B} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left(\Psi_1 \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS. \quad \blacksquare \quad (13)$$

(Πάνω στον κύλινδρο $\partial D_{Vert,R}$ έχουμε $\partial \Psi / \partial n = \partial \Psi / \partial R$).

Μια πρώτη, άμεση, συνέπεια της ολοκληρωτικής ταυτότητας (13) είναι ότι το

Πόρισμα: Για κυματικές συναρτήσεις το ολοκλήρωμα

$$I_{Vert,R}(\Psi_1, \Psi_2) = \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left(\Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \right) dS = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{o}, \quad (14)$$

είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα R του κυλίνδρου C_R (βεβαίως, υπό την προϋπόθεση ότι ο C_R δεν τέμνει το επιπλέον σώμα). \blacksquare

- **Εφαρμογή της (13) για τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k, Φ_ℓ , και απόδειξη της ιδιότητας I.1)**

Ας εφαρμόσουμε τώρα την (13) για $(\Psi_1, \Psi_2) = (\Phi_k, \Phi_\ell)$, $k \neq \ell$. (Προφανώς τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k είναι κυματικές συναρτήσεις). Το «μακρινό» ολοκλήρωμα $I_{Vert,R}(\Phi_k, \Phi_\ell)$ υπολογίζεται εύκολα ως εξής: Προσθαφαιρώντας στην ολοκληρωτέα την ποσότητα $j k_0 \Phi_k \Phi_\ell$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
I_{Vert,R}(\Phi_k, \Phi_\ell) &= \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left\{ \Phi_k \left(\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial R} - jk_0 \Phi_\ell \right) - \Phi_\ell \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial R} - jk_0 \Phi_k \right) \right\} dS = \\
&= \int_{-h}^0 dx_3 \int_0^{2\pi} R d\theta \left\{ \Phi_k \left(\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial R} - jk_0 \Phi_\ell \right) - \Phi_\ell \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial R} - jk_0 \Phi_k \right) \right\} = \\
&= R \cdot \left\{ O(R^{-1/2}) \cdot O(R^{-3/2}) - O(R^{-1/2}) \cdot O(R^{-3/2}) \right\} = O(R^{-1}). \quad (15\alpha)
\end{aligned}$$

Οι εκτιμήσεις για τις τάξεις μεγέθους των διαφόρων όρων, που εμφανίζονται ανωτέρω, είναι άμεσες συνέπειες των ακόλουθων εκτιμήσεων (όταν $R \rightarrow \infty$) για τα δυναμικά ακτινοβολίας

$$\Phi_k = O(R^{-1/2}), \quad \text{και} \quad (16\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial R} - jk_0 \Phi_k = O(R^{-3/2}), \quad (16\beta)$$

οι οποίες παράγονται στο εδάφιο 2.5. (Βλ. σχέσεις (12α) και (13α) του εδαφίου 2.5). Όμως, όπως έχουμε ήδη αποδείξει, το ολοκλήρωμα $I_{Vert,R}(\Phi_k, \Phi_\ell)$ είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα R του κυλίνδρου C_R και άρα, βάσει και της (15α), βρίσκουμε

$$I_{Vert,R}(\Phi_k, \Phi_\ell) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{Vert,R}(\Phi_k, \Phi_\ell) = 0. \quad (15\beta)$$

Κατά συνέπεια, η ταυτότητα (13), εφαρμοσμένη για τα Φ_k, Φ_ℓ , $k \neq \ell$, παίρνει τη μορφή

$$\iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial R} dS = \iint_{\partial D_B} \Phi_\ell \frac{\partial \Phi_k}{\partial R} dS. \quad (16)$$

Η (16), σε συνδυασμό με τη σχέση ορισμού των γενικευμένων (μιγαδικών) πρόσθετων αδρανειακών συντελεστών $\Pi_{k\ell}(\omega)$, σχέση (3) του εδαφίου 2.3, μας δίνει

$$\Pi_{k\ell}(\omega) = \Pi_{\ell k}(\omega). \quad (17\alpha)$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $A_{k\ell}(\omega) = \text{Re}_j \{ \Pi_{k\ell}(\omega) \}$ και $B_{k\ell}(\omega) = -\omega \text{Re}_j \{ \Pi_{k\ell}(\omega) \}$, σύμφωνα με τη σχέση (5) του εδαφίου 2.3, βρίσκουμε ότι

$$A_{k\ell}(\omega) = A_{\ell k}(\omega) \quad \text{και} \quad B_{k\ell}(\omega) = B_{\ell k}(\omega). \quad (17\beta)$$

Αποδείχτηκε έτσι η ιδιότητα **I.1**).

- Εφαρμογή της (13) για τα δυναμικά $\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell$, και απόδειξη της ιδιότητας I.2). Ροή της ενέργειας στο άπειρο.

Διαφορετικά, και επίσης πολύ ενδιαφέροντα, αποτελέσματα παίρνουμε αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα (13) για $(\Psi_1, \Psi_2) = (\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$, όπου $\bar{\Phi}_\ell$ είναι η μιγαδική συζυγής συνάρτηση της Φ_ℓ , που είναι και αυτή μια **κυματική συνάρτηση**. Στην περίπτωση αυτή το «μακρινό» ολοκλήρωμα $I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$ δεν μηδενίζεται αλλά παίρνει μια συγκεκριμένη μορφή (τιμή), η οποία σχετίζεται με τη ροή της ενέργειας από το επιπλέον σώμα προς το άπειρο.

Για να υπολογίσουμε το $I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$ χρειαζόμαστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των δυναμικών Φ_k και $\bar{\Phi}_\ell$, όταν $R \rightarrow \infty$. Για τα δυναμικά Φ_k ισχύουν οι εκτιμήσεις (16α,β). Λαμβάνοντας το μιγαδικό συζυγή βρίσκουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τα δυναμικά $\bar{\Phi}_\ell$:

$$\bar{\Phi}_k = O(R^{-1/2}), \quad \text{και} \quad (18\alpha)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_k}{\partial R} + jk_0 \bar{\Phi}_k = O(R^{-3/2}). \quad (18\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) &= \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left(\Phi_k \frac{\partial \bar{\Phi}_\ell}{\partial n} - \bar{\Phi}_\ell \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right) dS = \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left(\Phi_k \frac{\partial \bar{\Phi}_\ell}{\partial R} - \bar{\Phi}_\ell \frac{\partial \Phi_k}{\partial R} \right) dS = \\ &= \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left\{ \Phi_k \cdot (-jk_0 \bar{\Phi}_\ell) - \bar{\Phi}_\ell \cdot (jk_0 \Phi_k) + O(R^{-2}) \right\} dS = \\ &= -2jk_0 \int_{-h}^0 dx_3 \int_0^{2\pi} R d\theta \left\{ \Phi_k \bar{\Phi}_\ell + O(R^{-2}) \right\} = \\ &= -2jk_0 \int_{-h}^0 dx_3 \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{R \Phi_k \bar{\Phi}_\ell}_{O(R^0)} + O(R^{-1}), \end{aligned}$$

εκ της οποίας προκύπτει

$$I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) = -2jk_0 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-h}^0 dx_3 \int_0^{2\pi} (R \Phi_k \bar{\Phi}_\ell) d\theta, \quad (19)$$

εφ' όσον το ολοκλήρωμα $I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$ είναι ανεξάρτητο του R , σύμφωνα με το Πόρισμα, ανωτέρω. Για να προχωρήσουμε ένα ακόμη βήμα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος (19) χρειαζόμαστε την ακριβή ασυμπτωτική έκφραση των δυναμικών Φ_k και $\bar{\Phi}_\ell$, όπως έχει παραχθεί στο Παράρτημα του Κεφαλαίου 2, δίδεται στη σχέση (11α) του εδαφίου 2.5⁽²⁾, και επαναλαμβάνεται χάριν ευκολίας στη σχέση (2β) του παρόντος εδαφίου. Βάσει αυτής βρίσκουμε,

$$R \Phi_k \bar{\Phi}_\ell = \frac{2}{\pi k_0} \frac{\cosh^2[k_0(x_3+h)]}{\cosh^2(k_0 h)} \mathcal{H}_k(\theta; \omega) \overline{\mathcal{H}_\ell(\theta; \omega)} + O(R^{-1}). \quad (20)$$

Εισάγοντας την (20) στην (19), υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int_{-h}^0 \cosh^2[k_0(x_3+h)] dx_3 = \frac{1}{2} \left(h + \frac{\sinh(2k_0 h)}{2k_0} \right),$$

⁽²⁾ Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή η «συνοπτική» επ' άπειρον συνθήκη [η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, σχέση (13) του εδαφίου 2.5] δεν επαρκεί, αλλά απαιτείται να καταφύγουμε στην ακριβή επ' άπειρον συμπεριφορά του δυναμικού, η οποία δίδεται από τη σχέση (11) του εδαφίου 2.5.

και θεωρώντας ότι το R τείνει στο άπειρο, βρίσκουμε

$$I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) = -\frac{2j\sigma(c_0h)}{\pi k_0} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_k(\theta; \omega) \overline{\mathcal{H}_\ell(\theta; \omega)} d\theta, \quad (21\alpha)$$

όπου

$$\sigma(c_0h) = \frac{\sin 2k_0h + 2k_0h}{\cosh k_0h + 1}. \quad (21\beta)$$

Όμως, σύμφωνα με την (13), το «μακρινό» ολοκλήρωμα (far-field integral) $I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$ ισούται και με το «κοντινό» (επί του σώματος) ολοκλήρωμα (near-field integral)

$$\begin{aligned} I_B(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) &= \iint_{\partial D_B} \left(\Phi_k \frac{\partial \bar{\Phi}_\ell}{\partial n} - \bar{\Phi}_\ell \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right) dS_B = [\text{οριακές συνθήκες στερεού σώματος}] \\ &= \iint_{\partial D_B} (\Phi_k n_\ell - \bar{\Phi}_\ell n_k) dS_B = \iint_{\partial D_B} \Phi_k n_\ell dS_B - \overline{\iint_{\partial D_B} \Phi_k n_k dS_B} = \\ &= 2j \operatorname{Im}_j \left\{ \iint_{\partial D_B} \Phi_k n_\ell dS_B \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Επί πλέον, σύμφωνα με τη σχέση (3β) του εδαφίου 2.3, έχουμε

$$\operatorname{Im}_j \left\{ \iint_{\partial D_B} \Phi_k n_\ell dS_B \right\} = -\frac{1}{\rho\omega} B_{k\ell}(\omega),$$

οπότε η (22) γίνεται

$$I_B(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) = -\frac{2j}{\rho\omega} B_{k\ell}(\omega). \quad (23)$$

Αξιοποιώντας τώρα την ταυτότητα $I_B(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell) = I_{Vert,R}(\Phi_k, \bar{\Phi}_\ell)$ [σχέση (13)], σε συνδυασμό με τις (21α) και (23), παίρνουμε τη σπουδαία ισότητα

$$B_{k\ell}(\omega) = \rho\omega \frac{\sigma(c_0h)}{\pi k_0} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_k(\theta; \omega) \overline{\mathcal{H}_\ell(\theta; \omega)} d\theta. \quad (24)$$

Η σχέση (24) αποτελεί, μεταξύ άλλων, απόδειξη του γεγονότος ότι, γενικά, $B_{k\ell}(\omega) \neq 0$, πράγμα που ισοδυναμεί με το ότι **οι ποσότητες $\Pi_{k\ell}(\omega)$ και $\Phi_k(\mathbf{x}, \omega)$ παίρνουν γενικά μιγαδικές τιμές**. Περαιτέρω, εφαρμόζοντας την (24) για $k = \ell$, βλέπουμε ότι $B_{kk}(\omega) \geq 0$, και άρα οι δυνάμεις $-\dot{\xi}_k(t; \omega) B_{kk}(\omega)$ είναι πάντοτε αντίρροπες ως προς την ταχύτητα $\dot{\xi}_k(t; \omega)$, αντιπροσωπεύουν δηλαδή πράγματι **δυνάμεις απόσβεσης**. Ολοκληρώνεται, έτσι, η απόδειξη της ιδιότητας **I.2**).

Τα παραπάνω συμπεράσματα για τους συντελεστές απόσβεσης προέκυψαν με τη βοήθεια της έπ' άπειρον συμπεριφοράς των δυναμικών ακτινοβολίας. Η σχέση των συντελεστών απόσβε-

σης με την ασυμπτωτική μορφή των δυναμικών ακτινοβολίας στο άπειρο έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα ενεργειακή εξήγηση: Το ταλαντευόμενο επιπλέον σώμα, μέσω των δυνάμεων απόσβεσης, διαβιβάζει ενέργεια στο νερό. Η **ενέργεια αυτή ακτινοβολείται εξ ολοκλήρου στο άπειρο** εφ' όσον:

- **1)** δεν μπορεί να απαχθεί δια μέσου της ελεύθερης επιφάνειας ή του πυθμένα,
- **2)** δεν μπορεί να καταναλωθεί στο εσωτερικό του υγρού, το οποίο έχει υποτεθεί ατριβές,
- **3)** δεν μπορεί να αυξάνει το μέσο ενεργειακό περιεχόμενο του νερού, το οποίο είναι σταθερό.

Κατά συνέπεια, η μέση (ανά περίοδο) ισχύς των δυνάμεων απόσβεσης θα πρέπει να ισούται με τη μέση ισχύ που ακτινοβολείται στο άπειρο από τους απομακρινόμενους κυματισμούς. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το σώμα $[\Sigma]$ εκτελεί την εξαναγκασμένη κίνηση

$$\xi_k(t; \omega) = \xi_{k0}(\omega) \cos(\omega t + \varepsilon_k), \quad (25)$$

τότε θα έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ενέργεια που ακτινοβολείται στο} \\ \text{άπειρο από τους απομακρινόμενους} \\ \text{κυματισμούς σε μία περίοδο} \end{array} \right\} \equiv - \int_0^T dt \iint_{\partial D_B} p(\mathbf{x}, t; \omega) \dot{\xi}_k(t; \omega) n_k dS_B =$$

$$= -\pi \omega \xi_{k0}^2(\omega) B_{kk}(\omega) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Ενέργεια διαβιβαζόμενη από το} \\ \text{σώμα στο υγρό δια μέσου του } \partial D \\ \text{σε μια περίοδο } T = 2\pi / \omega^2 \end{array} \right\} \equiv \int_0^T dt \iint_{\partial D_{vert,R}} \rho \dot{\Phi}_k(\mathbf{x}, t; \omega) \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}, t; \omega)}{\partial R} dS,$$

από την οποία, μετά την εκτέλεση των πράξεων, ξαναπαίρνουμε τη σχέση (24) για $k = \ell$. Ο αναγνώστης καλείται να εκτελέσει τους παραπάνω υπολογισμούς και να επαληθεύσει έτσι τη σχέση (24) για $\ell = k$.

- **Εφαρμογή της (13) για τα δυναμικά ακτινοβολίας και περίθλασης Φ_k, Φ_d , και απόδειξη των ιδιοτήτων I.3) και I.4)**

Θα εφαρμόσουμε τώρα τη συναρτησιακή ταυτότητα (13) (δεύτερη ταυτότητα Green για κυματικές συναρτήσεις) για το ζεύγος των κυματικών δυναμικών $(\Psi_1, \Psi_2) = (\Phi_k, \Phi_d)$. Επειδή τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k και περίθλασης Φ_d ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας (16), προκύπτει, όπως ακριβώς και στην πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε στο παρόν εδάφιο $[(\Psi_1, \Psi_2) = (\Phi_k, \Phi_\ell)]$, ότι $I_{vert,R}(\Phi_k, \Phi_d) = 0$. Άρα η (13) μας δίνει

$$\iint_{\partial D_B} \Phi_d \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} dS_B = \iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_d}{\partial n} dS_B. \quad (26)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούν τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k και περίθλασης Φ_d πάνω στο στερεό σύνορο ∂D_B του επιπλέοντος σώματος

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = n_k \quad \text{και} \quad \frac{\partial \Phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial n}, \quad (27)$$

και τη σχέση ορισμού της δύναμης περίθλασης, σχέση (2β) του εδαφίου 2.3, η (26) μας δίδει

$$X_{dk} \equiv -(j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_d n_k dS_B = (j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS_B. \quad (28)$$

Αποδεικνύεται έτσι και η ιδιότητα **I.3**).

Ας θεωρήσουμε τώρα τις συνολικές υδροδυναμικές διεγείρουσες δυνάμεις (Froude-Krylov και περίθλασης) $X_{exc,k} = X_{0k} + X_{dk}$. Σύμφωνα με τις σχέσεις (28) και (2α) του εδαφίου 2.3, έχουμε

$$X_{exc,k} = -j\omega^2 \rho A \iint_{\partial D_B} \left(\Phi_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right) dS_B. \quad (29\alpha)$$

Δεδομένου ότι τα δυναμικά Φ_0 και Φ_k είναι κυματικές συναρτήσεις, η (29), σε συνδυασμό με την ταυτότητα (13), μας δίδει

$$X_{exc,k} = -(j\omega)^2 \rho A \iint_{\partial D_{Vert,R}} \left(\Phi_0 \frac{\partial \Phi_k}{\partial R} - \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \right) dS_B. \quad (29\beta)$$

Συγκρίνοντας τις (ισοδύναμες) σχέσεις (29α) και (29β) για τις συνολικές υδροδυναμικές διεγείρουσες δυνάμεις παρατηρούμε ότι αυτές μπορούν να εκφραστούν *είτε*

- α)** μέσω ενός ολοκληρώματος πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος $[\Sigma]$ [σχέση (29α), ολοκλήρωση των πιέσεων πάνω στη γάστρα, near-field integration], *είτε*
- β)** μέσω ενός ολοκληρώματος πάνω σ' ένα μακρινό (κυλινδρικό ή άλλου σχήματος) σύνορο, όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα εξαρτάται μόνο από την επ' άπειρον συμπεριφορά των αντίστοιχων δυναμικών [σχέση (29β), ολοκλήρωση των εξερχόμενων κυματισμών στο άπειρο, far-field integration].

Οι σχέσεις (28) και (29β) εισήχθησαν και αποδείχθηκαν για πρώτη φορά από το σημαντικό Ρώσο φυσικό και εφαρμοσμένο μαθηματικό Haskind (Khaskind)⁽³⁾ το 1957 («The Exciting Forces and Wetting of Ships in Waves», *Izvestia Akademii Nauk*, No.7). Στη δύση αγνοήθηκαν για αρκετά χρόνια, πρακτικά μέχρι το 1962, οπότε ο καθηγητής του MIT N. Newman δημοσίευσε την εργασία του «Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves» (*Journal of Ship Research*, Vol. 3, No.6). Στην εργασία αυτή αναπαράγεται το αποτέλεσμα του Haskind και σχολιάζεται η χρησιμότητά του. Έκτοτε οι σχέσεις αυτές αναφέρονται ως **σχέσεις Haskind-Newman** (Haskind-Newman's relations), και αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο της Ναυτικής Υδροδυναμικής.

Με τη βοήθεια της σχέσης (29β) μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα **I.4**). Η απόδειξη αυτή δεν θα δοθεί εδώ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εξαιρετική

⁽³⁾ Maks Danilovich KHASKIND (1913-1963)

εργασία επισκόπησης του J.V. Wehausen⁽⁴⁾ («The Motion of Floating Bodies», Annual Review of Fluid Mechanics, 1971).

Άσκηση 1: Να υπολογίσετε την κατακόρυφη και την οριζόντια δύναμη περίθλασης που ασκούνται πάνω σε πλωτή δεξαμενή σφαιρικού σχήματος, ακτίνας a , η οποία βρίσκεται αγκυρωμένη σε βαθύ νερό και δέχεται την επίδραση απλών αρμονικών κυματισμών μήκους κύματος λ , συναρτήσει του πλάτους κύματος ακτινοβολίας μακριά από τη σφαίρα σε κατακόρυφη και οριζόντια ταλάντωση. Στη συνέχεια, να περιγράψετε μια πειραματική διαδικασία μέσω της οποίας μπορείτε να εκτιμήσετε τις ανωτέρω δυνάμεις περίθλασης μέσω πειραμάτων εξαναγκασμένης ταλάντωσης της σφαίρας σε ήρεμο νερό.

⁽⁴⁾ John Vrooman Wehausen (1913-2005), Professor of Engineering Sciences at the University of California, Berkeley. Σπουδαίος μαθηματικός και υδροδυναμικός, ο θεμελιωτής της αυστηρής και ταυτόχρονα δημιουργικής επιστημονικής προσέγγισης της υδροδυναμικής ελεύθερης επιφάνειας στις ΗΠΑ και ένας από τους μεγαλύτερους υδροδυναμικούς διεθνώς. Στο μνημειώδες άρθρο του, 350 σελίδων, "Surface Waves" (με τον Edmund Laitone, 1960), που περιλαμβάνεται στο Handbuch der Physik (Springer) δίδει μια πλήρη επισκόπηση του πεδίου της υδροδυναμικής ελεύθερης επιφάνειας και των εφαρμογών της μέχρι το 1960, κάνοντας γνωστά για πρώτη φορά στη δύση και τα σημαντικά αποτελέσματα των μεγάλων Ρώσων υδροδυναμικών και μαθηματικών στον τομέα αυτό. Το έργο αυτό παραμένει μέχρι σήμερα σημαντική πηγή αναφοράς και είναι διαθέσιμο (από το 2002) στο διαδίκτυο. Η online version αυτού μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση <http://www.coe.berkeley.edu/SurfaceWaves>. Δύο άλλα σπουδαία άρθρα επισκόπησης μεγάλης αξίας και κλασσικές πηγές αναφοράς είναι τα: "The Wave Resistance of Ships", in Advances in Applied Mechanics, 1974, και αναφερθέν ανωτέρω "The Motion of Floating Bodies", in Annual Review of Fluid Mechanics, 1971.

2.7 Γενικές μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης των υδροδυναμικών προβλημάτων ακτινοβολίας και περίθλασης.

Από την ανάλυση της παραγράφου 2.3 και ειδικότερα από τις σχέσεις (2β) και (2γ) για τις δυνάμεις περίθλασης και ακτινοβολίας αντίστοιχα, καθίσταται σαφές ότι για τον προσδιορισμό τους πρέπει να επιλυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών 6.2(25) που προσδιορίζουν τα δυναμικά περίθλασης και ακτινοβολίας. Όπως γνωρίζουμε από τα μαθήματα Μερικών Διαφορικών εξισώσεων, αναλυτικές (ή «σχεδόν» αναλυτικές) μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι διαθέσιμες μόνο για σώματα απλών γεωμετρικών μορφών (σφαίρες, κύλινδροι, ελλειψοειδή, κ.α.). Στην περίπτωση των προβλημάτων ακτινοβολίας και περίθλασης, η παρουσία της ελεύθερης επιφάνειας και του πυθμένα (όταν υπάρχει) εισάγουν πρόσθετες δυσκολίες, που καθιστούν τις αναλυτικές λύσεις εξαιρετικά δυσεύρετες και, άρα, πολύ μικρής πρακτικής χρησιμότητας. Ακόμη και τα (γεωμετρικώς) απλούστερα προβλήματα, αυτά που αντιστοιχούν σε **επιπέδον ημισφαίριο** και σε **επιπέδον κατακόρυφο κύλινδρο, δεν έχουν κλειστή αναλυτική λύση**. Επιλύονται όμως σχετικά εύκολα, με τη βοήθεια ημι-αναλυτικών τεχνικών (ειδικών αρμονικών συναρτήσεων σε τμήματα του πεδίου ροής και συναρμογής στις διεπιφάνειες) και θα παρουσιασθούν διεξοδικά στο επόμενο εδάφιο.

Στο παρόν εδάφιο θα περιγράψουμε δύο γενικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης των υδροδυναμικών προβλημάτων ακτινοβολίας και περίθλασης, οι οποίες εφαρμόζονται σε σώματα γενικής γεωμετρίας και οδηγούν σε λύσεις με τη βοήθεια προγραμμάτων H/Y. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στην αναδιατύπωση των προβλημάτων συνοριακών τιμών σε **ολοκληρωτικές εξισώσεις** ή σε **μεταβολικές εξισώσεις**.

2.7.1 Η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αναδιατύπωση του πλήρους προβλήματος συνοριακών τιμών στη μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης ως προς τις τιμές του άγνωστου πεδίου του δυναμικού ταχύτητας πάνω στο σύνορο του πεδίου ροής (ή σε τμήμα του συνόρου του πεδίου ροής). Θα παρουσιάσουμε μία από τις πολλές παραλλαγές με την οποίες εμφανίζεται η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, αυτή που προκύπτει με εφαρμογή της δεύτερης ταυτότητας Green,

$$\iiint_D (\Phi \cdot \Delta G - G \cdot \Delta \Phi) dV = \iint_{\partial D} \left(\Phi \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad (1)$$

όπου Φ είναι το άγνωστο (ζητούμενο) δυναμικό ταχύτητας, και G είναι το πεδίο μιας κατάλληλης **συνάρτησης Green** του υδροδυναμικού προβλήματος. Αρχίζουμε με την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης Green, η οποία –με τη σειρά της– βασίζεται στην έννοια της **θεμελιώδους λύσης (fundamental solution)** της αντίστοιχης πεδιακής εξίσωσης (εν προκειμένω, της εξίσωσης Laplace). ιδιόμορφης λύσης (singular solution)

2.7.1.α Θεμελιώδης λύση και ιδιόμορφες λύσεις της εξίσωσης Laplace

Έστω $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in D$ ένα σταθερό σημείο του πεδίου ροής D , και $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$ το γενικό πεδιακό σημείο στο D . Εύκολα επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση (πεδίο)

$$\tilde{F}_{\xi}(\mathbf{x}) = \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}} \quad (2)$$

ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\Delta_x \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi) = \frac{\partial^2 \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_3^2} = 0, \quad \text{για } \mathbf{x} \in D - \{\xi\}. \quad (3)$$

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $\tilde{F}(\mathbf{x}|\xi) = 1/\|\mathbf{x}-\xi\|$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\Delta_x \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \xi$.

Η συνάρτηση $\tilde{F}(\mathbf{x}|\xi) = 1/\|\mathbf{x}-\xi\|$ είναι η απλούστερη **ιδιόμορφη λύση (singular solution) της εξίσωσης Laplace**, η οποία ονομάζεται και **θεμελιώδης λύση (fundamental solution)**. Η λύση αυτή αναφέρεται και ως **σημειακή πηγή (source function)**, διότι εισάγει μια σταθερή παροχή όγκου στο πεδίο. Αυτό προκύπτει εύκολα, αν υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της ροής

$$\iint_{\partial S(\xi, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} \right) ds, \quad (4)$$

πάνω στην επιφάνεια $\partial S(\xi, \varepsilon)$ σφαίρας $S(\xi, \varepsilon)$, κέντρου ξ και ακτίνας ε . [\mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη σφαιρική επιφάνεια, κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό της σφαίρας, και $\partial \bullet / \partial n$ είναι η αντίστοιχη κάθετη παράγωγος.] Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) ⁽¹⁾, με κέντρο το σημείο ξ , έχουμε

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -r^{-2}, \quad (5\alpha, \beta)$$

ενώ το εμβαδικό στοιχείο $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Άρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα (4) ισούται με

$$\iint_{\partial S(\xi, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} \right) ds = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (-r^{-2}) \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -2\pi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta d\theta = -4\pi. \quad (5\gamma)$$

⁽¹⁾ θ είναι η πολική γωνία, που παίρνει τιμές $0 \leq \theta \leq \pi$, και φ είναι η αζιμουθιακή γωνία, που παίρνει τιμές $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Δηλαδή, από το ιδιόμορφο σημείο ξ «αναβλύζει» μια σταθερή παροχή (όγκου) ίση με -4π . (Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το σημείο ξ λειτουργεί ως καταβόθρα δια της οποίας απάγεται παροχή. Η διάκριση σε πηγή ή καταβόθρα ρυθμίζεται από το πρόσημο και δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω). Προκειμένου να κανονικοποιήσουμε την παροχή διαιρούμε τη θεμελιώδης λύση $\tilde{F}_\xi(\mathbf{x}) = \tilde{F}(\mathbf{x}|\xi)$ με τον παράγοντα $1/(-4\pi)$, ώστε να αντιστοιχεί σε μοναδιαία παροχή:

$$F_\xi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}|\xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\xi\|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}}. \quad (6)$$

Όπως βλέπουμε από τη σχέση ορισμού της [εξ. (1) ή (6)] η θεμελιώδης λύση εμφανίζει σφαιρική συμμετρία γύρω από το σημείο ξ . Βλ. επίσης την εξ. (5α).

Κάθε (μερική ή κατευθυντική) παράγωγος της $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}|\xi)$ είναι επίσης μια ιδιόμορφη λύση της εξίσωσης Laplace. Οι παράγωγοι της θεμελιώδους λύσης τάξεως k , δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$M_{a,b,c}(\mathbf{x}|\xi) = \frac{\partial^{a+b+c} F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c}, \quad \text{όπου } a+b+c = k, \quad (7)$$

(και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους) είναι επίσης **ιδιόμορφες λύσεις της εξίσωσης Laplace**, και ονομάζονται **πολύπολα (multipoles)** τάξεως k (της εξίσωσης Laplace). Ειδικότερα, οι πρώτες παράγωγοι ονομάζονται **δίπολα (dipoles)**. Σε αντίθεση με την πηγή, που εμφανίζει σφαιρική συμμετρία, τα πολύπολα είναι κατευθυντικές συναρτήσεις (πεδία). Δίδουμε, ως παράδειγμα, τις μορφές των διπόλων:

$$M_{100}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_1 - \xi_1}{\|\mathbf{x} - \xi\|^3} \quad \text{είναι δίπολο κατά τον άξονα } Ox_1$$

$$M_{010}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_2} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_2 - \xi_2}{\|\mathbf{x} - \xi\|^3} \quad \text{είναι δίπολο κατά τον άξονα } Ox_2$$

$$M_{001}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_3} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_3 - \xi_3}{\|\mathbf{x} - \xi\|^3} \quad \text{είναι δίπολο κατά τον άξονα } Ox_3$$

και

$$M_{111}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = p_1 \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \xi)}{\|\mathbf{x} - \xi\|^3}$$

είναι δίπολο κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Άσκηση 2: Να αποδείξετε ότι κάθε (μερική ή κατευθυντική) παράγωγος της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Laplace ικανοποιεί και αυτή την εξίσωση Laplace για κάθε $\mathbf{x} \neq \xi$.

- Η θεμελιώδης λύση ως γενικευμένη συνάρτηση

Μια σημαντική ιδιότητα της θεμελιώδους λύσεως είναι ότι επαληθεύει την εξίσωση

$$\Delta_x F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_3^2} = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

όπου $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) \equiv \delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)$ είναι η γνωστή μας (γενικευμένη) συνάρτηση δέλτα (ή συνάρτηση Dirac). Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση Dirac $\mathbf{x} \rightarrow \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$, με πεδίο ορισμού ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, όπου $\boldsymbol{\xi}$ ένα σταθερό σημείο στο εσωτερικό του Ω , ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} = \sigma(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega). \quad (9)$$

Η συνθήκη $\forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega)$ δηλώνει ότι η ισότητα (9) πρέπει να ισχύει για κάθε λεία (άπειρες φορές παραγωγίσιμη) συνάρτηση σ , η οποία (όπως και οι παράγωγοι κάθε τάξεως αυτής) τείνει επαρκώς γρήγορα στο μηδέν, όταν το \mathbf{x} τείνει στο σύνορο του Ω . Γνωρίζουμε επίσης ότι η συνάρτηση Dirac $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ είναι μηδενική για κάθε $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$. Λέμε συνήθως ότι, στο σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, η $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ απειρίζεται. Σωστότερο ακόμη είναι ότι στο σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ η $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ δεν έχει τιμή.

Αυστηρά μιλώντας, η εξίσωση (8) νοείται στο πλαίσιο της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων, την οποία δεν θα αναπτύξουμε εδώ. Θα εισαγάγουμε μόνο εκείνα τα στοιχεία της θεωρίας (και μάλιστα με απλουστευμένο τρόπο) τα οποία θα μας επιτρέψουν να καταλάβουμε και να αποδείξουμε την ισότητα (8), την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα εδάφια. Αρχίζουμε σημειώνοντας ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις δεν ορίζονται μέσω των («σημειοακών») τιμών τους, αλλά μέσω της ολοκληρωτικής δράσης τους πάνω σε λείες συναρτήσεις. Ως συνέπεια αυτού, η ισότητα δύο γενικευμένων συναρτήσεων, έστω των f_1, f_2 , με πεδίο ορισμού ένα χωρίο Ω ⁽²⁾, σημαίνει (εξ ορισμού) ότι ισχύει η σχέση

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega). \quad (10)$$

⁽²⁾ Μια γενικευμένη συνάρτηση «δεν υπάρχει» (δεν είναι καλά ορισμένη) αν δεν προκαθορίσουμε το πεδίο ορισμού της. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό από τις εξισώσεις (9) και (10). Σημειώνουμε επίσης ότι τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις σχέσεις (9) και (10), γενικώς, δεν υπάρχουν με την κλασσική έννοια του ολοκληρώματος (κατά Riemann ή κατά Lebesgue). Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τέτοιες «λεπτομέρειες» θα πρέπει να ανατρέξει στην ειδική βιβλιογραφία.

Η οικογένεια των γενικευμένων συναρτήσεων περιλαμβάνει και τις συνήθεις συναρτήσεις, ως ειδικές περιπτώσεις. Επίσης, μια γενικευμένη συνάρτηση μπορεί να ταυτίζεται με μια συνήθη συνάρτηση σε ένα τμήμα του πεδίου ορισμού της (όπως η συνάρτηση Dirac). Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να την χειριζόμαστε κατά τα γνωστά (των συνήθων συναρτήσεων) στο τμήμα αυτό.

Οι γενικευμένες συναρτήσεις παραγωγίζονται οσοσδήποτε φορές. Η παράγωγος $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2, 3$, της γενικευμένης συνάρτησης f , ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega). \quad (11\alpha)$$

[Προσοχή! Η σχέση (11α) δεν είναι ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Είναι σχέση ορισμού της $\partial f / \partial x_i$, η οποία είναι συμβατή με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, που ισχύει για τις συνήθεις συναρτήσεις.] Παρόμοια ορίζονται οι παράγωγοι κάθε τάξεως της f . Π.χ., η παράγωγος

$$\frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c} f$$

ορίζεται από τη σχέση

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial^{a+b+c} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c} d\mathbf{x} = (-1)^{a+b+c} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial^{a+b+c} \sigma(\mathbf{x})}{\partial x_1^a \partial x_2^b \partial x_3^c} d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega), \quad (11\beta)$$

και, άρα, η Laplacian $\Delta_x F(\mathbf{x}|\xi)$ της θεμελιώδους λύσης ορίζεται, στο πλαίσιο της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων, από τη σχέση

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \Delta_x F(\mathbf{x}|\xi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}|\xi) \Delta \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega). \quad (11\gamma)$$

Με τη βοήθεια των ανωτέρω παρατηρήσεων μπορούμε να αποδείξουμε την ισχύ της εξίσωσης (8), στο πλαίσιο της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων. Σύμφωνα με τον ορισμό (10), της ισότητας των γενικευμένων συναρτήσεων, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{x}) \Delta_x F(\mathbf{x}|\xi) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\xi) d\mathbf{x} \equiv \sigma(\xi), \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (12\alpha)$$

Λόγω της (11γ), η αποδεικτέα (12α) γίνεται

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}|\xi) \Delta \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sigma(\xi), \quad \forall \sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (12\beta)$$

Επειδή το χωρίο \mathbb{R}^3 είναι άπειρο και οι $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ και $\Delta_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ δεν ορίζονται (απειρίζονται, αν προτιμάτε!) στο σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, θα εργασθούμε κατ' αρχήν στο χωρίο

$$D(R, \varepsilon) = S(\boldsymbol{\xi}, R) - S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon),$$

δηλαδή στο χωρίο μεταξύ δύο σφαιρών με κέντρο το σημείο $\boldsymbol{\xi}$, μιας «μεγάλης», με ακτίνα R , και μιας «μικρής», με ακτίνα ε , και στη συνέχεια θα πάρουμε το όριο για $R \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$. Ας σημειωθεί ότι στο χωρίο $D(R, \varepsilon)$ όλες οι συναρτήσεις ταυτίζονται με συνήθεις συναρτήσεις, και άρα τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μπορούμε να τα χειρισθούμε κατά τα γνωστά.

Αρχίζουμε εφαρμόζοντας τη δεύτερη ταυτότητα Green, εξ. (1), στις συναρτήσεις $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ και $\sigma(\mathbf{x})$:

$$\iiint_{D(R, \varepsilon)} (\sigma(\mathbf{x}) \cdot \Delta_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) - F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \sigma(\mathbf{x})) dV = \iint_{\partial D(R, \varepsilon)} \left(\sigma(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} - F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial n} \right) dS.$$

Στο χωρίο $D(R, \varepsilon)$ η $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ ταυτίζεται με την κλασσική συνάρτηση $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|}$ και ισχύει η (3). Άρα η ανωτέρω ολοκληρωτική ταυτότητα απλουστεύεται στη μορφή

$$\iiint_{D(R, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \sigma(\mathbf{x}) dV = \iint_{\partial D(R, \varepsilon)} \left(F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial n} - \sigma(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} \right) dS. \quad (13\alpha)$$

Επειδή η λεία συνάρτηση $\sigma(\mathbf{x})$ και οι παράγωγοι αυτής $\partial \sigma(\mathbf{x}) / \partial x_i$ και $\Delta \sigma(\mathbf{x})$ τείνουν γρήγορα στο μηδέν όταν $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, το όριο του χωρικού ολοκληρώματος

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iiint_{D(R, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \sigma(\mathbf{x}) dV = \iiint_{\mathbb{R}^3 - S(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \sigma(\mathbf{x}) dV$$

υπάρχει και το όριο του επιφανειακού ολοκληρώματος πάνω στη «μεγάλη» σφαίρα μηδενίζεται:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\partial S(\boldsymbol{\xi}, R)} \left(F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \sigma(\mathbf{x})}{\partial n} - \sigma(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} \right) dS = 0.$$

Άρα η (13α) απλουστεύεται στην

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 - S(\xi, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\xi) \cdot \Delta\sigma(\mathbf{x}) dV = \iint_{\partial S(\xi, \varepsilon)} \left(F(\mathbf{x}|\xi) \cdot \frac{\partial\sigma(\mathbf{x})}{\partial n} - \sigma(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial F(\mathbf{x}|\xi)}{\partial n_x} \right) dS \quad (13\beta)$$

Περαιτέρω, επειδή η ιδιόμορφη συνάρτηση $F(\mathbf{x}|\xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \xi\|}$ είναι ολοκληρώσιμη σε χωρία που περιέχουν το σημείο ιδιομορφίας $\mathbf{x} = \xi$ (REF []), το όριο

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}^3 - S(\xi, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\xi) \cdot \Delta\sigma(\mathbf{x}) dV$$

υπάρχει και

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}^3 - S(\xi, \varepsilon)} F(\mathbf{x}|\xi) \cdot \Delta\sigma(\mathbf{x}) dV = \iiint_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}|\xi) \cdot \Delta\sigma(\mathbf{x}) dV. \quad (14)$$

Υπολείπεται τώρα ο υπολογισμός των επιφανειακών ολοκληρωμάτων πάνω στη επιφάνεια $\partial S(\xi, \varepsilon)$ της «μικρής» σφαίρας, και η εύρεση του ορίου τους για $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.7.1.β Συναρτήσεις Green και ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων προβλημάτων συνοριακών τιμών

Η συνάρτηση Green είναι ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε ένα χωρίο D , με σύνορα. Η συνάρτηση Green (της εξίσωσης Laplace) στο χωρίο D ικανοποιεί, εξ ορισμού, την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial x_3^2} = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1\alpha)$$

και **ομογενείς συνοριακές συνθήκες** στο σύνορο ∂D χωρίου D . Έτσι, αν το χωρίο D δεν έχει σύνορα (δηλαδή αν $D = \mathbb{R}^3$), η συνάρτηση Green ταυτίζεται με τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace. [Βλ. εξίσωση (.) του εδαφίου 2.7.1.α].

Σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν στο εδάφιο 2.7.1.α, η γενική μορφή της συνάρτησης Green της εξίσωσης Laplace σε ένα χωρίο D είναι

$$G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) + H(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|} + H(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}), \quad (1\beta)$$

όπου $H(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ είναι μια αρμονική συνάρτηση, ομαλή σε ολόκληρο το χωρίο D . Η ομαλή αυτή συνάρτηση εισάγεται προκειμένου η συνάρτηση Green $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ να ικανοποιεί τις (ομογενείς) συνοριακές συνθήκες του προβλήματος συνοριακών τιμών που θέλουμε να επιλύσουμε στο χωρίο D .

Θα αναπτύξουμε τη μέθοδο επίλυσης (ή αναγωγής σε ολοκληρωτική εξίσωση) προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια της συνάρτησης Green, εργαζόμενοι με το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών, στο **φραγμένο χωρίο** D ⁽³⁾:

Πρόβλημα \mathcal{P} : Να βρεθεί το δυναμικό $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Poisson (Laplace με διέγερση στο δεξιά μέλος)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = g_0, \quad \text{στο χωρίο } D, \quad (2\alpha)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

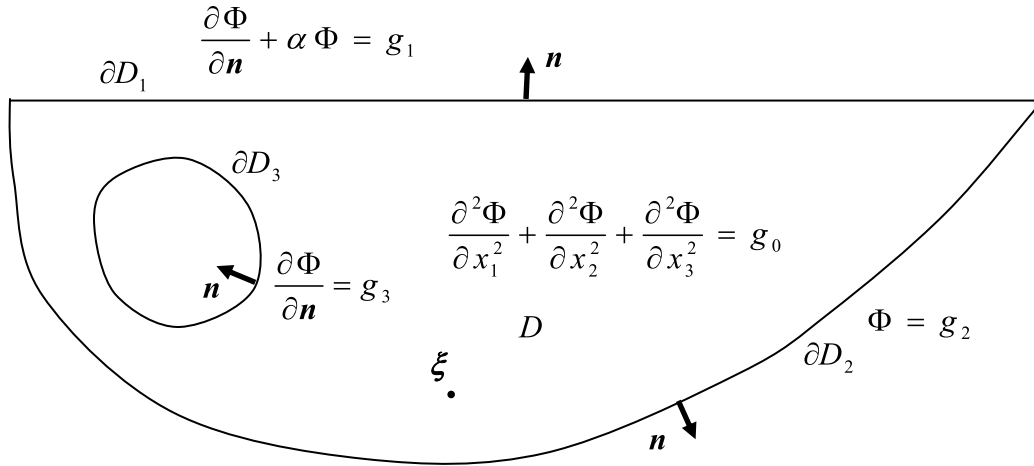
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} + \alpha \Phi = g_1, \quad \text{στο τμήμα } \partial D_1 \text{ του συνόρου του } D, \quad (2\beta)$$

$$\Phi = g_2, \quad \text{στο τμήμα } \partial D_2 \text{ του συνόρου του } D, \quad (2\gamma)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = g_3, \quad \text{στο τμήμα } \partial D_3 \text{ του συνόρου του } D, \quad (2\delta)$$

⁽³⁾ Εργαζόμεθα, κατ' αρχήν, σε φραγμένο χωρίο χάριν απλότητας. Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τη μέθοδο σε μη φραγμένα χωρία, όπως αυτά που εμφανίζονται στα υδροδυναμικά προβλήματα ακτινοβολίας και περίθλασης.

όπου α είναι μια σταθερά και g_1, g_2, g_3 είναι γνωστές συναρτήσεις, ορισμένες επί των συνόρων $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$, αντιστοίχως.



Σχόλιο: Συνοριακές συνθήκες του τύπου $\Phi = g$ ονομάζονται **συνθήκες Dirichlet**, συνοριακές συνθήκες του τύπου $\partial \Phi / \partial n = g$ ονομάζονται **συνθήκες Neumann**, και συνοριακές συνθήκες του τύπου $\partial \Phi / \partial n + \alpha \Phi = g$ ονομάζονται **συνθήκες Robin**.

Ορισμός: Κάθε συνάρτηση $G(\mathbf{x}|\xi)$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial x_3^2} = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (3\alpha)$$

όπου $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ είναι ένα σταθερό σημείο του πεδίου D , και μια τουλάχιστον από τις συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος \mathcal{P} με μηδενικό δεξιά μέλος, δηλαδή μια τουλάχιστον από τις συνθήκες

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial n} + \alpha G(\mathbf{x}|\xi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_1, \quad (3\beta)$$

$$G(\mathbf{x}|\xi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_2, \quad (3\gamma)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_3, \quad (3\delta)$$

θα λέγεται **συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P}** . Η συνάρτηση Green που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος \mathcal{P} (στην ομογενή παραλλαγή τους) θα αναφέρεται ως **πλήρης συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P}** .

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace, δηλαδή η συνάρτηση $F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ που ικανοποιεί μόνο την εξίσωση (3α), θεωρείται και αυτή ως μια συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P} . Η συνάρτηση αυτή θα αναφέρεται και ως **απλή πηγή** ή **free-space Green function**. ■

Με άλλα λόγια, η πλήρης συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P} ικανοποιεί το ίδιο πρόβλημα συνοριακών τιμών με απλουστευμένες διεγέρσεις (τη συνάρτηση Dirac $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ στη διαφορική εξίσωση και μηδενικές διεγέρσεις στις συνοριακές συνθήκες), ενώ μια οποιαδήποτε (μερική) συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P} ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του αρχικού προβλήματος με διεγερση $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ και ένα υποσύνολο των συνοριακών συνθηκών (στην ομογενή παραλλαγή τους).

Είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός της πλήρους συναρτήσεως Green είναι πρακτικά το ίδιο δύσκολος με την επίλυση του αρχικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Ως εκ τούτου δεν είναι παράξενο το ότι (όπως θα δούμε στη συνέχεια), η γνώση της πλήρους συναρτήσεως Green μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε πλήρως τη λύση αρχικού Προβλήματος \mathcal{P} . Όσο λιγότερες συνοριακές συνθήκες απαιτήσουμε να ικανοποιεί μια συνάρτηση Green τόσο ευκολότερα μπορούμε να την προσδιορίσουμε. Στην ακραία περίπτωση όπου δεν επιβάλουμε καμιά συνοριακή συνθήκη, έχουμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace, η οποία είναι ήδη γνωστή. Η μεγάλη σημασία των συναρτήσεων Green προκύπτει από το γεγονός ότι μια οποιαδήποτε (μερική) συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P} μας επιτρέπει να αναγάγουμε το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία είναι ιδιαίτερα βολική για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Αυτό προκύπτει ως εξής:

Εφαρμόζουμε τη δεύτερη ταυτότητα Green,

$$\iiint_D (\Phi(\mathbf{x}) \cdot \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x, \quad (4)$$

όπου Φ είναι το (άγνωστο) δυναμικό ταχύτητας που επιλύει το πρόβλημα (2), και G είναι η (πλήρης) συνάρτηση Green του ίδιου προβλήματος, που ικανοποιεί τις εξισώσεις (3). Λόγω των (2α) και (3α), το αριστερά μέλος της (4) γράφεται

$$\iiint_D (\Phi(\mathbf{x}) \cdot \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\xi}) - \iiint_D G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5a)$$

Το δεξιά μέλος της εξίσωσης (4) αναλύεται σε άθροισμα πάνω στα τρία τμήματα ∂D_1 , ∂D_2 , ∂D_3 του συνόρου ∂D (εφ' όσον $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3$). Εξετάζουμε τους τρεις όρους ξεχωριστά. Στο ολοκλήρωμα πάνω στο ∂D_1 εργαζόμαστε ως εξής:

$$\iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x = \quad [\text{προσθαφαιρούμε τον όρο } \alpha \Phi(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})]$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha \Phi(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) - \alpha \Phi(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x = \\
&= \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \left(\alpha \Phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) \right) dS_x = \\
&= \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_1(\mathbf{x}) \right) dS_x. \quad (4) \tag{5\beta}
\end{aligned}$$

Τα ολοκληρώματα στα τμήματα ∂D_2 και ∂D_3 εκφράζονται άμεσα μέσω της συνάρτησης Green και των διεγέρσεων g_2, g_3 :

$$\iint_{\partial D_2} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x = \iint_{\partial D_2} \left(g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x, \quad (5) \tag{5\gamma}$$

$$\iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x = \iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) dS_x. \quad (6) \tag{5\delta}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5α), (5β), (5γ) και (5δ) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\Phi(\boldsymbol{\xi}) &= \iiint_D G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
&\quad + \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_1(\mathbf{x}) \right) dS_x + \\
&\quad + \iint_{\partial D_2} \left(g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x + \\
&\quad + \iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) dS_x. \tag{6}
\end{aligned}$$

Θα μελετήσουμε τώρα τη σημασία και τις συνέπειες της ανωτέρω ολοκληρωτικής αναπαράστασης (6).

⁽⁴⁾ Εάν η συνάρτηση Green ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (3β), τότε ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται.

⁽⁵⁾ Εάν η συνάρτηση Green ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (3γ), τότε ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται.

⁽⁶⁾ Εάν η συνάρτηση Green ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (3δ), τότε ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται.

1. Η ανωτέρω σχέση ισχύει για κάθε συνάρτηση Green του Προβλήματος \mathcal{P} (και για τη θεμελιώδη λύση), δεδομένου ότι δεν έχουμε (μέχρις εδώ) χρησιμοποιήσει συνοριακές συνθήκες για την $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$.

2. Η σχέση (6) εκφράζει το πεδιακό δυναμικό $\Phi(\boldsymbol{\xi})$, σε κάθε σημείο $\boldsymbol{\xi}$, εσωτερικό του πεδίου ροής, μέσω ολοκληρωμάτων της συνάρτησης Green (και της κάθετης παραγώγου της $\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})/\partial \mathbf{n}_x$ στο σύνορο ∂D) και των συνοριακών τιμών $\Phi(\mathbf{x})$ και $\partial\Phi(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}$ του ζητούμενου δυναμικού. Κατά συνέπεια, η σχέση (6), σε συνδυασμό με την επιλογή $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$, αποδεικνύει ότι το δυναμικό σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ροής ορίζεται πλήρως από τις συνοριακές τιμές του $\Phi(\mathbf{x})$ και τις συνοριακές τιμές της κάθετης (στο σύνορο) παραγώγου $\partial\Phi(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}$, $\mathbf{x} \in \partial D$.

3. Εάν το δεξιά μέλος της πεδιακής εξίσωσης (2α) είναι μηδέν ($g_0(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in D$), όπως συμβαίνει στα υδροδυναμικά προβλήματα ακτινοβολίας και περίθλασης τα οποία πρωτίστως μας ενδιαφέρουν, τότε το χωρικό ολοκλήρωμα $\iiint G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ μηδενίζεται.

4. Αν επιλέξουμε για $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ τη συνάρτηση Green που ικανοποιεί τη συνθήκη (3γ) (δηλαδή τη συνθήκη $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial D_2$), τότε ο όρος που περιέχει την κάθετη παράγωγο του (ζητούμενου) δυναμικού, $\partial\Phi(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}$, στο τμήμα του συνόρου ∂D_2 , μηδενίζεται. Κατά συνέπεια, υπό τις προϋποθέσεις $g_0(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in D$, και $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial D_2$, η σχέση (6) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\xi}) = & \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) - G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \cdot g_1(\mathbf{x}) \right) dS_x + \\ & + \iint_{\partial D_2} g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x + \iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} - g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) \right) dS_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Η σχέση (7) αποδεικνύει ότι, με τη βοήθεια μιας συνάρτησης Green που ικανοποιεί την ομογενή συνθήκη Dirichlet στα τμήματα του συνόρου όπου το (ζητούμενο) δυναμικό ικανοποιεί συνθήκη Dirichlet (όχι κατ' ανάγκην ομογενή), η τιμή του πεδιακού δυναμικού $\Phi(\boldsymbol{\xi})$, σε κάθε σημείο $\boldsymbol{\xi}$ εσωτερικό του πεδίου ροής, εκφράζεται μέσω επιφανειακών (συνοριακών) ολοκληρωμάτων της συνάρτησης Green (και της κάθετης παραγώγου της, $\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})/\partial \mathbf{n}_x$, στο σύνορο ∂D), και των συνοριακών τιμών $\Phi(\mathbf{x})$ του ζητούμενου δυναμικού.

5. Αν επιλέξουμε για $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})$ τη συνάρτηση Green που ικανοποιεί τις συνθήκες (3β) και (3γ) (δηλαδή, $\partial G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi})/\partial \mathbf{n} + \alpha G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial D_1$, και $G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial D_2$), τότε και ο πρώτος όρος του πρώτου ολοκληρώματος στο δεξιά μέλος της (7) μηδενίζεται, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & - \iint_{\partial D_1} G(\mathbf{x}|\xi) \cdot g_1(\mathbf{x}) dS_x + \iint_{\partial D_2} g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x + \\ & + \iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} - g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\xi) \right) dS_x. \end{aligned} \quad (8)$$

6. Αν επιλέξουμε για $G(\mathbf{x}|\xi)$ την πλήρη συνάρτηση Green (δηλαδή τη συνάρτηση Green που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος \mathcal{P} , τότε και ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος πάνω στο σύνορο ∂D_3 μηδενίζεται, οπότε παίρνουμε τη σχέση

$$\Phi(\xi) = - \iint_{\partial D_1} G(\mathbf{x}|\xi) \cdot g_1(\mathbf{x}) dS_x + \iint_{\partial D_2} g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x - \iint_{\partial D_3} g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\xi) dS_x. \quad (9)$$

Η σχέση (9) μας δίνει τη λύση του Προβλήματος \mathcal{P} , μέσω της πλήρους συνάρτησης Green. Όπως ήδη αναφέραμε, όμως, ο προσδιορισμός της πλήρους συνάρτησης Green είναι γενικά το ίδιο δύσκολος με τη λύση του αρχικού Προβλήματος \mathcal{P} . Άρα η σχέση (9) δεν έχει πρακτική αξία παρά μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις. ■

Οι σχέσεις (7) και (8) θα αποτελέσουν τη βάση για την αναγωγή του Προβλήματος συνοριακών τιμών \mathcal{P} (με $g_0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in D$) σε **συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση**. Για να γίνει αυτό, όμως, θα πρέπει να δούμε πώς διαμορφώνονται αυτές οι σχέσεις όταν το σημείο ξ τοποθετηθεί στο σύνορο ∂D του πεδίου D .

2.7.1.γ Αναγωγή του Προβλήματος συνοριακών τιμών \mathcal{P} σε συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση

Θα εργασθούμε με την εξίσωση (7) του προηγούμενου υποεδαφίου, την οποίαν επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \iint_{\partial D_1} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} + \alpha G(\mathbf{x}|\xi) \right) - G(\mathbf{x}|\xi) \cdot g_1(\mathbf{x}) \right) dS_x + \\ & + \iint_{\partial D_2} g_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x + \iint_{\partial D_3} \left(\Phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \mathbf{n}_x} - g_3(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x}|\xi) \right) dS_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Ο στόχος μας τώρα είναι να δούμε πώς διαμορφώνεται η ανωτέρω εξίσωση όταν το σημείο ξ βρίσκεται στο σύνορο ∂D . Θα εξετάσουμε επίσης το όριο των διαφόρων όρων της (1) όταν $\xi \rightarrow \mathbf{x} \in \partial D$.

2.7.1.β Συναρτήσεις Green για το γραμμικοποιημένο πρόβλημα ελεύθερης επιφάνειας

Η συνάρτηση Green $G(x|\mathbf{x}_0)$ ορίζεται να είναι το δυναμικό που παράγεται σε κάθε σημείο του πεδίου $\mathbf{x} \in D$, εξαιτίας μιας «παλλόμενης» πηγής που βρίσκεται σε ένα σημείο έστω \mathbf{x}_0 . Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί λοιπόν η συνάρτηση Green είναι οι ακόλουθες:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)G = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0), \text{ (εντός του ρευστού)} \quad (2\alpha)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_3} - \frac{\omega^3}{g}G = 0, \quad x_3 = 0, \quad (2\beta)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = -h, \text{ (επίπεδο πυθμένα)} \quad (2\gamma)$$

$$+ \text{radiation condition} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2\delta)$$

$$\left[(kr)^{1/2} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) \rightarrow 0 \right].$$

Στην περίπτωση που επιλύουμε τα αντίστοιχα διδιάστατα προβλήματα όπου όπως θα δούμε παρακάτω θα χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με την θεωρία λωρίδων για τον προσδιορισμό των ζητούμενων μεγεθών, η συνάρτηση Green ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες με μόνες διαφορές τις ακόλουθες

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)G = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0), \quad (2'\alpha)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} \mp 2kG = 0, \quad k|x_1 - x_1^0| \rightarrow +\infty.$$

Εφαρμόζοντας τώρα, την δεύτερη ταυτότητα του Green για κάποιο από τα δυναμικά (σκέδασης ή ακτινοβολίας) και για την συνάρτηση Green, δηλ. $\Psi_1 = \Phi$ και $\Psi_2 = G$, λαβαίνουμε:

$$\iiint_D (\Phi \Delta^2 G - G \Delta^2 \Phi) dV = \left\{ \iint_{\partial D_{F,R}} + \iint_{\partial D_B} + \iint_{\partial D_{\Pi,R}} + \iint_{\partial D_R^*} \right\} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad (3)$$

όπου και πάλι δουλεύουμε εντός του χωρίου που περιγράφεται στο 6x5.1 της παραγράφου 2.5 (διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό).

Επειδή τα δυναμικά Φ και η συνάρτηση Green ικανοποιούν την εξίσωση Laplace και δεδομένης της θεμελιώδους ιδιότητας της συνάρτησης δ του Dirac, το αριστερά μέλος της (3) είναι ίσο με $\Phi(\mathbf{x}_0)$. Επίσης επειδή τα Φ και η G ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες, τα επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στα $\partial D_{F,R}$, $\partial D_{\Pi,R}$ και ∂D_R^* μηδενίζονται. Καταλήγουμε, λοιπόν, στην ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial D_B} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad \mathbf{x}_0 \in D \notin \partial D_B. \quad (4)$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης Green, η οποία μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, είναι η συμμετρία της στην εναλλαγή της σειράς των ορισμάτων της δηλ.

$$\Psi_1 = G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) \text{ και } \Psi_2 = G(\mathbf{x}|\mathbf{x}'). \quad (5)$$

Εναλλάσσοντας λοιπόν τη σειρά των ορισμάτων της συνάρτησης Green στην (4) καταλήγουμε στην ακόλουθη

$$\Phi(\mathbf{x}) = \iint_{\partial D_B} \left(\Phi(\mathbf{x}_0) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0)}{\partial n} \right) dS, \quad \mathbf{x} \in D, \notin \partial D_B. \quad (6)$$

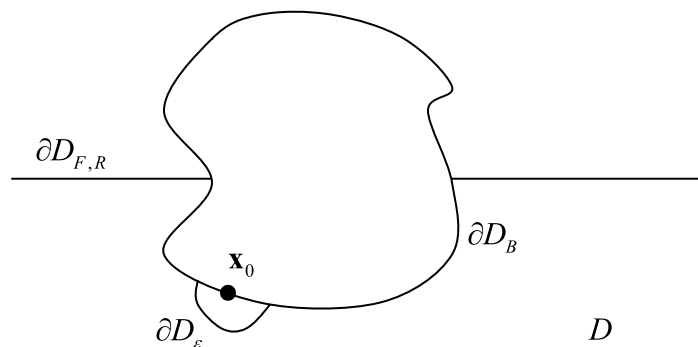
Η σπουδαιότητα της τελευταίας σχέσης έγκειται στο γεγονός ότι συνδέει τις τιμές του δυναμικού Φ και της παραγώγου του $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ πάνω στην επιφάνεια του σώματος ($\mathbf{x}_0 \in \partial D_B$) με τις τιμές του δυναμικού $\Phi(\mathbf{x})$ σε όλο το πεδίο $D(\mathbf{x} \in D)$. (Βεβαίως στην πράξη γνωστές είναι μόνο οι κάθετες ταχύτητες $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ πάνω στην επιφάνεια ∂D_B).

- Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Στην (4) μπορεί να βασισθεί ένα πολύ αποδοτικό αριθμητικό σχήμα επίλυσης το οποίο περιγράφουμε παρακάτω. Έχουμε

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial D_B} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad \text{αν } \mathbf{x}_0 \in D \text{ αλλά } \mathbf{x}_0 \notin \partial D_B.$$

Αλλά τι συμβαίνει αν το $\mathbf{x}_0 \in S_B$; Τότε μπορούμε να προχωρήσουμε μόνο αν απ' όλο το D εξαιρέσουμε ένα μικρό ημισφαίριο D_ε κεντραρισμένο στο \mathbf{x}_0 όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1

Έστω ∂D_ε η επιφάνεια της μικρής ε -σφαίρας. Εφαρμόζονται το θεώρημα Green (σχ. 1) για $\Psi_1 = \Phi$ και $\Psi_2 = G$ στο D/D_ε έχουμε:

$$\iint_{\partial D_B \cup \partial D_\varepsilon} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (7)$$

Πάνω στο D_ε , το δυναμικό Φ είναι περίπου σταθερό και ίσο με $\Phi(\mathbf{x}_0)$, επίσης η παράγωγος $\frac{\partial G}{\partial n}$ είναι «πολύ μεγαλύτερη» από την ίδια την τιμή της G , οπότε ολοκληρώνοντας την πολική μορφή της σχέσεως (2α) για «μικρό» r , όπου $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, έχουμε

$$\frac{\partial G}{\partial n} \sim \frac{1}{4\pi r^2}, \quad r \rightarrow 0. \quad (8)$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα πάνω από το ημισφαίριο D_ε είναι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial D_\varepsilon} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\mathbf{x}_0) \iint_{\partial D_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dS = -\frac{1}{2} \Phi(\mathbf{x}_0). \quad (9)$$

Τελικά, η (7) χρησιμοποιώντας την (9), γίνεται:

$$\frac{1}{2} \Phi(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial D_B} \left(\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad \mathbf{x}_0 \in \partial D_B. \quad (10)$$

Δεδομένου ότι η τιμή της $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ (ταχύτητες στην επιφάνεια του σώματος) δίδονται από τις διατυπώσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών (είναι περίθλασης είτε ακτινοβολίας) η εξίσωση 10 είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους για το $\Phi(\mathbf{x}_0)$ ($\mathbf{x}_0 \in \partial D_B$).

Παρατηρήσεις:

- 1) Για να λυθεί η (10) πρέπει η συνάρτηση Green να είναι γνωστή $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \dots\dots\dots$ (σελ. 310 Mei).
- 2) Στο διακριτό επίπεδο μπορούμε να χωρίσουμε το σύνορο ∂D_B σε N διακριτά ευθύγραμμα τμήματα (μέθοδος συνοριακών στοιχείων BEM) και να προσεγγίσουμε το δυναμικό Φ σε κάθε στοιχείο, έστω i , με μία σταθερά Φ_i . Εκτελώντας τις προκύπτουσες ολοκληρώσεις, καταλήγουμε σε αλγεβρικό σύστημα πάνω στα άγνωστα Φ_i , $i=1, \dots, N$ το οποίο επιλυόμενο δίνει την ζητούμενη προσέγγιση του δυναμικού Φ .

■

Βιβλία:

C.C. Mei, 1983. *The applied dynamics of ocean surface waves*. John Wiley & Sons. (2nd Reprint, 1994, World Scientific), chap. 7

C. Zinton, ch. 4

P. McIver, ch. 4

Άρθρα:

- R.W. Yeung, “Numerical Methods in free-surface flows”, Ann. Rev. J. Fl. Mech., 1982
 J.V. Wehausen, “The motion of floating bodies”, Ann. Rev. J. Fl. Mech., 1971
 N. Drimer, Y. Agnon, “A hybrid B.I.E.M. for second order wave-body interaction”, Applied Ocean Research Vol. 16, 1994.

- Επίλυση με τη βοήθεια Μεταβολικών διατυπώσεων

Η επόμενη κατηγορία μεθόδων επίλυσης των προβλημάτων συνοριακών τιμών 2.2 (25) στηρίζεται στην λεγόμενη μεταβολική διατύπωσή τους, η οποία είναι μια ενεργειακού χαρακτήρα θεώρηση των προβλημάτων αυτών και οδηγεί κατά κύριο λόγο σε αριθμητικά σχήματα επίλυσης με Πεπερασμένα Στοιχεία αλλά και σε υβριδικές μεθόδους που θα δούμε σε επόμενη υποενότητα.

Η βάση για την ανάπτυξη των μεταβολικών μεθόδων, σε όλες τις παραλλαγές της, έγκειται στην θεώρηση ενός συναρτησιακού \mathcal{F} ορισμένου επί του αγνώστου πεδίου Φ (είτε αυτό αφορά τη σκέδαση, είτε την ακτινοβολία) και με την βοήθεια του Λογισμού των Μεταβολών αποδεικνύεται ότι η συνθήκη στασιμοποίησης του $\delta\mathcal{F} = 0$ ισοδυναμεί με την πλήρη διαφορική διατύπωση (όπως την είδαμε στις σχ. 2.2 (25)) του προβλήματος (πεδιακή εξίσωση, συνοριακές συνθήκες και συνθήκη ακτινοβολίας). [Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο κλασσικό βιβλίο του Λογισμού των Μεταβολών των Gelfant & Fomin].

Περαιτέρω, εισάγοντας στη συνθήκη στασιμοποίησης του συναρτησιακού, μια «κατάλληλη» αναπαράσταση του αγνώστου πεδίου Φ οδηγούμαστε σε σύστημα εξισώσεων πάνω στους αγνώστους συντελεστές (αλγεβρικό, διαφορικών εξισώσεων ή κ.α. ανάλογα με την χρησιμοποιούμενη αναπαράσταση) το οποίο επιλύμενο οδηγεί στην ζητούμενη προσεγγιστική λύση.

Για να καταστούν τα ανωτέρω σαφή θα εξετάσουμε την περίπτωση του προβλήματος της ακτινοβολίας από ένα σώμα τυχαίας γεωμετρίας με την βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Έστω ότι βρισκόμαστε σ' ένα θαλάσσιο περιβάλλον όπως το επιπλέον σώμα καθώς και ανομοιομορφίες του πυθμένα (μεταβλητή βαθυμετρία) εντοπίζονται εντός πεπερασμένου κατακόρυφου κυλίνδρου C . Έξω από αυτόν υποτίθεται ότι το βάθος του νερού είναι σταθερό παντού. Βλ. σχ. 2.

Σχήμα 2

Με άνω δείκτη ext , π.χ. $\Phi^{(ext)}$ θα συμβολίζουμε τα μεγέθη εκτός κυλίνδρου και χωρίς δείκτη π.χ. Φ τα μεγέθη εντός του. Σκοπός μας είναι για το άγνωστο πεδίο Φ εντός του κυλίνδρου C να χρησιμοποιήσουμε μια αναπαράσταση τύπου πεπερασμένων στοιχείων και για το επίσης άγνωστο πεδίο $\Phi^{(ext)}$ μια γνωστή (εφ' όσον η γεωμετρία είναι απλή και μας το επιτρέπει) αναπαράσταση από σειρά ιδιοσυναρτήσεων που είναι η ακόλουθη:

$$\Phi^{(ext)} = A_0 e^{ikx} f_0(z) + \sum_n A_n e^{K_n x} f_n(x). \quad (11)$$

Έστω το εξής συναρτησιακό

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Phi, \Phi^{(ext)}] &= \frac{1}{2} \iiint_D (\nabla \Phi)^2 dV - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \iint_{\partial D_F} \Phi^2 dS - \\ &\quad - \iint_{\partial D_B} V \Phi dS + \iint_C \left(\frac{1}{2} \Phi^{(ext)} - \Phi \right) \frac{\partial \Phi^{(ext)}}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (12)$$

όπου $V = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial D_B}$ η ταχύτητα δηλ. όπου επάγεται από την κίνηση (μία από τις έξι για κάποιο πρόβλημα ακτινοβολίας) του σώματος στο ρευστό (βλ. συνοριακή συνθήκη 2.2(25β)). Η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού \mathcal{F} , δίδει

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = 0 &\Leftrightarrow \iiint_D \nabla \Phi \nabla (\delta \Phi) dV - \frac{\omega^2}{g} \iint_{\partial D_F} \Phi \delta \Phi dS - \\ &\quad - \iint_{\partial D_B} V \delta \Phi dS + \iint_C \left(\Phi^{(ext)} - \Phi \right) \frac{\partial}{\partial n} \delta \Phi^{(ext)} dS + \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_C \left(\delta \Phi^{(ext)} \frac{\partial \Phi^{(ext)}}{\partial n} - \Phi^{(ext)} \frac{\partial}{\partial n} \right) \delta \Phi^{(ext)} dS - \\ &\quad - \iint_C \delta \Phi \frac{\partial}{\partial n} \delta \Phi^{(ext)} dS, \quad \forall \delta \Phi \text{ και } \forall \delta \Phi^{(ext)}. \end{aligned} \quad (12a)$$

Η τελευταία μετά από αναδιάταξη των όρων ης και με εφαρμογή του θεωρήματος Green, οδηγεί στην ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = 0 &\Leftrightarrow - \iiint_D \nabla \Phi \delta \Phi dV + \iint_{\partial D_F} \left(\Phi_{,3} - \frac{\omega^2}{g} \Phi \right) \delta \Phi dS + \\ &\quad + \iint_{\partial D_{\Pi}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi dS + \iint_{\partial D_B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - V \right) \delta \Phi dS + \\ &\quad + \iint_C \left(\Phi^{(ext)} - \Phi \right) \frac{\partial}{\partial n} \delta \Phi^{(ext)} dS + \\ &\quad + \iint_C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi^{(ext)}}{\partial n} \right) \delta \Phi^{(ext)} dS = 0, \quad \forall \delta \Phi \text{ και } \forall \delta \Phi^{(ext)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Εφόσον η σχ. (13) οφείλει να ισχύει για κάθε δυνατή μεταβολή $\delta \Phi$ και $\delta \Phi^{(ext)}$ και εξετάζοντάς την όρο προς όρο βλέπουμε ότι εντός του κυλίνδρου C και για μεταβολές $\delta \Phi$ πρέπει να ισχύει η εξίσωση Laplace, η συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας στο ∂D_F , η συνθήκη μη-εισχώρησης στον πυθμένα ∂D_{Π} καθώς και η συνθήκη εξίσωσης των ταχυτήτων πάνω στην επιφάνεια του σώματος ∂D_B , μ' άλλα λόγια η διαφορική διατύπωση όπως περιγράφεται στις σχέσεις 2.2 (25α-δ). Για μεταβολές $\delta \Phi^{(ext)}$ παρατηρούμε από τους δύο τελευταίους όρους της (13) ότι πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες συναρμογής

$$\Phi^{(ext)} = \Phi \quad \text{και} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial} = \frac{\partial \Phi^{(ext)}}{\partial}$$

πάνω στην επιφάνεια συναρμογής του κυλίνδρου C . Οι συνθήκες συναρμογής έχουν το εξής ξεκάθαρο φυσικό νόημα, εξασφαλίζουν την συνέχεια τιμής και κάθετης παραγώγου (δηλ. πιέσεων και ταχυτήτων αντίστοιχα) του συνολικού πεδίου. Η ικανοποίηση της πεδιακής εξίσωσης καθώς και των συνοριακών συνθηκών αλλά και της συνθήκης ακτινοβολίας είναι εξασφαλισμένη για το πεδίο $\Phi^{(ext)}$, εκτός του κυλίνδρου C , στην (11), η οποία προκύπτει εύκολα από χωρισμό των μεταβλητών στο $D^{(ext)}$ (γι' αυτό και απαιτείται η γεωμετρία στο $D^{(ext)}$ να είναι απλή).

- Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Για να προχωρήσουμε πλέον σε αριθμητική επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια αναπαράσταση για το άγνωστο πεδίο Φ στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Χωρίζουμε λοιπόν την περιοχή D σε τετραεδρικά «στοιχεία» κατασκευάζοντας ένα πλέγμα (το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων), το οποίο έστω ότι έχει N κόμβους. Εισάγουμε τις συναρτήσεις βάσης $F_i(x_1, x_2, x_3)$, οι οποίες είναι γραμμικές ως προς x_1, x_2 και x_3 μέσα σε κάθε στοιχείο, έχουν τιμή 1 στον κόμβο (x_i^1, x_i^2, x_i^3) και μηδέν σε όλους τους άλλους, δηλ.

$$F_i(x_j^1, x_j^2, x_j^3) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Το άγνωστο δυναμικό μπορεί πλέον να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \Phi_j F_j(x_1, x_2, x_3)$$

καθώς και οι «δυνατές» μεταβολές του $\delta \Phi = \sum_{j=1}^N \delta \Phi_j F_j(x_1, x_2, x_3)$.

Εισάγοντας τις ανωτέρω στη σχέση (12α), έχουμε για παράδειγμα για τους τρεις πρώτους όρους τα εξής:

$$\begin{aligned} \iiint_D \nabla \Phi \nabla (\delta \Phi) dV &= \sum_i \sum_j \Phi_j \left(\iiint_D \nabla F_i \nabla F_j dV \right) \delta \Phi_i - \frac{\omega^2}{g} \iint_{\partial D_F} \Phi \delta \Phi dS = \\ &= - \frac{\omega^2}{g} \sum_i \sum_j \Phi_j \left(\iint_{\partial D_F} F_i F_j dS \right) \delta \Phi_i - \iint_{\partial D_B} V \delta \Phi dS = - \sum_i \left(\iint_{\partial D_B} V F_i dS \right) \delta \Phi_i. \end{aligned}$$

Εφόσον η (12α) οφείλει να ισχύει για κάθε δυνατή $\delta \Phi$, δηλ. για κάθε $\delta \Phi_i$, $i=1, \dots, N$ μπορούμε να την ελέγξουμε για $\delta \Phi_i = 1$. Τότε λόγω του ότι οι F_i είναι γνωστές τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν οπότε καταλήγουμε σε γραμμικό σύστημα το οποίο σε μητρική μορφή μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_j \\ A_n \end{pmatrix} = \{F\}. \quad (14)$$

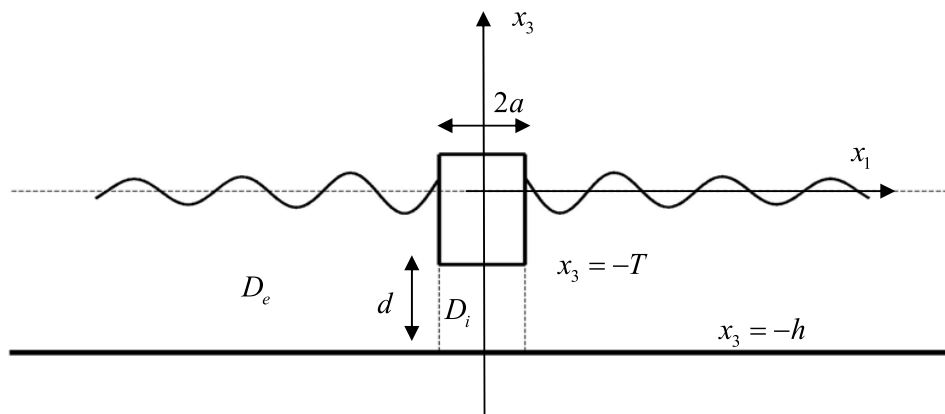
Ο υποπίνακας K περιέχει ως εισόδους του τα εσωτερικά γινόμενα που προέρχονται από τις μεταβολές $\delta\Phi$, ενώ ο υποπίνακας M τα εσωτερικά γινόμενα που προέρχονται από όρους που περιέχουν τις μεταβολές $\delta\Phi^{(ext)}$. Το δεξί μέλος του γραμμικού συστήματος (14) προέρχεται από τον τρίτο όρο της (12α) δηλ. τον όρο που σχετίζεται με τη διέγερση (forcing) του υδρομηχανικού μας συστήματος. Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα (14) προσδιορίζονται οι άγνωστοι συντελεστές Φ_j , τόσο του πεδίου Φ στο εσωτερικό του C , όσο και του εξωτερικού πεδίου $\Phi^{(ext)}, A_n$.

2.8α Κατακόρυφη ταλάντωση πλωτού κυλίνδρου

Στο συμπλήρωμα αυτό θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε στο Κεφ.2 στο πρόβλημα της κατακόρυφης ταλάντωσης (heave) πλωτού κυλίνδρου (βλ. Σχήμα 2α.1). Στην περίπτωση αυτή, όπως θα δούμε παρακάτω, η συμμετρία του σώματος επιτρέπει την σημαντική απλούστευση τόσο των δυναμικών εξισώσεων (2.4.2β) όσο και του προβλήματος ακτινοβολίας που αφορά τον προσδιορισμό του δυναμικού $\Phi_3(\mathbf{x})$ το οποίο σχετίζεται με την κατακόρυφη ταλάντωση ξ_3 . Παρά την σχετική του απλότητα, το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει ενδιαφέρον και έχει διεξοδικά μελετηθεί από διάφορους ερευνητές στο παρελθόν, μια και κυλινδρικά σώματα χρησιμοποιούνται συχνά στη πράξη ως πλωτές κατασκευές ή στοιχεία πλωτών κατασκευών και βρίσκουν εφαρμογές τόσο στην ανοικτή θάλασσα όσο και κοντά στην ακτή όπου οι επιδράσεις του πυθμένα είναι σημαντικές.

Θεωρούμε πλωτό κύλινδρο διαμέτρου $2a$ και βυθίσματος T σε λωρίδα νερού σταθερού βάθους h , ο οποίος δέχεται την επίδραση αρμονικών κυματισμών συχνότητας ω . Το διάκενο μεταξύ κυλίνδρου και θαλάσσιου πυθμένα είναι $d = h - T$. Λόγω της αξονικής συμμετρίας του σώματος η απόκριση του θα είναι η ίδια ανεξάρτητα από την γωνία πρόσπτωσης των κυματισμών, και έτσι λαμβάνουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τη διεύθυνση του προσπίπτοντος κυματισμού παράλληλη προς τον άξονα x_1 .

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, από την υδροστατική ισορροπία προκύπτει ότι η μάζα του σώματος είναι $M = \rho a^2 T$ (όπου ρ η σταθερή πυκνότητα του νερού) και, εφ'όσον αρχικά (χωρίς την επίδραση του κύματος) υποθέτουμε το κύλινδρο ισοβύθιστο, το κέντρο βάρους του θα βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το κέντρο ανώσεως. Επομένως οι εμπλεκόμενοι συντελεστές μάζας στην εξίσωση της κατακόρυφης ταλάντωσης είναι $M_{33} = M$, $M_{35} = J_1 = 0$, και οι αντίστοιχοι υδροστατικοί συντελεστές είναι $C_{33} = \rho g a^2$, $C_{34} = C_{35} = 0$ (λόγω συμμετρίας της ισάλου).



Σχήμα 2α.1: Κατακόρυφη ταλάντωση πλωτού κυλίνδρου

Επίσης, λόγω της συμμετρίας του σώματος τα δυναμικά ακτινοβολίας $\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \Phi_4(\mathbf{x}), \Phi_5(\mathbf{x})$ που σχετίζονται με τις κινήσεις $\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5$ (surge, sway, roll και pitch) είναι αντισυμμετρικά, και η ολοκλήρωση τους σε συνδυασμό με την αντίστοιχη συνιστώσα του γενικευμένου καθέτου διανύσματος n_l στην βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος $\mathbf{x} \in \partial D_B$, η οποία είναι συμμετρικά καταναμημένη, δίνει μηδενική συνεισφορά. Επομένως,

$$\Pi_{l3} = \rho \iint_{\partial D_B} \Phi_l n_3 dS_B = 0, \quad l=1,2,4,5, . \quad (2\alpha.1)$$

Περαιτέρω, το δυναμικό ακτινοβολίας $\Phi_6(\mathbf{x})$ που σχετίζεται με τη κίνηση ξ_6 (yaw) είναι μηδενικό, $\Phi_6(\mathbf{x})=0$, μιά και η αντίστοιχη συνιστώσα του γενικευμένου καθέτου διανύσματος μηδενίζεται $n_6=0$ παντού πάνω στην βρεχόμενη επιφάνεια του κυλίνδρου, $\mathbf{x} \in \partial D_B$. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι από τα στοιχεία των πινάκων πρόσθετης μάζας και απόσβεσης που μετέχουν στην εξίσωση κατακόρυφης ταλάντωσης μόνο τα στοιχεία A_{33} και B_{33} (βλ. κατωτ. Εξ. 2.α3) που συνδέονται αποκλειστικά με τη κίνηση ξ_3 (heave) παραμένουν μη μηδενικά. Επομένως, στην εξεταζόμενη περίπτωση η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας που αφορά τη κατακόρυφη ταλάντωση απλουστεύεται σημαντικά (καθίσταται αποσυσζευγμένη από τις υπόλοιπες εξισώσεις), και παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\left(-\omega^2(M + A_{33}(\omega)) + j\omega B_{33}(\omega) + C_{33}\right) \xi_3(\omega) = X_{03}(\omega) + X_{d3}(\omega), \quad (2\alpha.2)$$

όπου $X_{03}(\omega)$ και $X_{d3}(\omega)$ τα μιγαδικά πλάτη των δυνάμεων Froude-Krylon και περίθλασης αντίστοιχα. Υπευθυμίζουμε εδώ ότι σε περίπτωση ύπαρξης και θεώρησης και άλλων εξωτερικών δυνάμεων $F(\omega)$, π.χ. λόγω αγκύρωσης, ανέμου κλπ, οι οποίες αμελούνται στην εφαρμογή που παρουσιάζουμε εδώ, αυτές θα πρέπει να προστεθούν στο δεξί μέλος της Εξ. (2.α.2).

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια την εφαρμογή της μεθόδου των συζευγμένων ιδιομορφών (coupled modes) για τον προσδιορισμό του δυναμικού $\Phi_3(\mathbf{x})$ μέσω του οποίου υπολογίζονται οι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόκρισης από εφαρμογή της γνωστής σχέσης

$$A_{33} + \frac{1}{j\omega} B_{33} = \rho \iint_{\partial D_B} \Phi_3 n_3 dS_B = \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=a} r \Phi_3(r, x_3 = -T) dr. \quad (2\alpha.3)$$

Για την παραγωγή του τελευταίου δεξιά μέρους χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ότι το δυναμικό ακτινοβολίας $\Phi_3(\mathbf{x})$ θα είναι αξονικά συμμετρικό (και άρα ανεξάρτητο από τη γωνία αζιμουθίου $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$), και επομένως, $\Phi_3(\mathbf{x}) = \Phi_3(r, x_3)$, όπου $r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ απόσταση από τον άξονα συμμετρίας (κατακόρυφο άξονα του

κυλίνδρου). Σημειώνουμε ότι οι δυνάμεις Froude-Krylov $X_{03}(\omega)$ υπολογίζονται εύκολα με απευθείας ολοκλήρωση του δυναμικού του προσπίπτοντος κυματισμού στην βρεχόμενη επιφάνεια του κυλίνδρου ∂D_B

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cosh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \exp[-jk_0 x_1], \quad \text{όπου } \omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 h), \quad (2a.4)$$

και A το πλάτος ανύψωσης του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $n_3 = 0$ στην παράπλευρη βρεχόμενη επιφάνεια του πλωτού κυλίνδρου και $n_3 = 1$ στον πυθμένα του ($x_3 = -T$), στην εξεταζόμενη περίπτωση οι δυνάμεις Froude-Krylov δίνονται από τη σχέση

$$X_{03} = \rho\omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_0 n_3 dS_B = \rho\omega^2 A \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=a} r \Phi_0(r, x_3 = -T) dr. \quad (2a.5)$$

και υπολογίζονται αναλυτικά παρακάτω.

Ο προσδιορισμός του δυναμικού περίθλασης $\Phi_d(\mathbf{x})$, μέσω του οποίου μπορούν να υπολογιστούν οι αντίστοιχες δυνάμεις περίθλασης

$$X_{d3} = \rho\omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_d n_3 dS_B \quad (2a.6)$$

παρουσιάζει αυξημένες δυσκολίες, δεδομένου ότι το πεδίο αυτό δεν είναι πλέον αξονικά συμμετρικό και εξαρτάται και από τις τρεις χωρικές διαστάσεις. Εν τούτοις, η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών εφαρμόζεται και σε αυτή τη περίπτωση, σε συνδυασμό με τις γενικές αναπαραστάσεις του πεδίου, και παρέχει τη λύση του προβλήματος. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις σχετικές εργασίες των Black, Mei & Bray (1971) και Garrett (1971), όπου παρουσιάζονται λεπτομέρειες εφαρμογής της τεχνικής αυτής στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Είναι όμως γνωστό ότι οι συνολικές υδροδυναμικές δυνάμεις $X_{03}(\omega) + X_{d3}(\omega)$ μπορούν να υπολογισθούν από την εφαρμογή των σχέσεων Haskind-Newman μέσω του δυναμικού ακτινοβολίας $\Phi_3(r, x_3)$. Επίσης, το μέτρο των δυνάμεων αυτών μπορεί να υπολογιστεί μέσω του συντελεστή υδροδυναμικής απόσβεσης B_{33} που επίσης βασίζεται μόνο στην επίλυση του δυναμικού ακτινοβολίας $\Phi_3(r, x_3)$. Η εφαρμογή των σχέσεων αυτών είναι πολύ χρήσιμη γιατί μας επιτρέπει να αποφύγουμε το φορτίο προσδιορισμού του δυναμικού περίθλασης όταν εξετάζουμε τις αποκρίσεις του πλωτού σώματος και θα παρουσιασθεί αναλυτικά παρακάτω.

1. Προσδιορισμός του δυναμικού ακτινοβολίας $\Phi_3(\mathbf{x})$ πλωτού κυλίνδρου

Η μέθοδος των συζευγμένων ιδιομορφών, που θα παρουσιασθεί εδώ για την επίλυση του προβλήματος ακτινοβολίας του πλωτού κυλίνδρου λόγω της κατακόρυφης ταλάντωσης του, αποτελεί μια γενική τεχνική επίλυσης και αριθμητικής

προσομοίωσης προβλημάτων κυματικής διάδοσης, η οποία βρίσκει πλούσιες εφαρμογές, πέραν της περιοχής της υδροδυναμικής πλωτού σώματος, όπως στη διάδοση κυματισμών ελεύθερης επιφάνειας με τη παρουσία ανομοιογενειών (μεταβολή βαθυμετρίας, ύπαρξη βυθισμένων σωμάτων κλπ), διάδοση και σκέδαση ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα, αλλά και γενικότερα προβλήματα κυματοδότησης (π.χ. ηλεκτρομαγνητικοί κυματοδηγοί κλπ). Μια αναλυτικότερη παρουσίαση της μεθόδου επικέντρωμένη στην μελέτη κυματικών φαινομένων στο θαλάσσιο περιβάλλον παρέχεται στο αντίστοιχο μάθημα (Αθανασούλης & Μπελιμπασάκης 2002).

Η μέθοδος βασίζεται στη σύζευξη διαφορετικών γενικών αναπαραστάσεων του κυματικού πεδίου σε υποπεριοχές, οι οποίες μπορούν να κατασκευασθούν αναλυτικά από την εξέταση και επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος (διαφορική εξίσωση και συνοριακές συνθήκες) σε αυτές. Οι ανωτέρω αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν ένα πλήθος άγνωστων αρχικά συντελεστών, διαφορετικών σε κάθε υποπεριοχή. Η σύζευξη επιτυγχάνεται με την απαίτηση της συνέχειας του κυματικού πεδίου και της κατάλληλης κάθετης παραγώγου του στις διαχωριστικές επιφάνειες των υποπεριοχών, και οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων ως προς τους άγνωστους συντελεστές, όπως θα παρουσιασθεί στη συνέχεια για το εξεταζόμενο πρόβλημα.

Με τη βοήθεια της κατακόρυφης διαχωριστικής επιφάνειας που εικονίζεται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχ. 2α.1 το συνολικό πεδίο ροής $D = D_e \cup D_i$ διαχωρίζεται σε δύο τμήματα το εσωτερικό κάτωθεν του κυλίνδρου D_i και το εξωτερικό D_e . Η διαχωριστική επιφάνεια στη παρούσα περίπτωση είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κατακόρυφου κυλίνδρου $r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = a$, $-h < x_3 < -T$.

Εξωτερική περιοχή: Η αναπαράσταση της λύσεως του μελετώμενου προβλήματος ακτινοβολίας στο εξωτερικό χωρίο D_e παρέχεται από το γενικό θεώρημα αναπαράστασης του Κεφ.2, λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις κατάλληλης συμπεριφοράς του πεδίου στο άπειρο ($r \rightarrow \infty$) το οποίο πρέπει να έχει τη μορφή εξερχομένων κυμάτων που εξασθενούν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πεδίο είναι αξονικά συμμετρικό και άρα ανεξάρτητο της γωνίας αζιμουθίου. Επομένως, όλοι οι όροι που εμπλέκουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις πλὴν του πρώτου ($m=0$) μηδενίζονται, και λαμβάνουμε

$$\Phi_3^{(e)}(r, x_3) = a_0 H_0^{(2)}(k_0 r) Z_0^{(e)}(x_3) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_0(k_n r) Z_n^{(e)}(x_3), \quad r \geq a, \quad -h < x_3 < -T, \quad (2\alpha.6)$$

όπου

$$Z_0^{(e)}(x_3) = \cosh[k_0(x_3 + h)] / N_0^{1/2} \quad \text{και} \quad Z_n^{(e)}(x_3) = \cos[k_n(x_3 + h)] / N_n^{1/2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (2\alpha.7)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sinh k_0 h}{2k_0 h} \right), \quad N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin k_n h}{2k_n h} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2\alpha.8)$$

και τα $k_0, k_n, n=1,2,..$, προκύπτουν ως ρίζες των εξισώσεων (διασποράς)

$$\mu h = k_0 h \tanh(k_0 h) \quad \text{και} \quad \mu h = -k_n h \tan(k_n h), \quad n=1,2,.., \quad (2\alpha.9)$$

αντίστοιχα. Στην τελευταία εξίσωση $\mu = \omega^2 / g$ είναι η παράμετρος συχνότητας του προβλήματος. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι οι ανωτέρω αναπαραστάσεις κατασκευάζονται με εφαρμογή της τεχνικής χωρισμού μεταβλητών στη εξίσωση Laplace σε χωρία με οριζόντια σύνορα (λόγω σταθερού βάρους) και στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι μιγαδικοί συντελεστές $\{a_n, n=0,1,2..\}$ είναι οι άγνωστοι του προβλήματος στο εξωτερικό χωρίο D_e .

Εσωτερική περιοχή: Το δυναμικό στην εσωτερική περιοχή D_i κάτωθεν του κυλίνδρου ικανοποιεί τη εξίσωση εξίσωση Laplace

$$\Delta \Phi_3 \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_3^2} = 0, \quad (2\alpha.10)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα της αξονικής συμμετρίας του πεδίου ($\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = 0$), την ομογενή εξίσωση στον πυθμένα

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \equiv -\Phi_{,x_3} = 0, \quad x_3 = -h, \quad (2\alpha.11)$$

και την μη ομογενή εξίσωση στο πυθμένα του κυλίνδρου

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv \Phi_{,x_3} = n_3 = 1, \quad x_3 = -T, \quad (2\alpha.12)$$

που αποτελεί και τη διεγείρουσα συνθήκη του κατα τα άλλα ομογενούς εξεταζόμενου προβλήματος. Η γενική λύση του παραπάνω προβλήματος απαρτίζεται από μια μερική λύση του μη ομογενούς προβλήματος, έστω $\Phi_3^{NH}(r, x_3)$, και τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος, έστω $\Phi_3^H(r, x_3)$. Δηλαδή,

$$\Phi_3(r, x_3) = \Phi_3^{NH}(r, x_3) + \Phi_3^H(r, x_3). \quad (2\alpha.13)$$

Μιά απλή μορφή (πολυωνυμική) για τη μερική λύση του μη ομογενούς προβλήματος είναι η ακόλουθη

$$\Phi_3^{NH}(r, x_3) = \frac{1}{2d} \left[(x_3 + h)^2 - \frac{r^2}{2} \right], \quad (2\alpha.14)$$

η οποία, όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί, ικανοποιεί όλες τις παραπάνω εξισώσεις. Η γενική αναπαράσταση της λύσης του ομογενούς προβλήματος στην εσωτερική περιοχή D_i κάτωθεν του κυλίνδρου μπορεί να κατασκευασθεί με αντίστοιχο τρόπο

και πάλι με εφαρμογή της τεχνικής χωρισμού μεταβλητών στο χωρίο D_i , και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\Phi_3^H(r, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n I_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n x_3), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2a.15)$$

Συνεπώς, η γενική αναπαράσταση του δυναμικού $\Phi_3(r, x_3)$ στο εσωτερικό χωρίο D_i γράφεται ως ακολούθως

$$\Phi_3^{(i)}(r, x_3) = \frac{1}{2d} \left((x_3 + h)^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n I_0(\lambda_n r) Z_n^{(i)}(\lambda_n x_3), \quad \text{με } Z_n^{(i)}(x_3) = \cos(\lambda_n x_3) \quad (2a.16)$$

όπου, οι συντελεστές $\{b_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ αποτελούν τους μιγαδικούς αγνώστους του προβλήματος στο D_i .

Με τις ανωτέρω αναπαραστάσεις (2a.6) και (2a.16) έχουν καλυφθεί όλες οι απαιτήσεις του προβλήματος, εκτός από

(i) την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης στη παράπλευρη βρεχόμενη επιφάνεια

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv -\Phi_{,r}^{(e)} = 0, \quad r = a, \quad -T < x_3 < 0, \quad (2a.17)$$

καθώς και

(ii) τη συναρμογή (matching) των αναπαραστάσεων στη κοινή διαχωριστική επιφάνεια, πράγμα που ισοδύναμα απαιτεί τη συνέχεια του δυναμικού και της οριζόντιας παραγώγου του

$$\Phi_{,r}^{(i)} = \Phi_{,r}^{(e)} \quad \text{και} \quad \Phi^{(i)} = \Phi^{(e)}, \quad r = a, \quad -h < x_3 < -T. \quad (2a.18)$$

Στα πλαίσια εφαρμογής της μεθόδου συζευγμένων ιδιομορφών (coupled mode method) αξιοποιείται η ιδιότητα των συνόλων των ιδιοσυναρτήσεων $\{Z_n^{(e)}(x_3), n = 0, 1, 2, \dots\}$ και $\{Z_n^{(i)}(x_3), n = 0, 1, 2, \dots\}$ να αποτελούν ορθογώνιες βάσεις (που μπορεί εύκολα να κανονικοποιηθούν), και άρα αποτελούν πλήρη σύνολα συναρτήσεων τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f(x_3)$ οριζόμενων στα διαστήματα $-d < x_3 < 0$ και $-h < x_3 < -T$, αντίστοιχα. Ετσι, οι εξισώσεις (2a.17) και η πρώτη από τις (2a.18) που αφορούν στην οριζόντια παράγωγο μπορεί να ικανοποιηθούν ισοδύναμα με την προβολή τους πάνω στην κατακόρυφη βάση $\{Z_k^{(e)}(x_3), k = 0, 1, 2, \dots\}$

$$\int_{x_3=-h}^{x_3=-T} \left(\Phi_{,r}^{(i)}(r=a, x_3; \{a_n\}) - \Phi_{,r}^{(e)}(r=a, x_3; \{b_n\}) \right) Z_k^{(e)}(x_3) dx_3 - \int_{x_3=-T}^{x_3=0} \Phi_{,r}^{(e)}(r=a, x_3; \{b_n\}) Z_k^{(e)}(x_3) dx_3 = 0, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (2\alpha.19)$$

και η δεύτερη από τις Εξ. (2α.18) που αφορά τη συνέχεια των τιμών του πεδίου στη διαχωριστική επιφάνεια από την προβολή της πάνω στην κατακόρυφη βάση $\{Z_k^{(i)}(x_3), k=0,1,2,\dots\}$

$$\int_{x_3=-h}^{x_3=-T} \left(\Phi^{(i)}(r=a, x_3; \{a_n\}) - \Phi^{(e)}(r=a, x_3; \{b_n\}) \right) Z_k^{(i)}(x_3) dx_3 = 0, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2\alpha.20)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (2α.6) και (2α.16) στις ανωτέρω εξισώσεις και η εκτέλεση των ολοκληρώσεων ως προς x_3 , που επιτυγχάνεται αναλυτικά, οδηγεί τελικά σε αλγεβρικό σύστημα ως προς τους άγνωστους συντελεστές $\{a_n, n=0,1,2,\dots\}$ και $\{b_n, n=0,1,2,\dots\}$. Στη πράξη οι απειροσειρές που εμπλέκονται στις αναπαραστάσεις (2α.6) και (2α.16) περικόπτονται κρατώντας μόνο τους πρώτους K όρους. Έτσι οι ανωτέρω σχέσεις καταλήγουν τελικά σε ένα αλγεβρικό σύστημα $2K$ εξισώσεων με $2K$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με γνωστές μεθόδους. Η περικοπή των σειρών, σε συνδυασμό με τη αρκετά γρήγορη σύγκλιση τους, εισάγει ένα σφάλμα, το οποίο όμως εξασθενεί γρήγορα καθώς το K αυξάνεται. Σημειώνουμε εδώ ότι η περικοπή των απειροσειρών σε συνδυασμό με τις ορθογώνιες προβολές των εξισώσεων (2α.17) και (2α.18) στις αντίστοιχες βάσεις αποτελεί εφαρμογή στη περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε της γενικότερης μεθόδου Galerkin (βλ. π.χ. Prenter 1999).

Μετά την εύρεση των συντελεστών των αναπτυγμάτων οι υδροδυναμικοί συντελεστές υπολογίζονται από τη σχέση (2α.3) όπου προφανώς για το δυναμικό ακτινοβολίας ισχύει

$$\Phi_3(r, x_3 = -T) = \Phi_3^{(i)}(r, x_3 = -T; \{b_n\}). \quad (2\alpha.21)$$

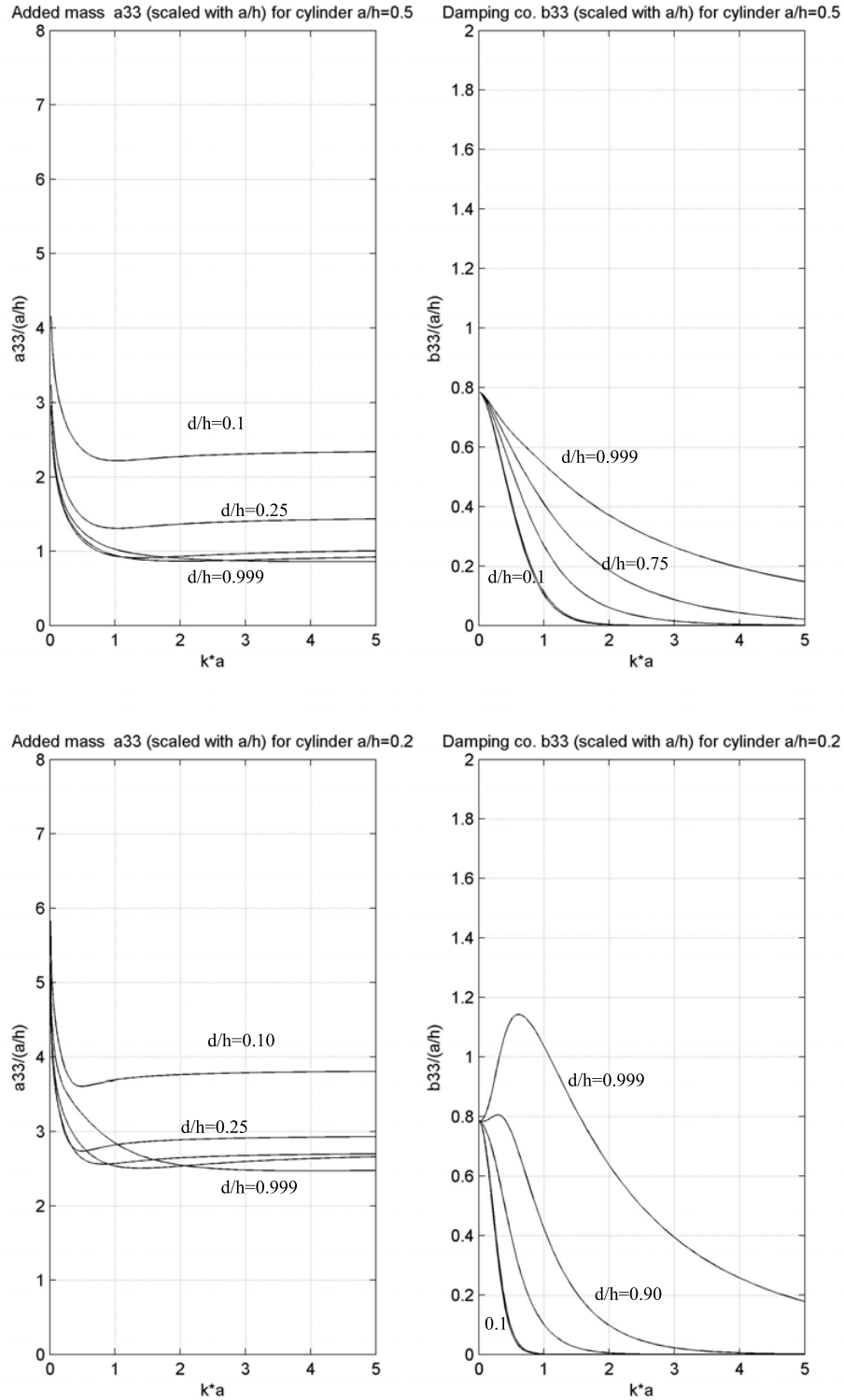
Χρησιμοποιώντας το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x I_0(x) dx = x I_1(x)$, το τελικό αποτέλεσμα για τους υδροδυναμικούς συντελεστές που σχετίζονται με τη κατακόρυφη ταλάντωση κυλίνδρου προκύπτει σε αδιάστατη μορφή, ως ακολούθως

$$\hat{A}_{33} - j \hat{B}_{33} = \frac{A_{33} - (j/\omega) B_{33}}{\rho \pi a^3} = 2 \left(\frac{1}{4} \frac{d}{a} - \frac{1}{16} \frac{a}{d} + \frac{\Lambda}{a} \right), \quad (2\alpha.22)$$

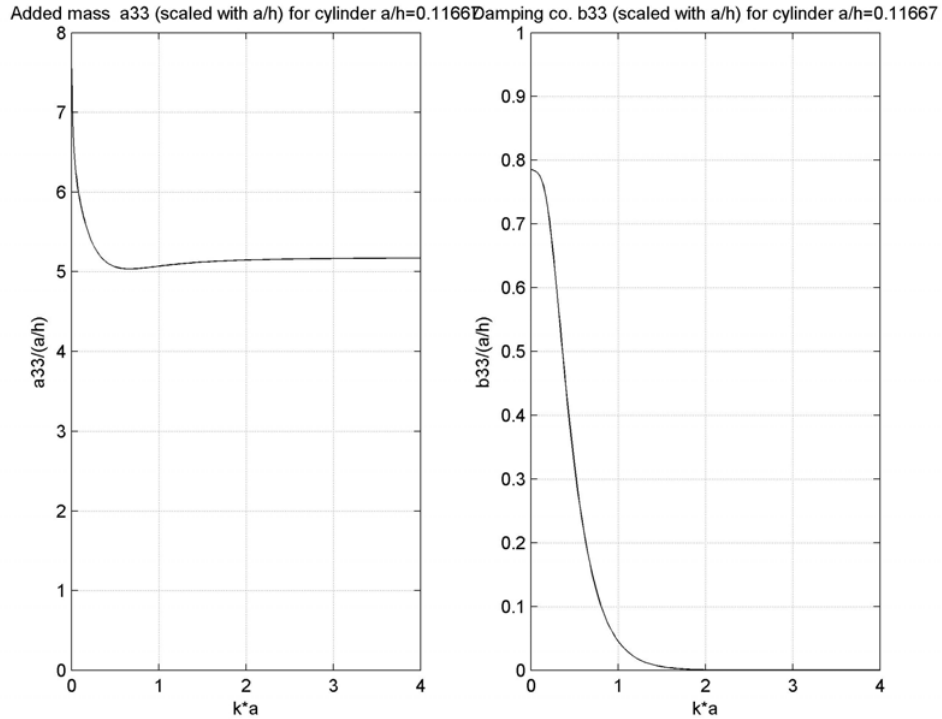
όπου

$$\Lambda = \frac{b_0}{2} + \frac{d}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 b_n \frac{I_1(\lambda_n a)}{n \pi}, \quad n=1,2,\dots \quad (2\alpha.23)$$

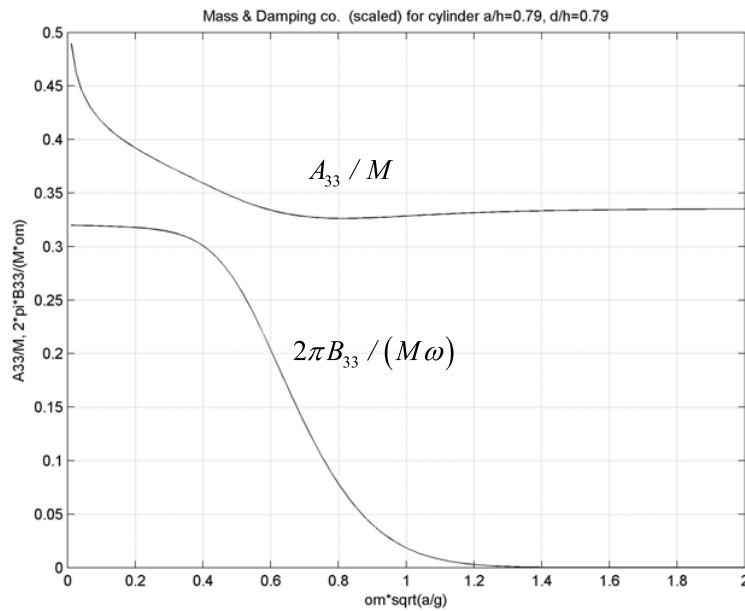
Παραθέτουμε στη συνέχεια ενδεικτικά αποτελέσματα στα Σχήματα 2α.2 και 2α.3.



Σχήμα 2α.2: Υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου σε κατακόρυφη ταλάντωση για $a/h=0.5$ (πάνω) και $a/h=0.2$ (κάτω), και διάφορες τιμές του λόγου διακένου πυθμένα προς βάθος $d/h=0.1, 0.25, 0.75, 0.9$ και 0.999 . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για διάφορες τιμές του αδιάστατου κυματριθμού $k_0 a = 2\pi a / \lambda$



Σχήμα 2α.3: Αδιάστατοι υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου για $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου κυματαριθμού $k_0 a = 2\pi a / \lambda$



Σχήμα 2α.4: Υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου για $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega \sqrt{a/g}$

Ειδικότερα, στο Σχήμα 2α.2 παρουσιάζονται οι αδιάστατοι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόσβεσης για λόγο ακτίνας κυλίνδρου προς βάθος νερού $a/h=0.5$ (δηλαδή διάμετρο του κυλίνδρου ίση με το βάθος) και διάφορες τιμές του λόγου διακένου πυθμένα προς βάθος $d/h=0.1, 0.25, 0.75, 0.9$ και 0.99 . Στο Σχήμα 2α.2 παρουσιάζονται επίσης αντίστοιχα αποτελέσματα για $a/h=0.2$. Για τα αποτελέσματα έχει γίνει αποκοπή των απειροσειρών χρησιμοποιώντας $K=5$ όρους. Σημειώνεται επίσης ότι από την μέθοδο που παρουσιάσαμε μπορούμε να πάρουμε και εκτιμήσεις των διαφόρων ποσοτήτων και για βαθύ νερό. Στη πράξη αρκεί να θέσουμε στη περίπτωση αυτή για την εξεταζόμενη συχνότητα πεπερασμένο βάθος που να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μέγιστο των a, T και $\lambda = 2\pi / k_0$.

Μια άλλη περίπτωση υπολογισμού υδροδυναμικών συντελεστών που θα επεξεργασθούμε και στη συνέχεια για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών δυνάμεων και αποκρίσεων παρουσιάζεται στα Σχήματα 2α.3 και 2α.4. Στην περίπτωση αυτή (που έχει ληφθεί από την εργασία Yu & Falnes, 1995) η ακτίνα του κυλίνδρου είναι $a=0.35\text{m}$ και το βύθισμα $T=0.63\text{m}$, και επομένως ο όγκος εκτοπίσματος είναι $\nabla = 0.242\text{m}^3$. Το βάθος του νερού είναι $h=3\text{m}$ και επομένως οι λόγοι $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$.

Τα αποτελέσματα που αφορούν τους (αδιάστατους) υδροδυναμικούς συντελεστές για διάφορες τιμές του αδιάστατου κυματαριθμού $k_0 a = 2\pi a / \lambda$ παρουσιάζονται στη περίπτωση αυτή στο Σχήμα 2.α3. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 2.α.4 παρουσιάζονται υδροδυναμικοί συντελεστές στην ίδια όπως προηγουμένως περίπτωση, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega\sqrt{a/g}$. Εδώ χρησιμοποιούμε μια διαφορετική αδιαστατοποίηση και παρουσιάζουμε τα μεγέθη A_{33}/M και $2\pi B_{33}/(M\omega)$ προκειμένου να δείξουμε τη σημαντικότητα των μεγεθών αυτών ως προς τη μάζα του πλωτού κυλίνδρου.

2. Υπολογισμός δυνάμεων Froude-Krylov $X_{03}(\omega)$ στην κατακόρυφη διεύθυνση

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.4α) στην σχέση (2.4β), και λαμβάνοντας υπόψη τη παρακάτω αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $\exp(-jkx_1) = \exp(-jk \cos \theta)$

$$\exp(-jx_1) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m (-j)^m J_m(k_0 r) \cos m\theta, \text{ με } e_m=1, \text{ για } m=1 \text{ και } e_m=2, \text{ για } m=2,3,\dots \quad (2\alpha.24)$$

λαμβάνουμε

$$X_{03} = \rho\omega^2 A \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cosh k_0 d}{\cosh k_0 h} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=a} r \sum_{m=0}^{\infty} e_m (-j)^m J_m(k_0 r) \cos m\theta dr. \quad (2\alpha.25)$$

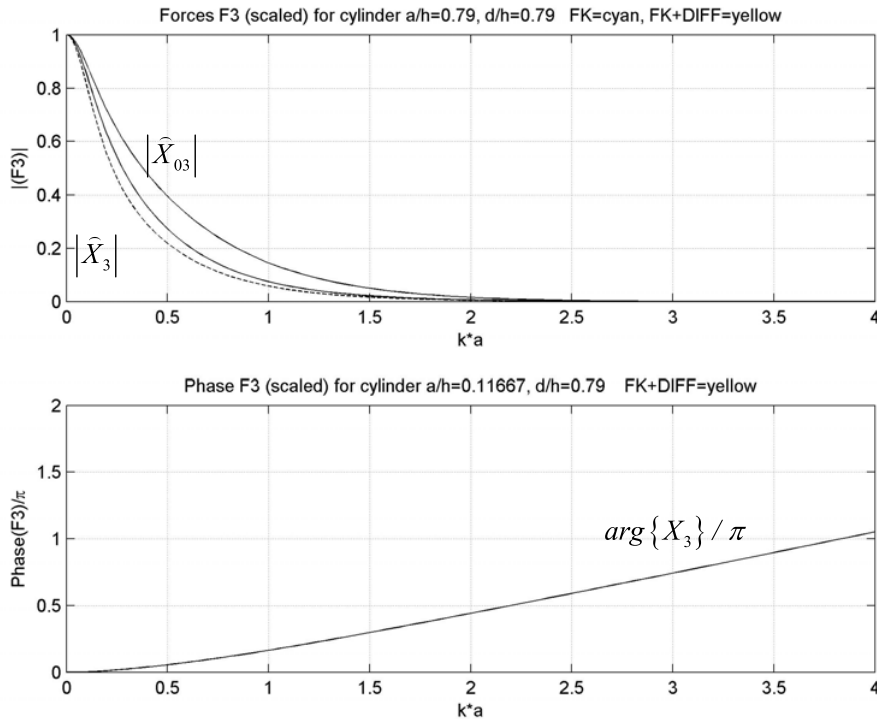
Από τους όρους του αθροίσματος στην ολοκληρωτέα ποσότητα, λόγω της ολοκλήρωσης ως προς θ , μόνο ο όρος $m=0$ έχει μη μηδενική συνεισφορά, και επομένως

$$X_{03} = 2\pi\rho g A \frac{\cosh k_0 d}{\cosh k_0 h} \int_{r=0}^{r=a} r J_0(k_0 r) dr = 2\pi\rho g A \frac{\cosh k_0 d}{\cosh k_0 h} \frac{k_0 a}{k_0^2} J_1(k_0 a). \quad (2\alpha.26)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$. Το τελικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται σε αδιάστατη μορφή ως ακολούθως

$$\hat{X}_{03} = \frac{X_{03}}{\rho g \pi a^2 A} = \frac{2}{k_0 a} \frac{\cosh k_0 d}{\cosh k_0 h} J_1(k_0 a). \quad (2\alpha.27)$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι στην εξεταζόμενη περίπτωση οι δυνάμεις Froude-Krylon έχουν μηδενική διαφορά φάσεως ως προς την ανύψωση του προσπίπτοντος κυματισμού στο κέντρο $r=0$ του κυλίνδρου, πράγμα που είναι φυσική συνέπεια της συμμετρίας του σώματος. Επίσης, για πολύ αργή κίνηση, δηλαδή ω και $k_0 a \rightarrow 0$ οι δυνάμεις αυτές τείνουν στην υδροστατική πρόσθετη δύναμη λόγω της ανύψωσης του κύματος $\hat{X}_{03} \rightarrow 1$, όπως είναι φυσικά αναμενόμενο. Τέλος, για πολύ γρήγορη ταλάντωση, δηλαδή ω και $k_0 a \rightarrow \infty$ οι δυνάμεις αυτές τείνουν στο μηδέν.



Σχήμα 2α.5: Υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου για $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega\sqrt{a/g}$

Αυτό εξηγείται φυσικά λόγω του γεγονότος ότι καθώς η συχνότητα αυξάνει το μήκος κύματος τείνει στο μηδέν, και επομένως, η συνεισφορά πολλών μηκών κύματος στις δυνάμεις πίεσης στο πυθμένα του κυλίνδρου αλληλοαναιρείται. Αριθμητικά αποτελέσματα για τη περίπτωση του κυλίνδρου με $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$ παρουσιάζουμε στο Σχήμα 2α.5, στα οποία παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία με τη παραπάνω ασυμπτωτική συμπεριφορά.

3. Υπολογισμός των συνολικών υδροδυναμικών δυνάμεων

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Κεφ. 2, η συνολική υδροδυναμική δύναμη $X_3(\omega) = X_{03}(\omega) + X_{d3}(\omega)$ μπορεί να υπολογισθεί με ολοκλήρωση στην παράπλευρη επιφάνεια του κυκλικού κυλίνδρου ∂D_R^* αρκετά μεγάλης ακτίνας $R \rightarrow \infty$, του προσπίπτοντος και του δυναμικού ακτινοβολίας ως ακολούθως

$$X_3 = -\rho\omega^2 A \iint_{\partial D_R^*} \left(\Phi_0 \frac{\partial \Phi_3}{\partial R} - \Phi_3 \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \right) dS_B = -\rho\omega^2 A \int_{x_3=-h}^{x_3=0} dx_3 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta R \mathcal{E}(R, \theta, x_3), \quad (2\alpha.28)$$

όπου $\mathcal{E}(r = R, \theta, x_3) = \left(\Phi_0 \frac{\partial \Phi_3}{\partial R} - \Phi_3 \frac{\partial \Phi_0}{\partial R} \right)_{\partial D_R^*}$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, Εξ. (2α.24), το δυναμικό του προσπίπτοντος κύματος γράφεται στη μορφή

$$\Phi_0(r = R, \theta, x_3) = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cosh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \sum_{m=0}^{\infty} e_m (-j)^m J_m(k_0 R) \cos m\theta \quad (2\alpha.29)$$

Μετά από αντικατάσταση του αναπτύγματος (2α.6) για το δυναμικό ακτινοβολίας $\Phi_3^{(e)}(r, x_3)$ στην εξωτερική περιοχή D_e και λαμβάνοντας υπόψη

- (i) οι συναρτήσεις $K_0(k_n r)$ εξασθενούν εκθετικά σε μεγάλες αποστάσεις και μπορεί να παραληφθούν σε μεγάλη απόσταση R και
- (ii) οι όροι που εμπλέκουν $\cos m\theta$, $m = 1, 2, 3, \dots$, μηδενίζονται κατά την ολοκλήρωση ως προς θ

η συνολική υδροδυναμική δύναμη γίνεται

$$X_3 = \int_{x_3=-h}^{x_3=0} \frac{\cosh^2[k_0(x_3 + h)]}{N_0^{1/2} \cosh k_0 h} dx_3 \int_{\theta=0}^{2\pi} r d\theta \left(J_0(k_0 R) \frac{\partial H_0^{(2)}(k_0 R)}{\partial R} - H_0^{(2)}(k_0 R) \frac{\partial J_0(k_0 R)}{\partial R} \right), \quad (2\alpha.30)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι $N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sinh k_0 h}{2k_0 h} \right)$.

Το κατακόρυφο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση υπολογίζεται αναλυτικά ως ακολούθως

$$\int_{x_3=-h}^{x_3=0} \frac{\cosh^2[k_0(x_3+h)]}{N_0^{1/2} \cosh k_0 h} dx_3 = \frac{hN_0^{1/2}}{\cosh k_0 h} . \quad (2a.31)$$

Περαιτέρω, η ποσότητα στην αγκύλη της r -ολοκλήρωσης εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι ίση με

$$jk_0(Y_0(k_0R)J_1(k_0R) - J_0(k_0R)Y_1(k_0R)) = \frac{2j}{\pi R} , \quad (2a.32)$$

όπως υπολογίζεται από την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $J_0(k_0R)$ και $Y_0(k_0R)$. Με αντικατάσταση όλων των ανωτέρω αποτελεσμάτων στην Εξ. (2a.30) παίρνουμε τελικά

$$\hat{X}_3 \equiv \frac{X_3}{\rho g \pi a^2 A} = \frac{4j}{\pi} \frac{a_0}{(a/h)^2} \frac{N_0^{1/2}}{\cosh k_0 h} , \quad (2a.33)$$

όπου υπευθυμίζουμε ότι a_0 είναι ο πρώτος συντελεστής του αναπτύγματος του εξωτερικού δυναμικού $\Phi_3^{(e)}(r, x_3)$, και επομένως, εξαρτάται από τη συχνότητα του προβλήματος, και ο αδιαστατοποιητής $\rho g \pi a^2 A$ αντιστοιχεί στις πρόσθετες υδροστατικές δυνάμεις λόγω του πλάτους A του προσπίπτοντος κυματισμού.

Στην εξεταζόμενη περίπτωση πλωτού κατακόρυφα ταλαντώμενου κυλίνδρου οι συνολικές δυνάμεις τείνουν στην τιμή των δυνάμεων Froude-Krylon για ω και $k_0 a \rightarrow 0$, πράγμα που οφείλεται στο ότι στην πολύ αργή κίνηση του πλωτού σώματος το δυναμικό περίθλασης καθίσταται αμελητέο. Επίσης, για τους ίδιους λόγους όπως και στην περίπτωση των δυνάμεων Froude-Krylon, καθώς η συχνότητα αυξάνει και το μήκος κύματος τείνει στο μηδέν η συνεισφορά στις δυνάμεις πίεσης στο πυθμένα του κυλίνδρου από πολλά μήκη κύματος αλληλοαναιρείται και επομένως $X_3 \rightarrow 0$, για $k_0 a \rightarrow \infty$.

Σε αντίθεση όμως με τις δυνάμεις Froude-Krylon που στην εξεταζόμενη περίπτωση της κατακόρυφης ταλάντωσης πλωτού κυλίνδρου παρουσιάζουν μηδενική διαφορά φάσης από την ανύψωση του προσπίπτοντος κυματισμού στο κέντρο $r=0$ του κυλίνδρου (για όλες τις συχνότητες), οι συνολικές δυνάμεις παρουσιάζουν γενικώς μη μηδενική διαφορά φάσης, η οποία για μικρές συχνότητες τείνει στο μηδέν και σε μεγάλες συχνότητες έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά (βλ. π.χ. Garrett 1971):

$$\arg\{X_3\} \rightarrow ka - \pi/4, \quad \text{για } k_0 a \rightarrow \infty \quad (2a.34)$$

Τα αποτελέσματα εφαρμογής της ανωτέρω τελικής σχέσεως στο εξεταζόμενο παράδειγμα, για τη περίπτωση του πλωτού κυλίνδρου $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$,

παρουσιάζονται επίσης στο Σχήμα 2α.5, όπου διαπιστώνουμε πλήρη συμφωνία με τις παραπάνω προβλέψεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Τέλος, από τα αποτελέσματα του Κεφ. 2 γνωρίζουμε ότι το μέτρο των συνολικών δυνάμεων μπορεί να υπολογισθεί εναλλακτικά και μέσω της συναρτήσεως Kochin του προβλήματος (ιδιότητα I4). Η συνάρτηση Kochin συνδέεται επίσης και με τους συντελεστές απόσβεσης (ιδιότητα I2), από όπου για τη περίπτωση που εξετάζουμε λαμβάνουμε

$$|H_3|^2 = \frac{2k_0 B_{33}}{\rho \omega D(k_0 h)}, \quad (2\alpha.35)$$

όπου λόγω αξονικής συμμετρίας η συνάρτηση Kochin είναι ανεξάρτητη της γωνίας αζιμουθίου (θ). Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην ιδιότητα I4 παίρνουμε τελικά (βλ. και Yeung, 1981):

$$|\hat{X}_3| \equiv \frac{|X_3|}{\rho g \pi a^2 A} = \sqrt{\frac{2 \left[\tanh(k_0 h) + k_0 h (1 - \tanh^2(k_0 h)) \right] B_{33}}{\pi k_0 a}}. \quad (2\alpha.36)$$

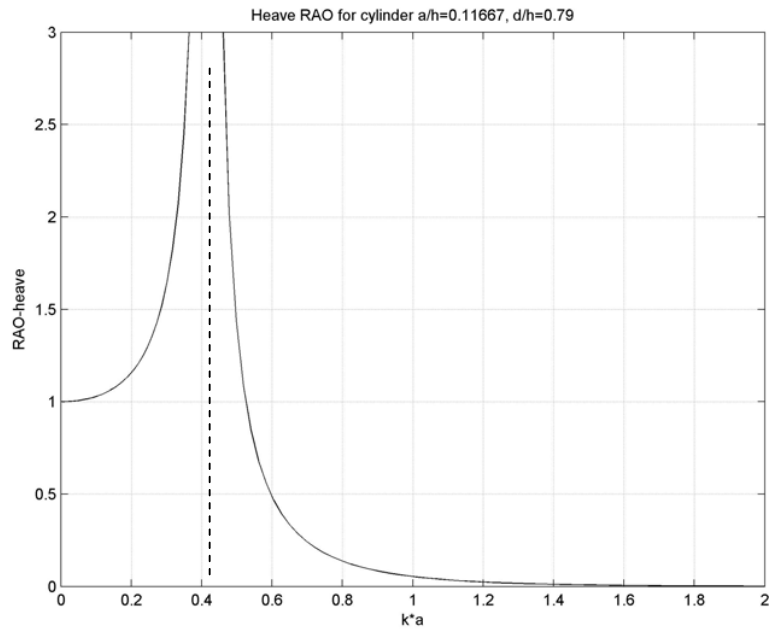
Αριθμητικά αποτελέσματα για τη περίπτωση του κυλίνδρου $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$ παρουσιάζονται επίσης στο Σχήμα 2α.5, με διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε αρκετά καλή συμφωνία των υπολογισμών μας για το μέτρο της συνολικής υδροδυναμικής δύναμης από την εφαρμογή των Εξ. (2α.33) και (2α.36). Οι μικρές παρουσιαζόμενες διαφορές οφείλονται στην αριθμητική προσέγγιση της λύσης κρατώντας λίγους μόνο όρους (υπενθυμίζουμε ότι έχει ληφθεί $K=5$), και οι δύο προβλέψεις τείνουν να συμπίψουν καθώς το K αυξάνεται.

4. Υπολογισμός απόκρισης $\xi_3(\omega)$ του πλωτού κυλίνδρου στη κατακόρυφη κίνηση

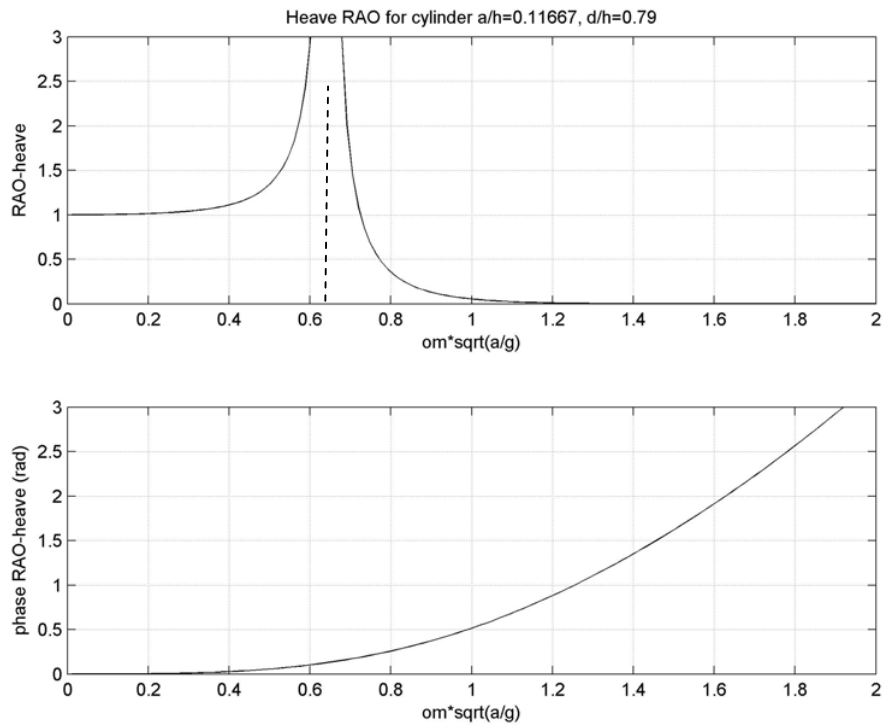
Με βάση όλα τα προηγούμενα το μιγαδικό πλάτος της απόκρισης του πλωτού κυλίνδρου στη κατακόρυφη ταλάντωση υπολογίζεται με αντικατάσταση των διαφόρων ποσοτήτων στην Εξ. (2α.2), και σε αδιάστατη μορφή (ως προς το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας του προσπίπτοντος κυματισμού) είναι

$$\frac{\xi_3(\omega)}{A} = RAO_{heave}(\omega) = \frac{1}{A} \frac{X_{03}(\omega) + X_{d3}(\omega)}{(-\omega^2 (M + A_{33}(\omega)) + j\omega B_{33}(\omega) + C_{33})}. \quad (2\alpha.37)$$

Αριθμητικά αποτελέσματα για τη περίπτωση του κυλίνδρου με $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$ παρουσιάζονται στα Σχήμα 2α.6, για διάφορες τιμές του αδιάστατου κυματαριθμού $k_0 a = 2\pi a / \lambda$, και στο Σχήμα 2α.7, αντίστοιχα, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega \sqrt{a/g}$. Στα σχήματα αυτά εικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή η θέση του συντονισμού στη κατακόρυφη ταλάντωση του πλωτού κυλίνδρου.



Σχήμα 2α.6: Υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου για $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου κυματαριθμού $k_0 a = 2\pi a / \lambda$



Σχήμα 2α.7: Υδροδυναμικοί συντελεστές κυλίνδρου για $a/h=0.116$ και $d/h=0.79$, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega\sqrt{a/g}$

Παρατηρούμε χαρακτηριστικά στα ανωτέρω σχήματα ότι σε μικρές συχνότητες ο κύλινδρος ταλαντώνεται υδροστατικά παρακολουθώντας τη κατακόρυφη ανύψωση του κύματος, με την ίδια φάση ($\xi_3(\omega)/A \rightarrow 1, \omega \rightarrow 0$), όπως είναι φυσικά αναμενόμενο. Αντίθετα, καθώς η συχνότητα αυξάνει αρκετά πάνω από τη τιμή της συχνότητας συντονισμού η κατακόρυφη ταλάντωση του κυλίνδρου διαρκώς εξασθενεί, και η διαφορά φάσης της κίνησης από την ανύψωση του κύματος αυξάνεται διαρκώς. Και οι διαπιστώσεις αυτές κρίνονται φυσικές και αναμενόμενες στα πλαίσια ισχύος της γραμμικής θεωρίας, δηλαδή όσο οι κυματισμοί που διεγείρουν τη κίνηση έχουν μικρό πλάτος και η κλίση ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρή.

Κλείνοντας το συμπλήρωμα αυτό σημειώνουμε ότι το πρόγραμμα σε Matlab για τους παραπάνω υπολογισμούς είναι διαθέσιμο από την ιστοσελίδα του μαθήματος.

5. Βιβλιογραφικές αναφορές

Αθανασούλης Γ.Α. & Μπελιμπασάκης Κ.Α., 2002, Κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον, Σημειώσεις του αντιστοίχου μαθήματος, ΣΝΜΜ-ΕΜΠ

Black J.L., Mei C.C. & Bray M., 1971, Radiation and scattering of water waves by rigid bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 46, pp. 151-164.

Garrett C.J.R., 1971, Wave forces on a circular dock, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 46, pp. 129-139.

Prenter P.M., 1975, *Splines and variational methods*, Wiley.

Sabunku T. & Calisal S., 1981, Hydrodynamic coefficients for vertical radiation of circular cylinders in finite depth, *Ocean Engineering*, Vol.8, pp. 25-63.

Young R.W., 1981, Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters, *Applied Ocean Research* Vol. 3, pp. 119-133.

Yu Z. & Falnes J., 1995, State-space modeling of a vertical cylinder in heave, *Applied Ocean Research* Vol. 17, pp. 265-275.

2.9 Απλοποιημένος υπολογισμός των κατακόρυφων δυνάμεων Froude-Krylov και περίθλασης. Η προσέγγιση για κύματα μεγάλου μήκους (long-wave approximation) και η υπόθεση της «σχετικής ταχύτητας» του Korvin-Kroukovsky

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο απλοποιημένου (προσεγγιστικού) υπολογισμού της κατακόρυφης υδροδυναμικής διέγερσης (δηλ., της δύναμης Froude-Krylov και της δύναμης περίθλασης) που αναπτύσσεται σε επιπλέοντα σώματα με κατά-κόρυφα πλευρικά τοιχώματα. Η προσέγγιση αυτή ισχύει με ικανοποιητική ακρίβεια όταν το μήκος κύματος λ του προσπίπτοντος κυματισμού είναι αρκετά μεγαλύτερο από την οριζόντια διάσταση B του επιπλέοντος σώματος. Αρχίζουμε τη μελέτη μας με την παραγωγή (υπενθύμιση, κατ' ουσίαν) ορισμένων απλών σχέσεων για το δυναμικό, την πίεση και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στην περίπτωση απλού αρμονικού κυματισμού.

Έστω, λοιπόν, απλός αρμονικός κυματισμός διαδιδόμενος παράλληλα προς τον άξονα x_1 , με κατεύθυνση από το $+\infty$ στο $-\infty$, μήκους κύματος $\lambda = 2\pi/k_0$ και πλάτους A . Εάν h είναι το βάθος του νερού, η κυκλική συχνότητα ω , ο κυματαριθμός k_0 και το βάθος h σχετίζονται με τη σχέση διασποράς $\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 h)$, την οποία γράφουμε σε αδιάστατη μορφή ως

$$\frac{\omega^2 h}{g} = (k_0 h) \tanh(k_0 h). \quad (1)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$, η επαγόμενη υδροδυναμική πίεση $p(\mathbf{x}, t)$ και η επαγόμενη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta(\mathbf{R}, t) = \eta(x_1, x_2, t)$ συνδέονται, στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας, μέσω των σχέσεων

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{και} \quad \eta(\mathbf{R}, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(\mathbf{R}, x_3=0, t)}{\partial t}. \quad (2\alpha, \beta)$$

Θα εισαγάγουμε επίσης, και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, την έννοια της ανύψωσης $\eta_{(x_3)}(\mathbf{R}, t)$ μιας υλικής επιφάνειας ρευστού που βρίσκεται σε (αδιατάρακτο) βάθος x_3 . Αυτή ορίζεται, κατ' αναλογίαν προς την (2β), από τη σχέση

$$\eta_{(x_3)}(\mathbf{R}, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(\mathbf{R}, x_3, t)}{\partial t}. \quad (2\gamma)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2α) και (2γ) παίρνουμε

$$p(\mathbf{x}, t) = \rho g \eta_{(x_3)}(\mathbf{R}, t). \quad (2\delta)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η (γραμμικοποιημένη) υδροδυναμική πίεση στο σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{R}, x_3)$ [οριζόντια θέση \mathbf{R} , βάθος x_3] είναι ανάλογη με την ανύψωση $\eta_{(x_3)}(\mathbf{R}, t)$ της υλικής επιφάνειας που αντιστοιχεί στο ίδιο βάθος, με συντελεστή αναλογίας ρg . Αυτή η απλή σχέση θα μας επιτρέψει να δώσουμε μια απλή και ενδιαφέρουσα ερμηνεία των υδροδυναμικών δυνάμεων Froude-Krylov και περίθλασης. Η παρατήρηση αυτή εξηγεί και το λόγο της εισαγωγής της έννοιας της ανύψωσης μιας υλικής επιφάνειας του νερού που βρίσκεται σε (αδιατάρακτο) βάθος x_3 .

Δεδομένου ότι όλες οι χρονικές εξαρτήσεις είναι αρμονικές, συχνότητας ω , τα χρονο-εξαρτώμενα μεγέθη θα αναπαρίστανται μέσω των παραστατικών τους μιγάδων, π.χ.

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \text{Re}_j \left\{ \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}; \omega) e^{j\omega t} \right\}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Το δυναμικό ταχύτητας του *προσπίπτοντος αρμονικού κυματισμού* (αδιατάρακτο πεδίο) γράφεται στη μορφή

$$\overset{\circ}{\Phi}_I(\mathbf{x}; \omega) e^{j\omega t} = j\omega A \cdot \overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x}; \omega), \quad (3\alpha)$$

όπου (βλ. και σχέση (15) εδαφίου 2.2)

$$\overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x}; \omega) = \frac{g}{\omega^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cosh k_0(x_3 + h)}{\cosh k_0 h} \\ \exp(k_0 x_3) \end{array} \right\} \exp(j k_0 x_1), \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho\eta\chi\acute{o} \nu\epsilon\rho\acute{o} \\ \beta\alpha\theta\acute{o} \nu\epsilon\rho\acute{o} \end{array} \right\}. \quad (3\beta)$$

Η επαγόμενη υδροδυναμική πίεση (Froude-Krylov) δίδεται από τη σχέση (βλ. (2α), ανωτέρω)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{p}_I(\mathbf{x}; \omega) &= -\rho(j\omega)^2 A \cdot \overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x}; \omega) = \\ &= \rho g A \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cosh k_0(x_3 + h)}{\cosh k_0 h} \\ \exp(k_0 x_3) \end{array} \right\} \exp(j k_0 x_1), \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho\eta\chi\acute{o} \nu\epsilon\rho\acute{o} \\ \beta\alpha\theta\acute{o} \nu\epsilon\rho\acute{o} \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

και η επαγόμενη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας (ο αδιατάρακτος κυματισμός), δίδεται από τη σχέση (βλ. (2β), ανωτέρω)

$$\overset{\circ}{\eta}_I(\mathbf{R}; \omega) = -\frac{1}{g}(j\omega)^2 A \cdot \overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{R}, x_3=0; \omega) = A \exp(j k_0 x_1). \quad (5)$$

Τέλος, η επαγόμενη ανύψωση $\overset{\circ}{\eta}_{I,(x_3)}(x_1, x_2; \omega)$ μιας υλικής επιφάνειας που βρίσκεται σε (αδιατάρακτο) βάθος x_3 συνδέεται με την πίεση $\overset{\circ}{p}_I(\mathbf{x}; \omega) \equiv \overset{\circ}{p}_I(x_1, x_2, x_3; \omega)$ με τη σχέση (βλ. (2δ))

$$\overset{\circ}{p}_I(\mathbf{x}; \omega) \equiv \overset{\circ}{p}_I(x_1, x_2, x_3; \omega) = \rho g \overset{\circ}{\eta}_{I,(x_3)}(x_1, x_2; \omega), \quad (6)$$

η οποία θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη συνέχεια.

- Υπολογισμός της κατακόρυφης δύναμης Froude-Krylov

Η κατακόρυφη δύναμη Froude-Krylov που ασκείται πάνω σε επιπλέον σώμα δίδεται από τη σχέση:

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = \iint_{\partial D_B} \overset{\circ}{p}_I(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B. \quad (7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $n_3(\mathbf{x})$ είναι η συνιστώσα του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην βρεχόμενη επιφάνεια ∂D_B του επιπλέοντος σώματος.

Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν την περίπτωση επιπλέοντος σώματος με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα και σταθερό βύθισμα d (βλ. Σχήμα 1). Ας συμβολίσουμε την ίσαλο επιφάνεια του σώματος με $\Omega = \Omega(0)$ και την οριζόντια τομή του σώματος σε βάθος $-a$ με $\Omega(-a)$. Εφ' όσον τα πλευρικά τοιχώματα είναι κατακόρυφα, η προβολή κάθε τομής $\Omega(-a)$ στο επίπεδο της ισάλου $[x_1, x_2, (x_3 = 0)]$ ταυτίζεται με την ίσαλο $\Omega = \Omega(0)$. Επί πλέον, πάνω στα κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα ισχύει $n_3(\mathbf{x}) = 0$, ενώ πάνω στον οριζόντιο πυθμένα $\Omega(-d)$ του σώματος έχουμε $n_3(\mathbf{x}) = 1$. Άρα το ολοκλήρωμα στο δεξιά μέλος της σχέσης (7) περιορίζεται μόνο πάνω στον οριζόντιο πυθμένα $\Omega(-d)$, και παίρνει τη μορφή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = \iint_{\Omega(-d)} \overset{\circ}{p}_I(\mathbf{R}, x_3 = -d; \omega) dS_B. \quad (8\alpha)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (8α) και (6), παίρνουμε

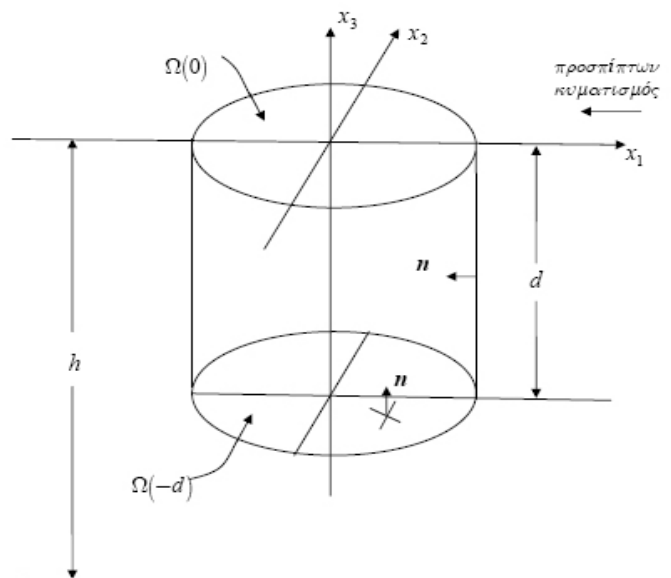
$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = \rho g \iint_{\Omega(-d)} \overset{\circ}{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}; \omega) dS_B, \quad (8\beta)$$

ή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = C_{33} \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I, \Omega(-d)}(\omega)}, \quad (8\gamma)$$

όπου

$$\overline{\overset{\circ}{\eta}_{I, \Omega(-d)}(\omega)} = \frac{1}{S(\Omega)} \iint_{\Omega(-d)} \overset{\circ}{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}; \omega) dx_1 dx_2, \quad (8\delta)$$



Σχήμα 1 Γενική μορφολογία επιπλέοντος σώματος με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα

$dx_1 dx_2 = dS_B$ είναι το εμβαδικό στοιχείο της επιφάνειας $\Omega(-d)$, $S(\Omega)$ είναι το εμβαδόν της ισάλου του επιπλέοντος κατακόρυφου κυλίνδρου, $C_{33} = \rho g S(\Omega)$ είναι ο υδροστατικός συντελεστής σε κατακόρυφη ταλάντωση (TPI), και $\overline{\dot{\eta}_{I,\Omega(-d)}(\omega)}$, όπως ορίζεται από τη σχέση (8δ), είναι η μέση τιμή της ανύψωσης $\dot{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}; \omega)$ πάνω στην επιφάνεια $\Omega(-d)$ του πυθμένα του επιπλέοντος σώματος.

Η σχέση (8γ) είναι **ακριβής για επιπλέοντα σώματα με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα και σταθερό βύθισμα**, και ισχύει για κάθε μήκος κύματος του προσπίπτοντος κυματισμού. Τα πλεονεκτήματά της είναι ότι, αφ' ενός είναι απλή και ευκολομημόνευτη και, αφ' ετέρου, **αποτελεί τη βάση για διάφορες προσεγγιστικές σχέσεις** που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς στο ναυπηγικό επάγγελμα για την απλοποίηση των υδροδυναμικών υπολογισμών. Θα συζητήσουμε τώρα ορισμένες εφαρμογές και γενικεύσεις της (8γ).

Εφαρμογή 1. Ασυμπτωτική τιμή της δύναμης Froude-Krylon για την περίπτωση κυμάτων μικρού μήκους ως προς την x_1 -οριζόντια χαρακτηριστική διάσταση, έστω B_{x_1} , του επιπλέοντος σώματος (short-wave approximation).

Στην περίπτωση αυτή $B_{x_1} / \lambda \gg 1$, οπότε θα έχουμε πολλά μήκη κύματος πάνω στην έκταση $\Omega(-d)$. Τότε όμως η μέση τιμή της ανύψωσης $\dot{\eta}_{I,(-d)}(\mathbf{R}; \omega)$ θα είναι πρακτικά μηδενική. Άρα,

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = C_{33} \cdot \overline{\dot{\eta}_{I,\Omega(-d)}(\omega)} \xrightarrow{B_{x_1}/\lambda \gg 1} 0. \quad (9)$$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα είναι τετριμμένο εάν $d/\lambda > 1/2$ (γιατί;). Η ανωτέρω ανάλυση μας δείχνει όμως ότι ισχύει για κάθε τιμή του λόγου d/λ .

Εφαρμογή 2. Ασυμπτωτική τιμή της δύναμης Froude-Krylon για την περίπτωση κυμάτων μεγάλου μήκους ως προς την x_1 -οριζόντια χαρακτηριστική διάσταση, έστω B_{x_1} , του επιπλέοντος σώματος (long-wave approximation).

Στην περίπτωση αυτή $B_{x_1} / \lambda \ll 1$, πράγμα που σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή μικρό μόνο τμήμα της κυματομορφής $\dot{\eta}_{I,(-d)}(\mathbf{R}; \omega)$ θα αλληλεπιδρά με την επιφάνεια $\Omega(-d)$.

Κατά συνέπεια, η μεταβολή της τιμής της ποσότητας $\dot{\eta}_{I,(-d)}(\mathbf{R}; \omega)$ όταν η τετμημένη x_1 κινείται κατά μήκος του πυθμένα $\Omega(-d)$, θα είναι αμελητέα. Μπορούμε λοιπόν στην περίπτωση αυτή ($B_{x_1} / \lambda \ll 1$) να θέσουμε

$$\dot{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}; \omega) \Big|_{\mathbf{R} \in \Omega(-d)} \approx \text{σταθερό} \approx \dot{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R} = \mathbf{0}; \omega), \quad (10\alpha)$$

οπότε η σχέση (8γ) απλουστεύεται στην

$$\dot{F}_3^{(FK)}(\omega)_{B_{x_1}/\lambda \ll 1} \approx C_{33} \cdot \dot{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}=\mathbf{0}; \omega) = A \frac{\cosh k_0(-d+h)}{\cosh k_0 h} \cdot C_{33} \quad [\text{ρηχό νερό}] \quad (10\beta)$$

ή

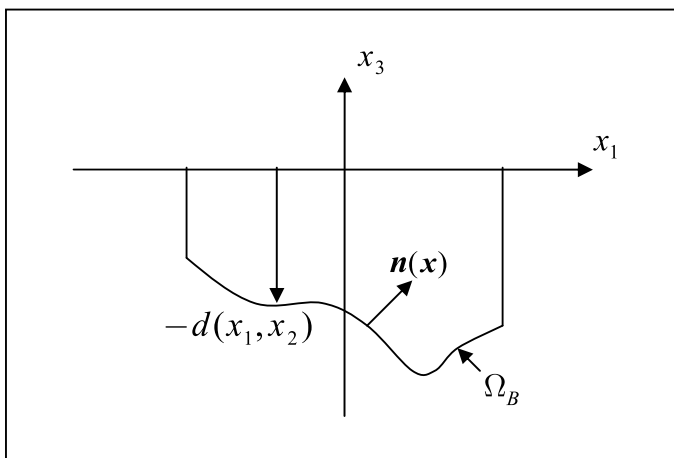
$$\dot{F}_3^{(FK)}(\omega)_{B_{x_1}/\lambda \ll 1} \approx C_{33} \cdot \dot{\eta}_{I(-d)}(\mathbf{R}=\mathbf{0}; \omega) = A \exp(-k_0 d) \cdot C_{33} \cdot \quad [\text{βαθύ νερό}] \quad (10\gamma)$$

Το προφανές πλεονέκτημα των ανωτέρω προσεγγιστικών (ασυμπτωτικών) σχέσεων είναι ότι μας δίνουν τη δύναμη Froude-Krylon (για μακρά κύματα) χωρίς να χρειάζεται ολοκλήρωση πάνω στον πυθμένα του επιπλέοντος σώματος. Στην **Άσκηση 1** ζητείται να διερευνήσετε την ακρίβεια των σχέσεων (10β,γ) για σώμα απλής γεωμετρίας.

Άσκηση 1: Φορτηγίδα (μπάρτζα) ορθογωνικής διατομής μεγάλου μήκους L , πλάτους $B=12m$ και βυθίσματος $d=6m$ βρίσκεται αγκυροβολημένη σε νερά βάθους $h=18m$. Να υπολογισθούν οι κατακόρυφες δυνάμεις Froude-Krylon από πλευρικούς κυματισμούς (ανά μονάδα μήκους της φορτηγίδας) συναρτήσει του μήκους κύματος α με τη βοήθεια της προσεγγιστικής σχέσης (10), **β**) με τη βοήθεια ολοκλήρωσης των πιέσεων πάνω στη γάστρα, και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

Άσκηση 2: Να υπολογίσετε την κατακόρυφη και την οριζόντια δύναμη Froude-Krylon που ασκούνται πάνω σε πλωτή δεξαμενή σφαιρικού σχήματος, ακτίνας $a=10m$, η οποία βρίσκεται αγκυρωμένη σε βαθύ νερό και δέχεται την επίδραση απλών αρμονικών κυματισμών μήκους κύματος $\lambda=5m, 10m, 15m, 20m$. Να συγκρίνετε την κατακόρυφη δύναμη Froude-Krylon με το βάρος της δεξαμενής.

Εφαρμογή 3 [Γενίκευση της σχέσεως (8γ)]. Όπως αναφέραμε ήδη ανωτέρω, η σχέση (8γ) είναι ακριβής για επιπλέοντα σώματα με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα. Ας υποθέσουμε



Σχήμα 2: Κατακόρυφη τομή του επιπλέοντος σώματος, με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα και μεταβαλλόμενο (τοπικό) βύθισμα $d(x_1, x_2)$.

τόρα ότι εξετάζουμε ένα επιπλέον σώμα με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα και πυθμένα

$$\Omega_B = \{ \mathbf{x} : x_3 = -d(x_1, x_2) \},$$

όπου $d(x_1, x_2)$ είναι το τοπικό βύθισμα στο σημείο (x_1, x_2) . Βλ. Σχήμα 2. Η κατακόρυφη δύναμη Froude Krylon δίδεται από τη σχέση (7), όπου τώρα η ολοκλήρωση εκτείνεται πάνω στο μη-κατακόρυφο τμήμα της βρεχόμενης επιφάνειας του επιπλέοντος σώματος, δηλαδή πάνω στην επιφάνεια

$$\Omega_B = \{ \mathbf{x} : x_3 = -T_b(x_1, x_2) \} :$$

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{p}_l(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B. \quad (11\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6), και τη γεωμετρική ταυτότητα $n_3(\mathbf{x}) dS_B = dx_1 dx_2$, η σχέση (11α) για την κατακόρυφη δύναμη Froude-Krylov γράφεται στη μορφή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = \rho g \iint_{\Omega(0)} \overset{\circ}{\eta}_{l,(-d(x_1,x_2))}(x_1, x_2; \omega) dx_1 dx_2, \quad (11\beta)$$

όπου $\Omega(0)$ είναι η προβολή του πυθμένα $\Omega_B = \{\mathbf{x} : x_3 = -d(x_1, x_2)\}$ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο $[x_1 x_2 (x_3 = 0)]$. Εισάγοντας τη μέση τιμή της ανύψωσης $\overset{\circ}{\eta}_{l,(x_3)}(x_1, x_2; \omega)$ πάνω στον πυθμένα Ω_B ,

$$\overline{\overset{\circ}{\eta}_{l,\Omega_B}(\omega)} = \frac{1}{S(\Omega(0))} \iint_{\Omega(0)} \overset{\circ}{\eta}_{l,(-d(x_1,x_2))}(x_1, x_2; \omega) dx_1 dx_2, \quad (11\gamma)$$

η (11β) γράφεται στη μορφή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) = C_{33} \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{l,\Omega_B}(\omega)}, \quad (11\delta)$$

όπου $C_{33} = \rho g S(\Omega(0))$. Η (11δ) αποτελεί γενίκευση της (8γ), για την περίπτωση επιπλέοντος σώματος με γενικό (όχι κατ' ανάγκη επίπεδο) πυθμένα. Τώρα όμως η ολοκλήρωση για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $\overline{\overset{\circ}{\eta}_{l,\Omega_B}(\omega)}$ είναι πιο περίπλοκη, εφ' όσον λαμβάνει υπ' όψιν την ακριβή μορφή του πυθμένα $\Omega_B = \{\mathbf{x} : x_3 = -d(x_1, x_2)\}$, μέσω του τοπικού βυθίσματος $d(x_1, x_2)$. Σημειώνεται ότι η σχέση (11δ) είναι ακριβής όταν η ολοκλήρωση (11γ) εκτελείται με ακρίβεια.

- Υπολογισμός της κατακόρυφης δύναμης περίθλασης που ασκείται σε επιπλέον σώμα, στα πλαίσια της προσέγγισης των μακρών κυματισμών (long wave approximation)

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της κατακόρυφης δύναμης περίθλασης $\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega)$, που ασκείται από **μακρούς προσπίπτοντες κυματισμούς** πάνω σε επιπλέον σώμα με κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα και **βύθισμα** d , είτε **σταθερό**, είτε (γενικότερα) **ασθενώς μεταβαλλόμενο**, $d = d(x_1, x_2)$, έτσι ώστε στον πυθμένα Ω_B να ισχύει η προσέγγιση

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= (-d_{,1}(x_1, x_2), -d_{,2}(x_1, x_2), 1) / \sqrt{1 + d_{,1}^2(x_1, x_2) + d_{,2}^2(x_1, x_2)} \approx \\ &\approx (o(1), o(1), 1 - o(1)), \quad (x_1, x_2, -d(x_1, x_2)) \in \Omega_B, \end{aligned} \quad (12)$$

όπου $o(1)$ συμβολίζει ποσότητα πολύ μικρότερη της μονάδας. Η δύναμη $\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega)$ προκύπτει με ολοκλήρωση της πίεσης του πεδίου περίθλασης $\overset{\circ}{\Phi}_D(\mathbf{x}; \omega) = j\omega A \overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)$ πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια ∂D_B :

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = \iint_{\partial D_B} \overset{\circ}{p}_D(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B, \quad (13\alpha)$$

όπου

$$\overset{\circ}{p}_D(\mathbf{x}; \omega) = -\rho(j\omega) \overset{\circ}{\Phi}_D(\mathbf{x}; \omega) = -\rho(j\omega)^2 A \cdot \overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega), \quad (13\beta)$$

και $n_3(\mathbf{x})$ είναι η συνιστώσα του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος πάνω στο σύνορο ∂D_B . Για τους ίδιους ως ανωτέρω (περίπτωση δύναμης Froude-Krylov) λόγους, η ολοκλήρωση μπορεί να περιορισθεί μόνο πάνω στον πυθμένα του σώματος Ω_B :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) &= \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{p}_D(\mathbf{R}, x_3 = -d(x_1, x_2); \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B = \\ &= -\rho(j\omega)^2 A \cdot \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{R}, x_3 = -d(x_1, x_2); \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B. \end{aligned} \quad (14)$$

Εν προκειμένω, σε αντίθεση με την περίπτωση της δύναμης Froude-Krylov, το δυναμικό περίθλασης $\overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)$ δεν είναι δεδομένο⁽¹⁾. Γνωρίζουμε όμως τις συνθήκες που αυτό ικανοποιεί: σχέσεις (28α-στ) [$\ell = d$] του εδαφίου 2.2. Απλή παρατήρηση των σχέσεων αυτών αρκεί για να διαπιστώσουμε ότι το δυναμικό περίθλασης $\overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)$ ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις και συνθήκες με το δυναμικό ακτινοβολίας $\overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega)$, εκτός από μια, τη συνοριακή συνθήκη πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια ∂D_B , όπου ισχύουν τα εξής:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)}{\partial n} = \underbrace{-\overset{\circ}{\Phi}_{0,1}(\mathbf{x}; \omega) n_1(\mathbf{x}) - \overset{\circ}{\Phi}_{0,2}(\mathbf{x}; \omega) n_2(\mathbf{x})}_{V_{n,HOR}(\mathbf{x}; \omega)} - \underbrace{\overset{\circ}{\Phi}_{0,3}(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x})}_{V_{n,VER}(\mathbf{x}; \omega)}, \quad (15\alpha)$$

και

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega)}{\partial n} = n_3(\mathbf{x}). \quad (15\beta)$$

Από τη μορφή της συνθήκης (15α) διαπιστώνουμε αμέσως ότι το δυναμικό περίθλασης αντιστοιχεί στο δυναμικό ενός πεδίου ροής που παράγεται αν υποθέσουμε ότι το επιπλέον σώμα κρατείται ακίνητο στη μέση θέση του σε ήρεμο νερό, και κάθε σημείο \mathbf{x} του συνόρου ∂D_B πάλλεται με επιβεβλημένη (τοπική) κάθετη ταχύτητα

$$V_n(\mathbf{x}; \omega) = V_{n,HOR}(\mathbf{x}; \omega) + V_{n,VER}(\mathbf{x}; \omega), \quad \mathbf{x} \in \partial D_B \quad (16)$$

⁽¹⁾ Μπορούμε βέβαια να υπολογίσουμε αριθμητικά το δυναμικό περίθλασης $\overset{\circ}{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)$ εάν επιλύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών, που ορίζεται από τις σχέσεις (28α-στ) του εδαφίου 2.2. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τη δύναμη περίθλασης χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα περίθλασης, με χρήση των σχέσεων Haskind-Newman, αν γνωρίζουμε το κατακόρυφο δυναμικό ακτινοβολίας. Στο παρόν εδάφιο επιθυμούμε όμως να παρουσιάσουμε έναν αυτοτελή απλοποιημένο (προσεγγιστικό) υπολογισμό της κατακόρυφης δύναμης περίθλασης.

(η ταχύτητα αυτή δεν αντιστοιχεί σε κίνηση στερεού σώματος.) Λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος συνοριακών τιμών που ικανοποιεί το δυναμικό περίθλασης $\dot{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega)$, μπορούμε να το διασπάσουμε σε πεδία

$$\dot{\Phi}_d(\mathbf{x}; \omega) = \dot{\Phi}_{d,HOR}(\mathbf{x}; \omega) + \dot{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega), \quad (17\alpha)$$

όπου το $\dot{\Phi}_{d,HOR}(\mathbf{x}; \omega)$ («οριζόντιο» δυναμικό περίθλασης) παράγεται από την ταλάντωση του συνόρου ∂D_B με επιβαλλόμενη (τοπική) κάθετη ταχύτητα

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_{d,HOR}(\mathbf{x}; \omega)}{\partial n} = V_{n,HOR}(\mathbf{x}; \omega), \quad \mathbf{x} \in \partial D_B \quad (17\beta)$$

ενώ το $\dot{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega)$ («κατακόρυφο» δυναμικό περίθλασης) παράγεται από την ταλάντωση του συνόρου ∂D_B με επιβαλλόμενη (τοπική) κάθετη ταχύτητα

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega)}{\partial n} = V_{n,VER}(\mathbf{x}; \omega), \quad \mathbf{x} \in \partial D_B. \quad (17\gamma)$$

Η υπόθεση των **μικρών κλίσεων της επιφάνειας** Ω_B , σε συνδυασμό με την υπόθεση **μακρών κυμάτων** ($B_{x_1} / \lambda \ll 1$) την οποίαν επικαλούμεθα εκ νέου στο σημείο αυτό, μας επιτρέπουν να θεωρήσουμε ότι

$$\dot{\Phi}_{0,1}(\mathbf{x}; \omega) n_1(\mathbf{x}) + \dot{\Phi}_{0,2}(\mathbf{x}; \omega) n_2(\mathbf{x}) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_B, \quad (18\alpha)$$

εκ της οποίας λαμβάνουμε

$$V_{n,HOR}(\mathbf{x}; \omega) = \begin{cases} -\dot{\Phi}_{0,1}(\mathbf{x}; \omega) n_1(\mathbf{x}) - \dot{\Phi}_{0,2}(\mathbf{x}; \omega) n_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D_B \setminus \Omega_B, \\ (\approx) 0, & \mathbf{x} \in \Omega_B. \end{cases} \quad (18\beta)$$

Εξ άλλου, δεδομένου ότι στα κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα έχουμε $n_3(\mathbf{x}) = 0$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (3), εύκολα βρίσκουμε ότι

$$V_{n,VER}(\mathbf{x}; \omega) = \begin{cases} -\dot{\Phi}_{0,3}(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) \stackrel{\text{σχέση}}{=} \stackrel{(3)}{-} k_0 \dot{\Phi}_0(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_B, \\ 0, & \mathbf{x} \in \partial D_B \setminus \Omega_B. \end{cases} \quad (18\gamma)$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το πεδίο $\dot{\Phi}_{d,HOR}(\mathbf{x}; \omega)$, του «οριζόντιου» δυναμικού περίθλασης (το οποίο διεγείρεται μόνον από τις οριζόντιες ταλαντωτικές κινήσεις των πλευρικών τοιχωμάτων $\partial D_B \setminus \Omega_B$), δεν επάγει σημαντικές υδροδυναμικές πιέσεις στον πυθμένα Ω_B του επιπλέοντος σώματος, και άρα δεν συνεισφέρει στην κατακόρυφη δύναμη περίθλασης⁽²⁾. Κατά συνέπεια, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της συνολικής

⁽²⁾ Αυτό είναι μόνο προσεγγιστικά ακριβές, αλλά δίδει ικανοποιητική προσέγγιση σε πολλές περιπτώσεις.

κατακόρυφης δύναμης περίθλασης αγνοώντας το $\overset{\circ}{\Phi}_{d,HOR}(\mathbf{x};\omega)$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο το «κατακόρυφο» δυναμικό περίθλασης $\overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x};\omega)$. Κατά συνέπεια, η σχέση (14) γράφεται στη μορφή:

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = -\rho(j\omega)^2 A \cdot \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x};\omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B. \quad (19)$$

Συγκρίνοντας τώρα τα (γραμμικά) προβλήματα συνοριακών τιμών που ικανοποιούν τα δυναμικά $\overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x};\omega)$ και $\overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x};\omega)$, διαπιστώνουμε ότι αυτά ικανοποιούν ακριβώς τις ίδιες ομογενείς συνθήκες (συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας στο επίπεδο $x_3=0$, συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο $|\mathbf{R}| \rightarrow \infty$, συνθήκη μη-εισχώρησης στον πυθμένα της θάλασσας $x_3=-h$, και εξίσωση Laplace σ' ολόκληρη τη μάζα του νερού), αλλά διαφορετικές μη-ομογενείς συνθήκες πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια ∂D_B του επιπλέοντος σώματος [συνθήκες (15β) και (17γ)/(18γ)], οι οποίες γράφονται συνοπτικά ως εξής (γιατί):

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x};\omega)}{\partial n} = \begin{cases} n_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_B, \\ 0 & \mathbf{x} \in \partial D_B \setminus \Omega_B, \end{cases} \quad (20\alpha)$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x};\omega)}{\partial n} = \begin{cases} -k_0 \overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x};\omega) \cdot n_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_B, \\ 0 & \mathbf{x} \in \partial D_B \setminus \Omega_B, \end{cases} \quad (20\beta)$$

Όπως βλέπουμε, τα δεξιά μέλη των σχέσεων (20α,β) περιέχουν και τα δύο το συνημίτονο κατεύθυνσης $n_3(\mathbf{x})$. Λόγω της γραμμικότητας των συνοριακών προβλημάτων, εάν τα δεξιά μέλη των μη-ομογενών συνθηκών ήταν ανάλογα, τότε και οι λύσεις των αντιστοίχων προβλημάτων, δηλαδή τα δυναμικά $\overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x};\omega)$ και $\overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x};\omega)$, θα ήταν επίσης ανάλογα, και μάλιστα με τον ίδιο συντελεστή αναλογίας. Η επιθυμητή αναλογία των καθέτων ταχυτήτων (σε κάθε σημείο της επιφάνειας Ω_B του πυθμένα του επιπλέοντος σώματος) δεν επιτυγχάνεται στο βαθμό που ο όρος $\overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x};\omega)$ μεταβάλλεται από θέση σε θέση πάνω στο σύνορο Ω_B . Έτσι, προκειμένου να εφαρμόσουμε το επιχείρημα της γραμμικότητας (αναλογίας), προχωράμε εισάγοντας την ακόλουθη **απλουστευτική παραδοχή**:

αντικαθιστούμε στο δεξιά μέλος της συνοριακής συνθήκης (20β) τη

(μεταβλητή) ποσότητα $\overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x};\omega)$, $\mathbf{x} \in \Omega_B$, από τη (σταθερή) μέση τιμή της

$$\overline{\overset{\circ}{\Phi}_0}_{\Omega_B}(\omega) = \frac{1}{S(\Omega(0))} \iint_{\Omega(0)} \overset{\circ}{\Phi}_0(x_1, x_2, -d(x_1, x_2); \omega) dx_1 dx_2. \quad (21)$$

Το σφάλμα που εισάγεται από αυτήν την αντικατάσταση είναι μικρό, εάν η συνάρτηση $\overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x};\omega)$ μεταβάλλεται αργά (κατά μικρό ποσοστό) όταν το \mathbf{x} διατρέχει το σύνορο Ω_B . Αυτό συμβαίνει όταν ισχύει η υπόθεση των **μακρών κυμάτων** ($B_{x_1}/\lambda \ll 1$), την οποίαν

έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στην ανάλυσή μας για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κατακόρυφης δύναμης περίθλασης.

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω απλουστευτική παραδοχή και τη σχέση (21), γράφουμε τη συνοριακή συνθήκη (20β) στη μορφή

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega)}{\partial n} = \begin{cases} -k_0 \overline{\overset{\circ}{\Phi}_{0,\Omega_B}(\omega)} \cdot n_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_B, \\ 0 & \mathbf{x} \in \partial D_B \setminus \Omega_B. \end{cases} \quad (20\gamma)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις συνθήκες (20α) και (20γ), και εφαρμόζοντας την αρχή της αναλογίας (γραμμικότητα), καταλήγουμε στη σχέση

$$\overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega) = -k_0 \overline{\overset{\circ}{\Phi}_{0,\Omega_B}(\omega)} \cdot \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega). \quad (22)$$

Εισάγοντας το ανωτέρω αποτέλεσμα για το $\overset{\circ}{\Phi}_{d,VER}(\mathbf{x}; \omega)$ στη σχέση (19), λαμβάνουμε

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = \rho k_0 (j\omega)^2 A \cdot \overline{\overset{\circ}{\Phi}_{0,\Omega_B}(\omega)} \cdot \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B. \quad (23)$$

Όμως, το ολοκλήρωμα $\iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B$ εκφράζεται μέσω των συντελεστών πρόσθετης μάζας και απόσβεσης σε κατακόρυφη ταλάντωση του ίδιου σώματος:

$$\rho \iint_{\Omega_B} \overset{\circ}{\Phi}_3(\mathbf{x}; \omega) n_3(\mathbf{x}) dS_B = \Pi_{33}(\omega) = A_{33}(\omega) + \frac{1}{j\omega} B_{33}(\omega), \quad (24)$$

ενώ η μέση τιμή $\overline{\overset{\circ}{\Phi}_{0,\Omega_B}(\omega)}$ του δυναμικού $\overset{\circ}{\Phi}_0(\mathbf{x}; \omega)$ πάνω στην επιφάνεια Ω_B μπορεί να εκφρασθεί (βλ. σχέση (2γ)) με τη βοήθεια της αντίστοιχης μέσης τιμής της ανύψωσης της υλικής επιφάνειας $\overset{\circ}{\eta}_{I,(x_3)}(x_1, x_2; \omega)$, ως εξής:

$$j\omega A \cdot \overline{\overset{\circ}{\Phi}_{0,\Omega_B}(\omega)} = \overline{\overset{\circ}{\Phi}_{I,\Omega_B}(\omega)} \stackrel{\text{σχέση}}{(2\gamma)} - \frac{\mathbf{g}}{j\omega} \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)}, \quad (25\alpha)$$

όπου, υπενθυμίζουμε,

$$\overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} = \frac{1}{S(\Omega(0))} \iint_{\Omega(0)} \overset{\circ}{\eta}_{I,(-d(x_1,x_2))}(x_1, x_2; \omega) dx_1 dx_2. \quad (25\beta)$$

Με τη βοήθεια των (24) και (25α), η (23) γράφεται στη μορφή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = -g k_0 \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot \left[A_{33}(\omega) + \frac{1}{j\omega} B_{33}(\omega) \right], \quad (26\alpha)$$

ή

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = \frac{g k_0}{\omega^2} (j\omega)^2 \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot \left[A_{33}(\omega) + \frac{1}{j\omega} B_{33}(\omega) \right]. \quad (26\beta)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση που έχουμε **βαθύ νερό** ισχύει $\frac{gk_0}{\omega^2} = 1$ (σχέση διασποράς βαθιού νερού), οπότε η (26β) απλουστεύεται στην

$$\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = (j\omega)^2 \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot \left[A_{33}(\omega) + \frac{1}{j\omega} B_{33}(\omega) \right], \quad [\text{βαθύ νερό}]. \quad (26\gamma)$$

Άρα, η δύναμη περίθλασης $\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega)$, όπως εκφράζεται από τις προσεγγιστικές σχέσεις (26), αποτελείται από δύο τμήματα, ένα ανάλογο προς τη μέση τιμή της επιτάχυνσης $(j\omega)^2 \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)}$ με συντελεστή αναλογίας $A_{33}(\omega)$, και ένα ανάλογο προς τη μέση τιμή της ταχύτητας $(j\omega) \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)}$ με συντελεστή αναλογίας $B_{33}(\omega)$, όπου $A_{33}(\omega)$ και $B_{33}(\omega)$ είναι οι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόσβεσης του ίδιου σώματος σε κατακόρυφη ταλάντωση.

Οι ανωτέρω σχέσεις μας επιτρέπουν τον προσεγγιστικό υπολογισμό της κατακόρυφης δύναμη περίθλασης $\overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega)$ χωρίς να επιλύσουμε το πρόβλημα περίθλασης, αρκεί να γνωρίζουμε τους υδροδυναμικούς συντελεστές ακτινοβολίας $A_{33}(\omega)$ και $B_{33}(\omega)$.

- Εφαρμογές και ασκήσεις

1. Η συνολική κατακόρυφη διεγείρουσα υδροδυναμική δύναμη (vertical exciting force) δίδεται, στα πλαίσια της προσέγγισης των μακρών κυματισμών, από τη σχέση

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_3^{(Exc)}(\omega) &= \overset{\circ}{F}_3^{(FK)}(\omega) + \overset{\circ}{F}_3^{(Diff)}(\omega) = \\ &= (j\omega)^2 \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot A_{33}(\omega) + (j\omega) \cdot \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot B_{33}(\omega) + \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} \cdot C_{33}. \end{aligned} \quad (27)$$

2. Υποθέτοντας ότι έχουμε βαθύ νερό, εισάγοντας την εύλογη απλούστευση

$$\overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} = \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,(-d)}(\mathbf{0}; \omega)} = A \exp(-k_0 d) \stackrel{def}{=} \overline{\overset{\circ}{\eta}_{(-d)}(\omega)}, \quad (28\alpha)$$

όταν έχουμε **σταθερό βύθισμα**,

ή

$$\overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,\Omega_B}(\omega)} = \overline{\overset{\circ}{\eta}_{I,(-d^*)}(\mathbf{0}; \omega)} = A \exp(-k_0 d^*) \stackrel{def}{=} \overline{\overset{\circ}{\eta}_{(-d^*)}(\omega)}, \quad (28\beta)$$

όταν έχουμε **μεταβαλλόμενο βύθισμα**,

όπου d^* είναι ένα κατάλληλο «υδροδυναμικό μέσο βύθισμα» (να το υπολογίσετε με τη βοήθεια της σχέσης ορισμού (28β)), οπότε, **γυρνώντας στο πεδίο του χρόνου**, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} F_3^{(Exc)}(t; \omega) &= F_3^{(FK)}(t; \omega) + F_3^{(Diff)}(t; \omega) = \\ &= \frac{\partial^2 \overline{\overset{\circ}{\eta}_{(-d^*)}(t; \omega)}}{\partial t^2} \cdot A_{33}(\omega) + \frac{\partial \overline{\overset{\circ}{\eta}_{(-d^*)}(t; \omega)}}{\partial t} \cdot B_{33}(\omega) + \overline{\overset{\circ}{\eta}_{(-d^*)}(t; \omega)} \cdot C_{33}. \end{aligned} \quad (29)$$

3. Η συνολική κατακόρυφη υδροδυναμική δύναμη (δύναμη ακτινοβολίας συν διεγείρουσα δύναμη συν υδροστατική, χρονικά μεταβαλλόμενη, δύναμη) δίδεται, στα πλαίσια της προσέγγισης των μακρών κυματισμών, από τη σχέση

$$\begin{aligned} F_3^{(Y,\Delta)}(t;\omega) &= F_3^{(FK)}(t;\omega) + F_3^{(Diff)}(t;\omega) + F_3^{(Rad)}(t;\omega) + F_3^{(Y,\Sigma)}(t;\omega) = \\ &= \frac{\partial^2 \eta_{(-d^*)}(t;\omega)}{\partial t^2} \cdot A_{33}(\omega) + \frac{\partial \eta_{(-d^*)}(t;\omega)}{\partial t} \cdot B_{33}(\omega) + \eta_{(-d^*)}(t;\omega) \cdot C_{33} \\ &\quad - \frac{\partial^2 \xi_3(t;\omega)}{\partial t^2} \cdot A_{33}(\omega) - \frac{\partial \xi_3(t;\omega)}{\partial t} \cdot B_{33}(\omega) - \xi_3(t;\omega) \cdot C_{33} = \end{aligned}$$

ή

$$F_3^{(Y,\Delta)}(t;\omega) = - \frac{\partial^2 \xi_{3,REL}(t;\omega)}{\partial t^2} \cdot A_{33}(\omega) - \frac{\partial \xi_{3,REL}(t;\omega)}{\partial t} \cdot B_{33}(\omega) - \xi_{3,REL}(t;\omega) \cdot C_{33}, \quad (30\alpha)$$

όπου

$$\xi_{3,REL}(t;\omega) = \xi_3(t;\omega) - \eta_{(-d^*)}(t;\omega) \quad (30\beta)$$

είναι η **σχετική κατακόρυφη κίνηση του επιπλέοντος σώματος** ως προς την ανύψωση της «μέσης» υλικής επιφάνειας του κυματισμού σε βάθος d^* .

Η έκφραση (30α) για τη συνολική κατακόρυφη υδροδυναμική δύναμη είναι γνωστή ως η **υπόθεση της «σχετικής ταχύτητας» του Korvin-Kroukovsky**. Η υπόθεση αυτή, που όπως είδαμε στο παρόν εδάφιο **ισχύει στα πλαίσια της προσέγγισης των μακρών κυματισμών**, χρησιμοποιήθηκε εκτενώς, ιδιαίτερα στα πρώτα χρόνια της ανάπτυξης των θεωριών δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου σε κυματισμούς (δεκαετίες του 1960 και 1970), για την παραγωγή διαφόρων παραλλαγών της θεωρίας λωρίδων. Στο επόμενο εδάφιο θα εφαρμόσουμε την ανωτέρω σχέση για την παραγωγή των εξισώσεων των κατακόρυφων κινήσεων (heave and pitch) πλοίου παρουσία κυματισμών, με μηδενική μέση ταχύτητα. Το πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίου που κινείται με σταθερή μέση ταχύτητα U δια μέσου αρμονικών κυματισμών εξετάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Άσκηση 3: Να υπολογίσετε το «υδροδυναμικό μέσο βύθισμα» στην περίπτωση επιμήκους επιπλέοντος σώματος σταθερής διατομής που υφίσταται την επίδραση πλευρικών κυματισμών. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δεχθούμε ότι το πεδίο ροής είναι (κατά προσέγγιση) διδιάστατο και να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς εργαζόμενοι στο επίπεδο ενός νομέα.

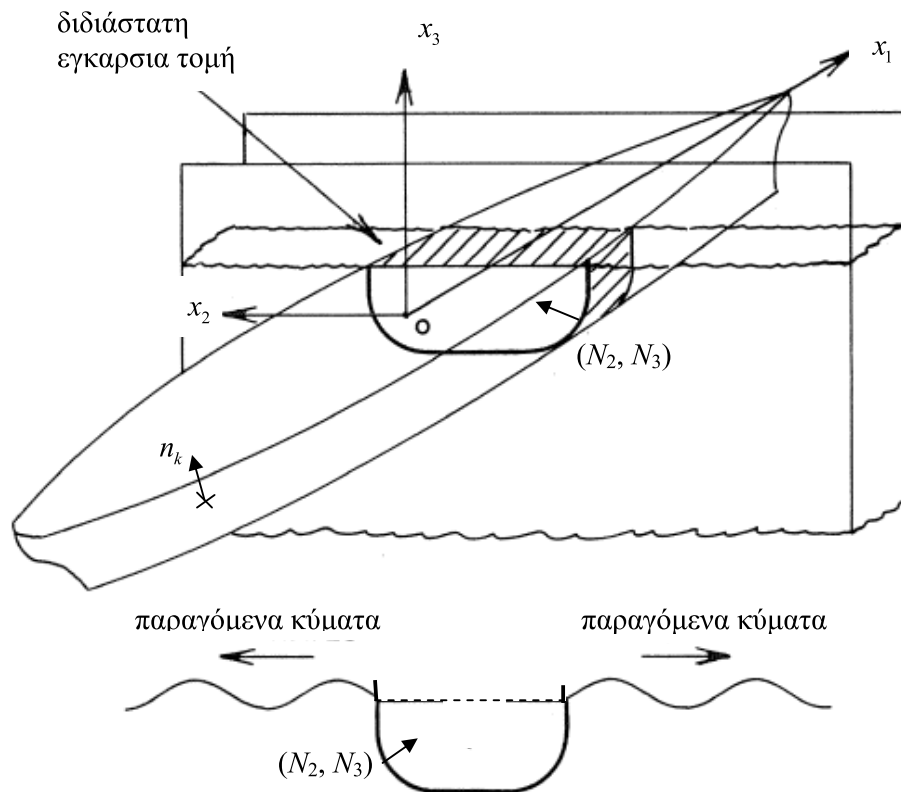
Άσκηση 4: Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη περίθλασης (ανά μονάδα μήκους) λόγω πλευρικών κυματισμών, η οποία ασκείται πάνω στη φορτηγίδα (μπάρτζα) που περιγράφεται στην Άσκηση 1. Το πλάτος και η φάση της δύναμης περίθλασης να παρασταθούν γραφικά συναρτήσει του μήκους κύματος του προσπίπτοντος κυματισμού, και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τη δύναμη Froude-Krylov, που υπολογίσατε στην Άσκηση 1.

Άσκηση 5: Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη περίθλασης που ασκείται πάνω στην πλωτή δεξαμενή της Άσκησης 2, συναρτήσει του μήκους κύματος, χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική σχέση (26), και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που θα βρείτε με τις ακριβείς τιμές που υπάρχουν σε διάφορα άρθρα στη διεθνή βιβλιογραφία. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα γραφικά, συγκρίνοντας επίσης και με την αντίστοιχη δύναμη Froude-Krylov, που υπολογίστηκε στην Άσκηση 2.

2.10 Πρόσθετες μάζες, αποσβέσεις και φορτίσεις επιμήκων σωμάτων. Αναγωγή στο δισδιάστατο πρόβλημα. Θεωρία λωρίδων

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια προσεγγιστική μέθοδο, γνωστή ως θεωρία λωρίδων (strip theory), για τον υπολογισμό των προσθέτων μαζών, αποσβέσεων και φορτίσεων πλωτών επιμήκων σωμάτων, τα οποία διαθέτουν κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε σε διάφορες παραλλαγές από την δεκαετία του 60, και για μια σύντομη βιβλιογραφική και ιστορική επισκόπηση παραπέμπουμε στο σύγγραμμα *Principles of Naval Architecture* (Lewis, Ed., 1989, vol.III, sec.3.4). Στο εδάφιο αυτό θα κινηθούμε στα βήματα της εργασίας που παρουσιάστηκε από τους Salvesen, Tuck & Faltinsen (1970), στην ειδική περίπτωση που μας απασχολεί εδώ πλωτών σωμάτων χωρίς πρόσω μέση ταχύτητα.

Το θεωρούμενο πλωτό σώμα (βλ. Σχ.1) δεν παρουσιάζει εγκάρσια κλίση (στη μέση κατάσταση ισορροπίας) και δέχεται την επίδραση κυματισμών ταλαντούμενο στην επιφάνεια του νερού, ενώ η μέση ταχύτητα του είναι μηδενική. Θα θεωρήσουμε ότι το πλάτος (B) και το βύθισμα (T) του πλωτού σώματος είναι πολύ μικρότερα από το μήκος του (L), δηλαδή ότι το σώμα είναι μακρύ και λεπτόγραμμο (slender body). Σημειώνουμε εδώ ότι οι συνηθισμένες γάστρες των πλοίων ικανοποιούν τις ανωτέρω υποθέσεις (π.χ. $5.5 < L/B < 9$, $2 < B/T < 4$), φυσικά με εξαιρέσεις που αφορούν ειδικούς τύπους κατασκευών.



Σχήμα 1. Εγκάρσιες τομές επιμήκους λεπτόγραμμου σώματος που ταλαντώνεται λόγω προσπίπτοντος κυματισμού στην επιφάνεια του νερού.

1. Υπολογισμός υδροδυναμικών συντελεστών

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών συντελεστών του επιμήκους σώματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση

$$\rho \iint_{\partial D_B} \Phi_k n_l dS = \rho \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_k n_l ds, \quad k, l = 1, 6, \quad (1)$$

όπου με $C(x_1)$ συμβολίζουμε την βρεχόμενη περίμετρο της εγκάρσιας τομής σε κάθε θέση x_1 κατά το μήκος του σώματος (η οποία διαφοροποιείται από θέση σε θέση), και το διάμηκες ολοκλήρωμα στο τελευταίο δεξιά μέλος της σχέσης (1) διατρέχει όλο το μήκος του πλοίου. Στην ανωτέρω εξίσωση dS είναι το επιφανειακό διαφορικό στη γάστρα και ds το επικαμπυλίο διαφορικό κατά μήκος της περιμέτρου της κάθε εγκάρσιας τομής. Υπενθυμίζουμε ότι $\Phi_l(\mathbf{x})$, $l = 1, 6$, είναι τα τριδιάστατα δυναμικά ακτινοβολίας λόγω των 6 δυνατών ταλαντωτικών κινήσεων του σώματος, τα οποία ικανοποιούν τις Εξ. (10) του Εδαφ.2. Λόγω της υποθέσεως του λεπτόγραμμου σχήματος του πλωτού σώματος, μπορούμε να δεχθούμε προσεγγιστικά ότι στη γειτονιά της βρεχόμενης επιφάνειας της γάστρας οι μεταβολές της γεωμετρίας της, αλλά και οι παράγωγοι των κυματικών πεδίων ακτινοβολίας ως προς την x_1 -διεύθυνση (δηλαδή η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας), είναι πολύ μικρότερες από τα αντίστοιχα μεγέθη (μεταβολές γεωμετρίας και συνιστώσες ταχύτητας) ως προς τις άλλες διευθύνσεις, και επομένως, θα μπορούσαν προσεγγιστικά να παραληφθούν.

Κατά την ανωτέρω έννοια, ισχύει η ακόλουθη σχέση όσον αφορά τις συνιστώσες του καθέτου διανύσματος στη βρεχόμενη επιφάνεια του θεωρούμενου επιμήκους, λεπτόγραμμου σώματος

$$n_1 \ll n_2 \text{ και } n_3, \quad (2)$$

και επομένως μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά

$$n_k(x_1, x_2, x_3) \approx N_k(x_2, x_3; x_1), \quad k = 2, 3, 4, \quad (3\alpha)$$

$$n_5(x_1, x_2, x_3) \approx -x_1 N_3(x_2, x_3; x_1) \quad \text{και} \quad (3\beta)$$

$$n_6(x_1, x_2, x_3) \approx x_1 N_2(x_2, x_3; x_1), \quad (3\gamma)$$

όπου $N_k(x_2, x_3; x_1)$, $k = 2, 3$, είναι οι συνιστώσες του αντίστοιχου καθέτου διανύσματος στο βρεχόμενο τμήμα της κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής, που εξαρτώνται κατά συνέπεια από τη μορφή της και επομένως εξαρτώνται παραμετρικά από την x_1 -μεταβλητή (βλ. Σχήμα 1). Επιπροσθέτως, έχουμε

$$N_4(x_2, x_3; x_1) = x_3 N_2(x_2, x_3; x_1) - x_2 N_3(x_2, x_3; x_1). \quad (4)$$

Επίσης, κατ'αντιστοιχία, μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά για τα δυναμικά

$$\Phi_l(x_1, x_2, x_3) \approx \varphi_l(x_2, x_3; x_1), \quad l = 2, 3, 4, \quad (5)$$

δηλώνοντας και εδώ την παραμετρική τους εξάρτηση από την x_1 -μεταβλητή. Τέλος, από τις προσεγγίσεις των n_5 και n_6 (βλ. Εξ. 3) που αποτελούν και τους μη ομογενείς όρους των προβλημάτων που αφορούν τα δυναμικά $\Phi_l(\mathbf{x})$, $l = 5, 6$ (pitch και yaw), αντίστοιχα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\Phi_5(x_1, x_2, x_3) \approx -x_1 \varphi_3(x_2, x_3; x_1), \quad \Phi_6(x_1, x_2, x_3) \approx x_1 \varphi_2(x_2, x_3; x_1). \quad (6)$$

Με βάση όλα τα ανωτέρω, οι υδροδυναμικοί συντελεστές του πλωτού επιμήκους σώματος προσεγγίζονται από

$$\Pi_{kl} \equiv \rho \int_{C(x_1)} \Phi_k n_l ds \approx \rho \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \varphi_k N_l ds \equiv \int_L \varpi_{kl}(x_1) dx_1 \quad k, l = 2, 3, 4, \quad (7)$$

όπου $\varpi_{kl}(x_1)$ οι υδροδυναμικοί συντελεστές κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής

$$\varpi_{kl}(x_1) = \int_{C(x_1)} \varphi_k N_l ds = \alpha_{kl}(x_1) + \frac{\beta_{kl}(x_1)}{j\omega}. \quad (8)$$

και α_{kl} , β_{kl} οι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόσβεσης της, αντίστοιχα.

Λόγω της συμμετρίας του σώματος ως προς το κατακόρυφο επίπεδο το N_3 είναι συμμετρικό, ενώ τα N_2 , N_4 είναι αντισυμμετρικά. Επομένως, το δυναμικό φ_3 είναι επίσης συμμετρικό, ενώ τα δυναμικά φ_2 , φ_4 είναι αντισυμμετρικά. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με την ανωτέρω σχέση συνεπάγεται ότι $a_{32} = a_{34} = 0$ και $b_{32} = b_{34} = 0$ (καθώς και $a_{23} = a_{43} = 0$ και $b_{23} = b_{43} = 0$).

Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6) στην Εξ.(1) λαμβάνουμε

$$\Pi_{26} \approx \int_L x_1 \varpi_{22}(x_1) dx_1, \quad \Pi_{66} \approx - \int_L (x_1)^2 \varpi_{22}(x_1) dx_1, \quad (9)$$

$$\Pi_{35} \approx - \int_L x_1 \varpi_{33}(x_1) dx_1, \quad \Pi_{55} \approx \int_L (x_1)^2 \varpi_{33}(x_1) dx_1, \quad (10)$$

$$\Pi_{46} \approx \int_L x_1 \varpi_{24}(x_1) dx_1. \quad (11)$$

Οι σχέσεις (7) και (9), (10), (11) μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε, στα πλαίσια της ανωτέρω προσέγγισης, τους (πρακτικά μη μηδενικούς) υδροδυναμικούς συντελεστές του τριδιάστατου λεπτόγραμμου σώματος, οι οποίοι συμμετέχουν στις εξισώσεις κίνησης, από ολοκλήρωση των αντιστοίχων διδιαστάτων κατά μήκος του σώματος. Οι τελευταίοι συντελεστές καθορίζονται από την επίλυση διδιαστάτων προβλημάτων για τα δυναμικά $\varphi_l(x_2, x_3; x_1)$, $l = 2, 3, 4$, που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_3^2} = 0, \quad (12)$$

την συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_3} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_l(x_2, x_3; x_1) = 0, \quad (13)$$

την συνθήκη στον οριζόντιο πυθμένα

$$\frac{\partial \varphi_l(x_2, x_3 = -h; x_1)}{\partial x_3} = 0, \quad (14)$$

και τη συνθήκη στη βρεχόμενη περίμετρο της κάθε εγκάρσιας τομής,

$$\frac{\partial \varphi_l(x_2, x_3 = -h; x_1)}{\partial N} = N_l(x_2, x_3), \quad (15)$$

και κατάλληλες συνθήκες στο άπειρο, οι οποίες απαιτούν σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα ($|x_2| \rightarrow \infty$) τα δυναμικά $\varphi_l(x_2, x_3)$ να συμπεριφέρονται ως απομακρυνόμενα επίπεδα κύματα συχνότητας ω . Η επίλυση των ανωτέρω διδιαστάτων προβλημάτων είναι πολύ ευκολότερη από τα αντίστοιχα τριδιάστατα προβλήματα. Πολλές και εξαιρετικά αξιόπιστες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό για το σκοπό αυτό (βλ., π.χ., Salvesen et al 1970, Lewandowski 2004). ενώ μία σχετική μέθοδο που χρησιμοποιεί τη τεχνική των συνοριακών στοιχείων (BEM) θα παρουσιάσουμε αναλυτικά σε επόμενο εδάφιο. Ενδεικτικά, παρουσιάζεται στο Σχ. 2 σύγκριση των θεωρητικών προβλέψεων, για εγκάρσια τομή που αντιστοιχεί σε μέση τομή δεξαμενοπλοίου (περίπου ορθογωνικής μορφής και λόγου B/T=2), με πειραματικές μετρήσεις από την εργασία του Vughts (1968).

2. Υπολογισμός υδροδυναμικών δυνάμεων

Οι συνολικές υδροδυναμικές δυνάμεις παρέχονται, ως γνωστόν, από τη σχέση

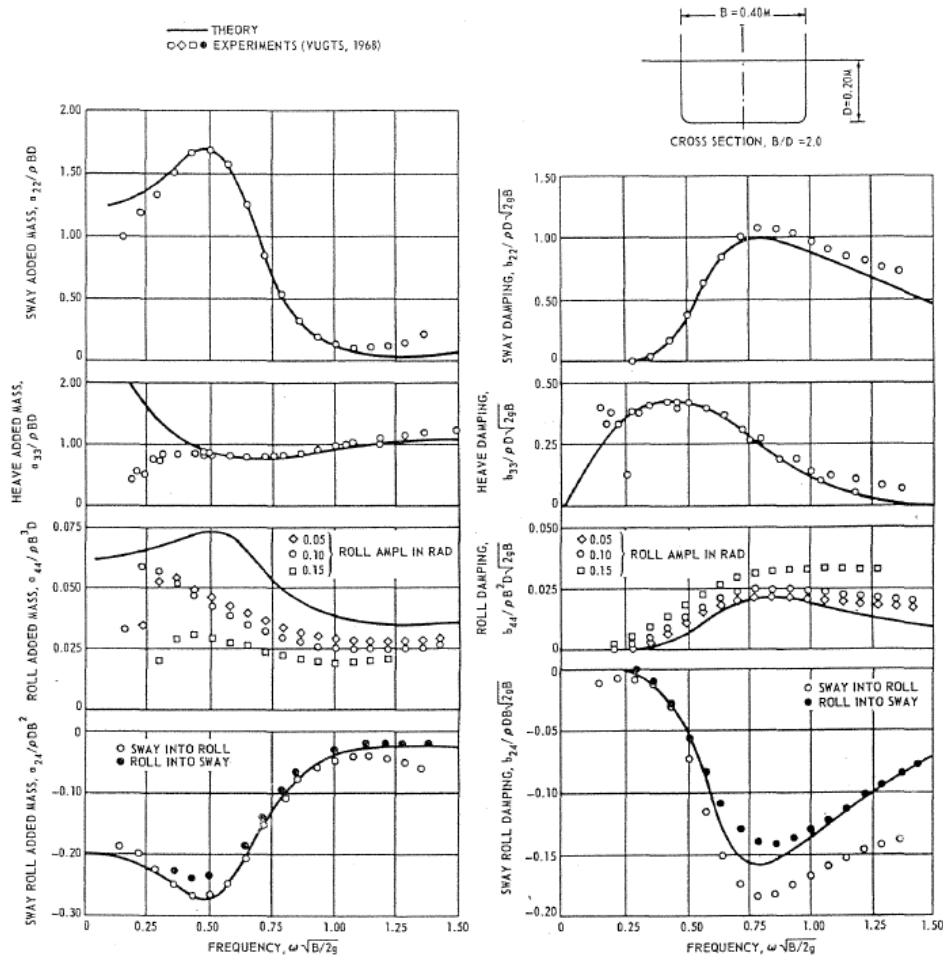
$$X_k = \rho \omega^2 A \iint_{\partial D_B} (\Phi_0 + \Phi_d) n_k dS_B, \quad (16)$$

όπου A το πλάτος ανύψωσης του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια και $\Phi_d(\mathbf{x})$ το δυναμικό περίθλασης, ενώ το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού είναι

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cosh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \exp[-j k_0(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)]. \quad (17)$$

Ο κυματαριθμός k_0 δίδεται από τη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = g k_0 \tanh(k_0 h). \quad (18)$$



Σχήμα 2. Υδροδυναμικοί συντελεστές, για εγκάρσια τομή που αντιστοιχεί σε μέση τομή δεξαμενοπλοίου (περίπου ορθογωνικής μορφής) με λόγο $B/T=2$, και σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις από την εργασία του Vughts (1968).

Αξιοποιώντας τις υποθέσεις περί λεπτόγραμμου σχήματος για το επίμηκες σώμα η δύναμη X_1 κατά τη x_1 -διεύθυνση αμελείται (βλ. και Εξ.2, $X_1 \ll X_k, k = 2, \dots, 6$).

Δυνάμεις Froude-Krylov: Περαιτέρω, οι δυνάμεις Froude-Krylov μπορούν να υπολογισθούν με διαμήκη ολοκλήρωση

$$X_{0k} = \rho \omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_0 n_k dS_B = \rho \omega^2 A \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_0 n_k ds, \quad ,$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3,4) παίρνουμε

$$X_{0k} \approx \rho \omega^2 A \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_0 N_k ds, \quad k = 2, 3, 4, \quad X_{0k} \approx -\rho \omega^2 A \int_L x_1 dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_0 N_3 ds, \quad k = 5$$

$$X_{0k} \approx \rho \omega^2 A \int_L x_1 dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_0 N_2 ds, \quad k = 6. \quad (19)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την έκφραση του δυναμικού (17) λαμβάνουμε για $k = 2, 3, 4$

$$X_{0k} = \rho g A \int_L \exp[-j k_0 (x_1 \cos \beta)] dx_1 \int_{C(x_1)} N_k \frac{\cosh[k_0 (x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \exp[-j k_0 (x_2 \sin \beta)] ds. \quad (20)$$

Η ανωτέρω σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$X_{0k} = \rho A \int_L f_k(x_1) dx_1, \quad (21)$$

όπου $f_k(x_1), k = 2, 3, 4$ ορίζονται οι δυνάμεις Froude-Krylov της κάθε διαστάτης εγκάρσιας τομής του σώματος

$$f_k(x_1) = g \exp[-j k_0 (x_1 \cos \beta)] \int_{C(x_1)} N_k \frac{\cosh[k_0 (x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \exp[-j k_0 (x_2 \sin \beta)] ds. \quad (22)$$

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3β), (3γ) στην Εξ. (19) παίρνουμε για $k=5,6$

$$X_{05} = -\rho A \int_L x_1 f_k(x_1) dx_1, \quad X_{06} = \rho A \int_L x_1 f_k(x_1) dx_1. \quad (23)$$

Δυνάμεις περίθλασης: Για τον υπολογισμό των δυνάμεων περίθλασης θα χρησιμοποιήσουμε τη παρακάτω σχέση (βλ. Εξ. 27, Εδαφ.6 παρόντος Κεφαλαίου)

$$X_{dk} \equiv \rho \omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_d n_k dS_B = -\rho \omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS_B, \quad (24)$$

Χρησιμοποιώντας τη Εξισ. (17) για το δυναμικό προσπίπτοντος κύματος στην ανωτέρω σχέση, και αναλύοντας το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια σε επαναληπτική μορφή, λαμβάνουμε για $k = 2, 3, 4$

$$X_{dk} \equiv -\rho \omega^2 A \iint_{\partial D_B} \Phi_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS_B \approx \rho g A \int_L H_k(x_1) \exp[-j k_0 (x_1 \cos \beta)] dx_1, \quad (25\alpha)$$

όπου

$$H_k(x_1) = k_0 \int_{C(x_1)} W_k(x_2, x_3) \exp[-j k_0 (x_2 \sin \beta)] ds, \quad (25\beta)$$

και

$$W_k = \left(j \sin \beta N_2 \frac{\cosh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} - N_3 \frac{\sinh[k_0(x_3 + h)]}{\cosh k_0 h} \right) \Phi_k(x_1, x_2, x_3). \quad (25\gamma)$$

Η ανωτέρω σχέση για $k = 2, 3, 4$ γράφεται, εισάγοντας και τη προσέγγιση (3α), ως

$$X_{dk} = \rho A \int_L h_k(x_1) dx_1, \quad (26)$$

όπου $h_k(x_1)$, οι αντίστοιχες δυνάμεις περίθλασης της κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής του σώματος, που ορίζονται ως ακολούθως

$$h_k(x_1) = g k_0 \exp[-j k_0(x_1 \cos \beta)] \int_{C(x_1)} W_k \exp[-j k_0(x_2 \sin \beta)] ds, \quad k = 2, 3, 4. \quad (27)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3β), (3γ) στην Εξ. (19) παίρνουμε για $k=5, 6$

$$X_{d5} = -\rho A \int_L x_1 h_3(x_1) dx_1, \quad X_{d6} = \rho A \int_L x_1 h_2(x_1) dx_1. \quad (28)$$

Έχοντας διαθέσιμα τα ανωτέρω αποτελέσματα οι εξισώσεις κίνησης του λεπτόγραμμου σώματος μπορούν να επιλυθούν ως προς ξ_k , και να υπολογισθούν οι αντίστοιχοι συντελεστές απόκρισης και άλλα χρησιμα μεγέθη.

3. Παράδειγμα εφαρμογής

Ως παράδειγμα εφαρμογής εξετάζουμε τη περίπτωση μιας φορτηγίδας μήκους $L=36m$, σταθερής ορθογωνικής διατομής $L/B=4$, που επιπλέει ισοβύθιστη $B/T=3$, σε νερό σταθερού βάθους $h/T=2$, και δέχεται την επίδραση αρμονικών κυματισμών. Στην περίπτωση αυτή οι αδιάστατοι υδροδυναμικοί συντελεστές α_{kl} , β_{kl} της (κάθε) εγκάρσιας τομής εικονίζονται στο Σχήμα 3. Σχετικές μέθοδοι υπολογισμού αυτών παρουσιάζονται και σχολιάζονται σε επόμενο εδάφιο. Η αδιαστατοποίηση που έχει χρησιμοποιηθεί στο Σχήμα 3 είναι η ακόλουθη

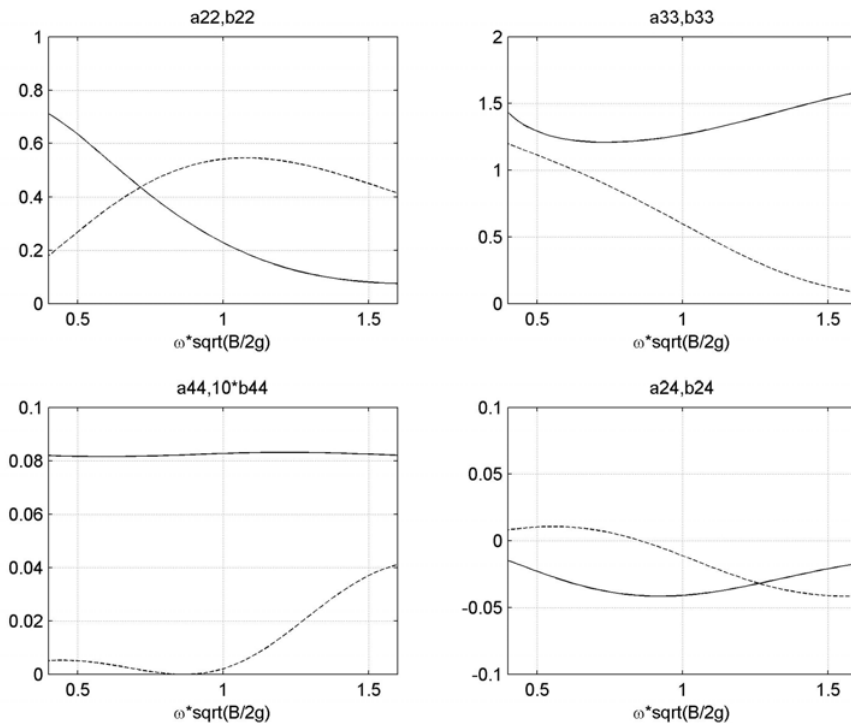
$$\alpha_{kl} / \rho h^2, \quad k, l = 2, 3, \quad \alpha_{24} / \rho h^3, \quad \alpha_{44} / \rho h^4, \quad \text{και} \quad (29)$$

$$(\beta_{kl} / \rho h^2) \sqrt{h/g}, \quad k, l = 2, 3, \quad (\beta_{24} / \rho h^3) \sqrt{h/g}, \quad (\beta_{44} / \rho h^4) \sqrt{h/g}. \quad (30)$$

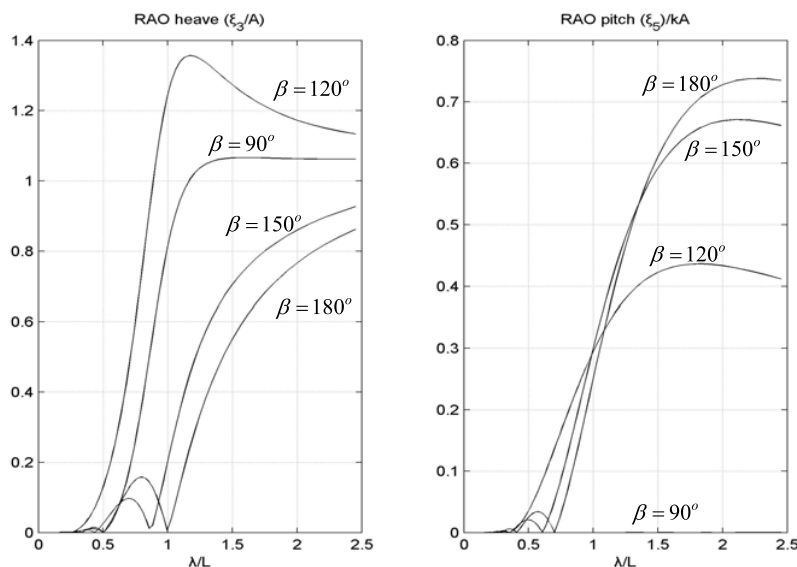
Στο εξεταζόμενο παράδειγμα ο όγκος εκτοπίσματος είναι $\nabla = 972m^3$ και, λαμβάνοντας τη θέση του κέντρου βάρους στο κέντρο της ισάλου, τα μετακεντρικά ύψη προκύπτουν $GM = 0.75m$ και $GM_L = 34.5m$ (για εγκάρσιες και διαμήκειες κλίσεις, αντίστοιχα). Για τον υπολογισμό των μαζικών ροπών αδράνειας για

περιστροφές ως προς το x_1 και το x_2 -άξονα έχουν ληφθεί ακτίνες αδράνειας ίσες προς 20% B και 30% L , αντίστοιχα.

Οι αποκρίσεις heave ($|\xi_3|/A$) και pitch ($|\xi_5|/k_0A$) του πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής, όπως προκύπτουν από εφαρμογή της θεωρίας λωρίδων, που παρουσιάσαμε στο εδάφιο αυτό, εικονίζονται το Σχήμα 4, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/L και για διάφορες κατευθύνσεις προσπίπτοντος κυματισμού: $\beta = 180^\circ$ (μετωπικοί), $\beta = 150^\circ, 120^\circ$ (πρωραίοι) και $\beta = 90^\circ$ (πλάγιοι). Λόγω συμμετρίας του σώματος (και της υπόθεσης μηδενικής μέσης πρόσω ταχύτητας), τα αποτελέσματα για ακολουθούντες και πρυμναίους κυματισμούς είναι αντίστοιχα.



Σχήμα 3. Πρόσθετες μάζες (συνεχείς γραμμές) και αποσβέσεις (διακεκομμένες) πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής, $L/B=4$, $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, για διάφορες τιμές της αδιάστατης συχνότητας $\omega \sqrt{B/2g}$.



Σχήμα 4. Αποκρίσεις heave ($|\xi_3|/A$) και pitch ($|\xi_5|/k_0A$) πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής, $L/B=4$, $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/L και για διάφορες κατευθύνσεις προσπίπτοντος κυματισμού ($\beta = 180^\circ, 150^\circ, 120^\circ, 90^\circ$).

Στον υπολογισμό των αποκρίσεων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4 έχει ληφθεί προσεγγιστικά μόνο η συμμετοχή των δυνάμεων Froude-Krylov στις συνολικές υδροδυναμικές φορτίσεις και οι δυνάμεις περίθλασης έχουν αμεληθεί. Επίσης, έχουν υποθεθεί πολύ μικρές (πρακτικά μηδενικές) κινήσεις sway ($\xi_2 \approx 0$) και yaw ($\xi_6 \approx 0$). Η υπόθεση αυτή είναι σχετικά ρεαλιστική, γιατί στη πραγματικότητα οι κινήσεις αυτές ελέγχονται στο μεγαλύτερο βαθμό από τα συστήματα αγκύρωσης που χρησιμοποιούνται για την κράτηση της πλωτής κατασκευής σε μία συγκεκριμένη θέση. Επομένως, αν θέλουμε να διατηρήσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις στο τελικό σύστημα θα πρέπει να προσθέσουμε στο σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων τις δυνάμεις και ροπές αγκύρωσης και ένας πρακτικός τρόπος είναι μέσω της εισαγωγής καταλλήλων ελαστικών σταθερών που παράγουν πρόσθετες δυνάμεις επαφοράς στις εξισώσεις των κινήσεων αυτών.

Η επέκταση της θεωρίας λωρίδων που αναπτύξαμε εδώ για πλωτό λεπτόγραμμα σώμα που κινείται με μη μηδενική μέση ταχύτητα (δηλαδή για λεπτόγραμμα πλοίο) θα παρουσιασθεί σε αντίστοιχο εδάφιο του επομένου κεφαλαίου.

4. Βιβλιογραφικές αναφορές

Lewis, E.V., (Editor), 1989, *Principles of naval architecture*, vol. 3. Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME), New Jersey.

Salvesen, N., Tuck, E.O., Faltinsen, O., 1970, Ship motions and sea loads, Transactions SNAME, vol. 78.

Lewandowski, E., 204, *The dynamics of marine craft*, World Scientific.

Vughts, J., 1968, The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface, Rep.No.194, TH Delft.

2.11 Ταλαντώσεις διδιαστάτου πλωτού σώματος

Στο συμπλήρωμα αυτό θα παρουσιάσουμε μια παραλλαγή των συνοριακών ολοκληρωτικών μεθόδων στο πρόβλημα υπολογισμού των δυναμικών που συνδέονται με τις ταλαντώσεις (sway, heave, roll) πλωτού διδιαστάτου σώματος. Η μέθοδος βασίζεται στις συνοριακές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του δυναμικού στις 2 διαστάσεις (x_2, x_3) και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα δυναμικά $\varphi_k(x_2, x_3)$, $k = 2, 3, 4$, καθώς και τους αντίστοιχους υδροδυναμικούς συντελεστές $\varpi_{k\ell}(x_2, x_3)$, $k, \ell = 2, 3, 4$, που απαιτούνται στην εφαρμογή της θεωρίας λωρίδων όπως αναπτύχθηκε στα προηγούμενα. Χωρίς κίνδυνο σύγχυσης με τις τρεις διαστάσεις θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια παρόμοια διανυσματική γραφή, $\mathbf{x} = (x_2, x_3)$, $\varphi_k(\mathbf{x})$, $k = 2, 3, 4$, κλπ.

Σημειώνουμε εξ αρχής ότι για την αριθμητική επίλυση τέτοιων προβλημάτων υπάρχουν πολλές δυνατές μέθοδοι. Μερικές από αυτές είναι

- (i) μέθοδοι διαχωρισμού των χωρίου (domain decomposition) σε συνδυασμό με
 - (ia) ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις στη φραγμένη περιοχή που χρησιμοποιούν τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace η οποία στις 2 διαστάσεις είναι

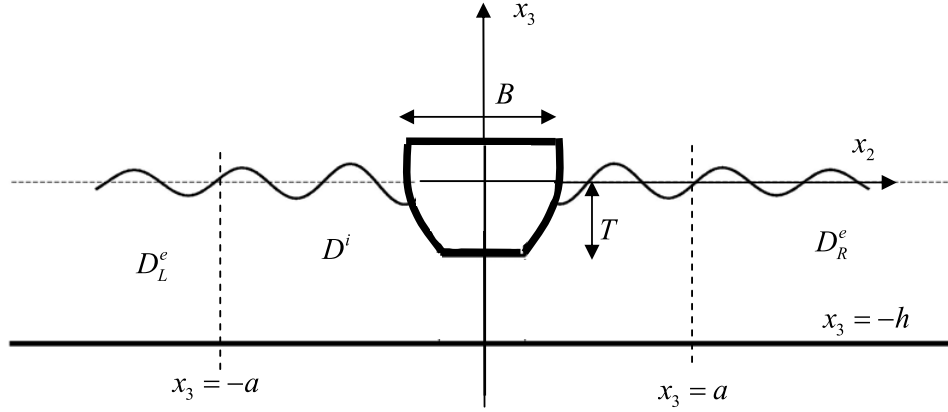
$$F(\mathbf{x}|\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \xi|^{-1}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \xi|), \quad (1)$$

(όπως αυτή που θα παρουσιάσουμε εδώ),

- (ib) μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων διαφορών, φασματικών αναπαραστάσεων στη φραγμένη περιοχή,
- (ii) ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν τη συνάρτηση Green της εξίσωσης Laplace, η οποία εκτός από την πεδιακή εξίσωση ικανοποιεί και μερικές από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και τη συνθήκη στο άπειρο, και οδηγεί σε ολοκληρωτική εξίσωση πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος,
- (iii) μέθοδοι μιγαδικών συναρτήσεων και συμμορφής απεικόνισης κ.α.

Παρά την σχετική του απλότητα το εξεταζόμενο διδιάστατο πρόβλημα παρουσιάζει ενδιαφέρον λόγω της αξιοποίησης της πληροφορίας που παρέχει στην δυναμική ανάλυση επιμήκων τριδιαστάτων σωμάτων, και διότι τέτοιες κατασκευές χρησιμοποιούνται στη πράξη ως πλωτές κατασκευές, πλωτοί κυματοθραύστες και βρίσκουν τεχνολογικές εφαρμογές ιδιαίτερα κοντά στην ακτή, όπου επιπροσθέτως οι επιδράσεις του πυθμένα είναι σημαντικές.

Θεωρούμε πλωτό επίμηκες σώμα με εγκάρσιες τομές πλάτους B και βυθίσματος T σε λωρίδα νερού σταθερού βάθους h , το οποίο δέχεται την επίδραση αρμονικών κυματισμών συχνότητας ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Θα εξετάσουμε το πρόβλημα των οριζοντίων, κατακόρυφων, και περιστροφικών ταλαντώσεων του σώματος ως προς τον το διαμήκη άξονα x_1 . Στην περίπτωση που εξετάζουμε, από την υδροστατική ισορροπία προκύπτει ότι η μάζα ανά μονάδα μήκους του σώματος είναι $m = \rho \pi A$ (όπου ρ η σταθερή πυκνότητα του νερού και A το εμβαδόν εγκάρσιας τομής). Το σώμα θεωρείται συμμετρικό (ως προς το κατακόρυφο άξονα) και, εφ'όσον αρχικά (χωρίς την επίδραση του κύματος) το υποθέτουμε ισοβύθιστο, το κέντρο βάρους του θα βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με το κέντρο αντώσεως. Επομένως



Σχήμα 1: Ταλαντώσεις πλωτού επιμήκους σώματος

οι εμπλεκόμενοι συντελεστές μάζας στην εξίσωση της κατακόρυφης ταλάντωσης είναι $m_{22} = m_{33} = m$, $m_{44} = i_{11}$ (ανά μονάδα μήκους) και οι αντίστοιχοι υδροστατικοί συντελεστές είναι $c_{33} = \rho g B$, $c_{44} = mg \overline{GM}$, ενώ οι άλλοι μηδενίζονται (λόγω συμμετρίας της ισάλου).

Οι υδροδυναμικοί συντελεστές ανά μονάδα μήκους του σώματος θα δίνονται από

$$\varpi_{lk} = (a_{lk} + (j\omega)^{-1} b_{lk}) = \rho \iint_{\partial D_B} \varphi_l N_k dS_B = 0, \quad l = 2, 3, 4. \quad (2\alpha)$$

∂D_B η βρεχόμενη επιφάνεια ο σώματος και N_k , $k = 2, 3, 4$, το γενικευμένο κάθετο διάνυσμα στην εγκάρσια τομή

$$N_k = n_k, \quad k = 2, 3, \quad N_4 = x_3 N_2 - x_2 N_3. \quad (2\beta)$$

Λόγω συμμετρίας του σώματος και του περιβάλλοντος ως προς τον κατακόρυφο άξονα το N_3 είναι συμμετρικό, ενώ τα N_k , $k = 2, 4$, είναι αντισυμμετρικά, και επομένως, το δυναμικό φ_3 είναι επίσης συμμετρικό, ενώ τα αντίστοιχα φ_k , $k = 2, 4$, είναι αντισυμμετρικά. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με την ανωτέρω σχέση (2α) συνεπάγεται ότι $a_{32} = a_{34} = 0$ και $b_{32} = b_{34} = 0$ (καθώς και $a_{23} = a_{43} = 0$ και $b_{23} = b_{43} = 0$). Επομένως, στην εξεταζόμενη περίπτωση οι εξισώσεις δυναμικής ισοροπίας που αφορούν τις ταλαντώσεις του επιμήκους σώματος απλουστεύονται στην ακόλουθη μορφή

$$(-\omega^2(m + a_{22}) + j\omega b_{22} + c_{22}) \xi_2(\omega) + (-\omega^2 a_{24} + j\omega b_{24}) \xi_4(\omega) = X_2(\omega), \quad (3\alpha)$$

$$(-\omega^2(m + a_{33}) + j\omega b_{33} + c_{33}) \xi_3(\omega) = X_3(\omega), \quad (3\beta)$$

$$(-\omega^2(m_{44} + a_{44}) + j\omega b_{44} + c_{44}) \xi_4(\omega) + (-\omega^2 a_{24} + j\omega b_{24}) \xi_2(\omega) = X_4(\omega), \quad (3\gamma)$$

όπου οι συνολικές δυνάμεις $X_\ell(\omega)$, $\ell = 2, 3, 4$, (Froude-Krylov και περίθλασης) νοούνται επίσης ανά μονάδα μήκους. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της κατακόρυφης ταλάντωσης (heave, ξ_3) είναι απόσυζευγμένη από τις εξισώσεις sway και roll (ξ_2, ξ_4).

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια την εφαρμογή της μεθόδου (ia) που αναφέραμε πιο πάνω για τον προσδιορισμό των δυναμικών $\varphi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell = 2, 3, 4$, μέσω του οποίων υπολογίζονται οι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόκρισης από την εφαρμογή της σχέσης (2). Το πλεονέκτημα της μεθόδου έγκειται στη σχετική απλότητα της θεμελιώδους λύσης που χρησιμοποιεί, η οποία επιτρέπει υπό κατάλληλες υποθέσεις τον αναλυτικό υπολογισμό των εμπλεκόμενων ολοκληρωμάτων. Επιπροσθέτως, μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε αριθμητικά προβλήματα υδροδυναμικής συμπεριφοράς πλωτών σωμάτων πάνω από πυθμένα που δεν είναι οριζόντιος όπως εδώ και να μελετήσουμε τις επιδράσεις πυθμένα γενικής μορφολογίας (βλ. Belibassakis 2008), κάτι που είναι σημαντικό όταν τέτοια σώματα χρησιμοποιούνται σε περιοχές κοντά στην ακτή. Το βασικό μειονέκτημα σε σχέση με ολοκληρωτικές μεθόδους που εμπλέκουν την συνάρτηση Green που ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες πλήν της συνθήκης μη εισχώρησης στο σώμα έγκειται στην έκταση της συνοριακής αναπαράστασης (όπως θα δούμε αναλυτικά κατωτέρω), η οποία στη περίπτωση της συνάρτησης Green περιορίζεται μόνο στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος. Από την άλλη μεριά, ο υπολογισμός των αντιστοίχων ολοκληρωμάτων που εμπλέκουν τη συνάρτηση Green είναι δύσκολος (λόγω της πολυπλοκότητάς της), και γενικώς απαιτεί την εφαρμογή αριθμητικών προσεγγίσεων. Η μέθοδοι της μιγαδικής ανάλυσης παρουσιάζουν πολλά πλεονεκτήματα. Εμπλέκουν την κατασκευή της σύμμορφης απεικόνισης των εγκαρσίων τομών σε απλά σχήματα (κύκλος κλπ), αλλά λόγω της χρησιμότητάς τους έχουν αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό στο παρελθόν και διαθέτουμε σήμερα εκφράσεις μετασχηματισμού ευρυτάτων οικογενειών εγκαρσίων τομών πλοίου και πλωτών κατασκευών όπως οι μορφές Lewis και οι extended Lewis forms (βλ. Athanassoulis & Loukakis 1985) που καλύπτουν όλες σχεδόν τις απαιτήσεις.

1. Αναπαράσταση των δυναμικών ακτινοβολίας πλωτού διδιάστατου σώματος

Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε εδώ βασίζεται στη σύζευξη διαφορετικών γενικών αναπαραστάσεων του κυματικού πεδίου σε υποπεριοχές, οι οποίες μπορούν να κατασκευασθούν αναλυτικά από την εξέταση και επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος (διαφορική εξίσωση και συνοριακές συνθήκες) σε αυτές. Οι ανωτέρω αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν ένα πλήθος άγνωστων αρχικά συντελεστών, διαφορετικών σε κάθε υποπεριοχή. Η σύζευξη επιτυγχάνεται με την απαίτηση της συνέχειας του κυματικού πεδίου και της κάθετης παραγώγου του στις διαχωριστικές επιφάνειες των υποπεριοχών, και οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων ως προς τους άγνωστους συντελεστές, όπως θα παρουσιασθεί στη συνέχεια για το εξεταζόμενο πρόβλημα.

Με τη βοήθεια των κατακόρυφων διεπιφανειών στις θέσεις $x_2 = \pm a$ (βλ. Σχήμα 1) η διδιάστατη λωρίδα ρευστού διαχωρίζεται στα εξωτερικά $D_{L,R}^e$ ($x_2 < -a$ και $x_2 > a$) και στο φραγμένο D^i ($|x_2| < a$) χωρίο, το οποίο περιέχει καθαρά στο εσωτερικό του το πλωτό σώμα.

Εσωτερική περιοχή: Στα πλαίσια εφαρμογών τη θεωρίας δυναμικού (βλ., π.χ., Günter 1967, Kress 1989) η αναπαράσταση των αγνώστων δυναμικών στο εσωτερικό χωρίο λαμβάνεται από επιφανειακή κατανομή πηγών-καταβόθρων (η οποία αναφέρεται και ως κατανομή απλού στρωματος), με άγνωστες επιφανειακές εντάσεις $\sigma_\ell(\xi)$, $\ell = 2,3,4$, σε όλο το σύνορο $\partial D^i = \partial D_B^i \cup \partial D_\Pi^i \cup \partial D_L^i \cup \partial D_R^i$ του φραγμένου χωρίου, ως ακολούθως

$$\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) F(\mathbf{x}|\xi) dS, \quad \ell = 2,3,4, \quad \xi \in D^e, \quad (4)$$

όπου ∂D_B^i η βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, ∂D_Π^i ο πυθμένας, σε βάθος h εντός του εσωτερικού χωρίου, και $\partial D_L^i, \partial D_R^i$ η αριστερή και δεξιά, αντίστοιχα, κατακόρυφη διαχωριστική επιφάνεια (που εικονίζεται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 1). Από τη σχέση (4) προκύπτουν με παραγωγή ως προς τη μεταβλητή πεδίου \mathbf{x} οι αντίστοιχες πεδιακές ταχύτητες σε κάθε καθαρά εσωτερικό σημείο $\mathbf{x} \in D^i$ του φραγμένου χωρίου δίνονται από

$$\mathbf{u}_\ell(\mathbf{x}) = \nabla_x \left(\int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) F(\mathbf{x}|\xi) dS \right) = \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) \nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) dS, \quad \ell = 2,3,4, \quad (5\alpha)$$

όπου

$$\nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) = -\frac{\mathbf{x}-\xi}{2\pi r^2}, \quad r = |\mathbf{x}-\xi|. \quad (5\beta)$$

Όμως, για σημεία πάνω στο σύνορο $\mathbf{x} \in \partial D^i$ (καθώς το προσεγγίζουμε από τα εσωτερικά του χωρίου), και με την υπενθύμιση ότι η θεμελιώσης λύση $F(\mathbf{x}|\xi)$ αντιστοιχεί στο πεδίο από καταβόθρα τοποθετημένη στη θέση ξ , η προηγούμενη σχέση διαφοροποιείται ως ακολούθως

$$\mathbf{u}_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) \nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) dS, \quad \mathbf{x} \in \partial D^i, \quad \ell = 2,3,4, \quad (6)$$

όπου $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (N_2, N_3)$, $\mathbf{x} \in \partial D^i$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο του συνόρου, με διεύθυνση προς τα εξωτερικά του χωρίου. Το ιδίμορφο ολοκλήρωμα στην ανωτέρω Εξισ. (6) νοείται με τη κύρια κατά Cauchy τιμή του (βλ., π.χ., Mikhlin 1965, 1970). Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο σύνορο δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{u}_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial n} = \frac{\sigma_\ell(\mathbf{x})}{2} + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) \nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) dS, \quad \mathbf{x} \in \partial D^i, \quad \ell = 2,3,4. \quad (7)$$

Εξωτερική περιοχή: Οι αναπαράστασεις της λύσεως του μελετώμενου προβλήματος ακτινοβολίας στα εξωτερικά χωρία $D_{L,R}^e$ παράγονται στις ημίαιρες λωρίδες με εφαρμογή της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών στην εξίσωση Laplace και στις συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια $x_3 = 0$ και στον πυθμένα $x_3 = -h$ (με αντίστοιχο τρόπο όπως παρουσιάστηκε στο Κεφ.2 για την εξωτερική κυλινδρική περιοχή), λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις κατάλληλης συμπεριφοράς του πεδίου στο άπειρο, το οποίο πρέπει να έχει τη μορφή εξερχομένων κυμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι αναπαραστάσεις των δυναμικών $\varphi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell = 2,3,4$ στην εξωτερική περιοχή έχουν τη ακόλουθη μορφή, για $-h \leq x_3 \leq 0$,

$$\varphi_\ell^{(e)}(x_2, x_3) = A_{\ell,0}^{(e)} \exp(k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{\ell,n}^{(e)} \exp(k_n x_2) Z_n^{(e)}(x_3), \quad x_2 \leq -a, \quad (8\alpha)$$

$$\varphi_\ell^{(e)}(x_2, x_3) = B_{\ell,0}^{(e)} \exp(-k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3) + \sum_{n=0}^{\infty} B_{\ell,n}^{(e)} \exp(-k_n x_2) Z_n^{(e)}(x_3), \quad x_2 \geq a, \quad (8\beta)$$

όπου

$$Z_0^{(e)}(x_3) = \cosh[k_0(x_3 + h)] / N_0^{1/2}, \quad Z_n^{(e)}(x_3) = \cos[k_n(x_3 + h)] / N_n^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8\alpha)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sinh k_0 h}{2k_0 h} \right), \quad N_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin k_n h}{2k_n h} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8\beta)$$

και τα $k_0, k_n, n = 1, 2, \dots$, προκύπτουν ως ρίζες των εξισώσεων (διασποράς)

$$\mu h = k_0 h \tanh(k_0 h) \quad \text{και} \quad \mu h = -k_n h \tan(k_n h), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

αντίστοιχα. Στην τελευταία εξίσωση $\mu = \omega^2 / g$ είναι η παράμετρος συχνότητας του προβλήματος. Οι μιγαδικοί συντελεστές $\{A_{\ell,n}^{(e)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ και $\{B_{\ell,n}^{(e)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, $\ell = 2, 3, 4$, είναι οι άγνωστοι του προβλήματος στα εξωτερικά χωρία D_L^e, D_R^e αντίστοιχα. Υπό τη προϋπόθεση της γρήγορης σύγκλισης των απειροσειρών (7), κάτι που είναι άμεσα συνδεδεμένο με τη γρήγορη εξασθένηση των συντελεστών και που επαληθεύεται στην εξεταζόμενη περίπτωση, η αναπαράσταση του πεδίου ταχύτητας $\mathbf{u}_\ell(\mathbf{x})$, $\ell = 2, 3, 4$, στις ημίαιρες λωρίδες D^e , λαμβάνεται εύκολα με απευθείας παραγωγή των Εξισ. (7) ως προς τις χωρικές μεταβλητές (x_2, x_3) .

Με τις ανωτέρω αναπαραστάσεις (4) και (7) έχουν καλυφθεί οι απαιτήσεις του προβλήματος, εκτός από τις ακόλουθες:

(i) την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, η οποία με τη βοήθεια της σχέσης (5) γράφεται στη μορφή

$$\frac{\sigma_\ell(\mathbf{x})}{2} + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\boldsymbol{\xi}) \nabla_x F(\mathbf{x} | \boldsymbol{\xi}) dS = N_\ell(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad \ell = 2, 3, 4, \quad (10\alpha)$$

(ii) την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης στο πυθμένα στην εσωτερική περιοχή, η οποία αντίστοιχα γράφεται στη μορφή

$$\frac{\sigma_\ell(\mathbf{x})}{2} + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) \nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) dS = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{\Pi}^i, \quad \ell = 2,3,4, \quad (10\beta)$$

(iii) την συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια, στην εσωτερική περιοχή, η οποία είναι

$$\frac{\sigma_\ell(\mathbf{x})}{2} + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) \nabla_x F(\mathbf{x}|\xi) dS - \mu \int_{\partial D^i} \sigma_\ell(\xi) F(\mathbf{x}|\xi) dS = 0, \\ \mathbf{x} \in \partial D_F^i, \quad \ell = 2,3,4, \quad (10\gamma)$$

και

(iv) τη συναρμογή (matching) των αναπαραστάσεων στην κοινή κατακόρυφη διαχωριστική επιφάνεια, δηλαδή για $-h < x_3 < 0$, πράγμα που ισοδύναμα απαιτεί την συνέχεια του δυναμικού και της οριζόντιας παραγώγου του. Επομένως, για $\ell = 2,3,4$

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)} = \varphi_{\ell,x_2}^{(i)} \equiv -\frac{\partial \varphi_\ell^{(i)}}{\partial n} \quad \text{και} \quad \varphi_\ell^{(e)} = \varphi_\ell^{(i)}, \quad x_2 = -a, \quad (11\alpha)$$

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)} = \varphi_{\ell,x_2}^{(i)} \equiv \frac{\partial \varphi_\ell^{(i)}}{\partial n} \quad \text{και} \quad \varphi_\ell^{(e)} = \varphi_\ell^{(i)}, \quad x_2 = a. \quad (11\beta)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις (10α,β,γ) εμπλέκουν μόνο την άγνωστη κατανομή $\sigma(\xi)$, $\xi \in \partial D^i$ σε όλο σύνορο του εσωτερικού χωρίου και αποτελούν ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm 2^{ov} είδους (βλ., π.χ., Kress 1989).

Για την επίτευξη της συναρμογής, Εξισ. (11), θα αξιοποιηθεί η ιδιότητα των συνόλων των ιδιοσυναρτήσεων $\{Z_n^{(e)}(x_3), n = 0,1,2,\dots\}$ να αποτελούν ορθογώνιες βάσεις (που μπορεί εύκολα να κανονικοποιηθούν), και άρα αποτελούν πλήρη σύνολα συναρτήσεων τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f(x_3)$ στο διάστημα $-h < x_3 < 0$. Έτσι οι σχέσεις (11) μπορεί να ικανοποιηθούν ισοδύναμα με την προβολή τους πάνω στην κατακόρυφη βάση $\{Z_k^{(e)}(x_3), k = 0,1,2,\dots\}$, και οδηγούν στις παρακάτω εξισώσεις

$$\int_{x_3=-h}^{x_3=0} \left(\frac{\partial \varphi_\ell^{(e)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_\ell^{(i)}}{\partial x_2} \right) Z_k^{(e)}(x_3) dx_3 = 0, \quad k=0,1,2,\dots, \quad \ell = 2,3,4, \quad (12\alpha)$$

$$\int_{x_3=-h}^{x_3=0} (\varphi_\ell^{(e)} - \varphi_\ell^{(i)}) Z_k^{(e)}(x_3) dx_3 = 0, \quad k=0,1,2,\dots, \quad \ell = 2,3,4, \quad (12\beta)$$

στις θέσεις $x_2 = -a$ και $x_2 = a$. Ο ανωτέρω εξισώσεις (12) εμπλέκουν τους άγνωστους συντελεστές $\{A_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2..\}$ και $\{B_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2..\}$ στις ημίαιρες λωρίδες, αλλά και τις άγνωστες επιφανειακές εντάσεις $\sigma_\ell(\xi)$, $\ell = 2,3,4$, σε όλο το σύνορο $\partial D^i = \partial D_B^i \cup \partial D_\Pi^i \cup \partial D_L^i \cup \partial D_R^i$ του εσωτερικού χωρίου, και επομένως είναι μη-τοπικού χαρακτήρα.

Η αντικατάσταση των σχέσεων (7) στις ανωτέρω εξισώσεις και η εκτέλεση των ολοκληρώσεων ως προς x_3 , που επιτυγχάνεται αναλυτικά, οδηγεί τελικά σε αλγεβρικό σύστημα ως προς τους άγνωστους συντελεστές $\{A_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2..\}$ και $\{B_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2..\}$, $\ell = 2,3,4$.

Στη πράξη οι απειροσειρές που εμπλέκονται στις αναπαραστάσεις (7) περικόπτονται κρατώντας μόνο τους πρώτους K όρους. Επίσης, στα πλαίσια εφαρμογών των συνοριακών στοιχείων (**B**oundary **E**lement **M**ethods, BEM, βλ. π.χ., Paris & Canas 1997) οι αναπαραστάσεις (4), (5) αποδίδονται με τον μερισμό και προσέγγιση του συνόρου από τμήματα (χρησιμοποιώντας απλά πολυώνυμα, B-splines, NURBS κλπ) και την ταυτόχρονη εισαγωγή του ίδιου τύπου τοπικών συναρτήσεων για την κατανομή της άγνωστης συνάρτησης (εδώ τις επιφανειακές εντάσεις πηγών-καταβοθρών $\sigma_\ell(\xi)$, $\ell = 2,3,4$). Στην απλούστερη εκδοχή (low-order panel methods) το σύνορο προσεγγίζεται από πολυγωνική γραμμή που απαρτίζεται από M ευθύγραμμα τμήματα και η κατανομή των επιφανειακών εντάσεων πηγών-καταβοθρών προσεγγίζεται ως τμηματικά σταθερή σε κάθε τμήμα. Με βάση όλα τα παραπάνω, οι ανωτέρω εξισώσεις (10) και (11) καταλήγουν τελικά σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα $2K + M$ εξισώσεων προς ως τους αντίστοιχους αγνώστους $\{A_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2,..,K-1\}$, $\{B_{\ell,n}^{(e)}, n = 0,1,2,..,K-1\}$ και $\{\sigma_{\ell,n}, n = 1,2,..,M\}$, για κάθε εξεταζόμενο πρόβλημα $(\varphi_\ell(\mathbf{x}), \ell = 2,3,4)$.

Οι εξισώσεις (12) μπορεί να απλουστευθούν αν λάβουμε τις κατακόρυφες διεπιφάνειες σε μεγάλη απόσταση από το πλωτό σώμα. Στη πράξη είναι αρκετό να λάβουμε το a (βλ. Σχήμα 1) να είναι μεγαλύτερο από μερικά μήκη κύματος $\lambda = 2\pi/k_0$, όπως το τελευταίο υπολογίζεται από την Εξισ. (9α), συναρτήσει του βάθους (h) και της συχνότητας ταλάντωσης (ω). Πράγματι, από τις Εξισ. (7) παρατηρούμε ότι σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις $|x_2| \gg \lambda$ οι όροι στα αθροίσματα εξασθενούν εκθετικά και ουσιαστικά παραμένουν μόνο οι πρώτοι όροι των αναπτυγμάτων

$$\varphi_\ell^{(e)}(x_2, x_3) \approx A_{\ell,0}^{(e)} \exp(k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3), \quad x_2 \ll -\lambda, \quad -h < x_3 < 0 \quad (13\alpha)$$

$$\varphi_\ell^{(e)}(x_2, x_3) \approx B_{\ell,0}^{(e)} \exp(-k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3), \quad x_2 \gg \lambda, \quad -h < x_3 < 0. \quad (13\beta)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις υπολογίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά και των οριζοντίων παραγώγων των πεδίων

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) \approx A_{\ell,0}^{(e)} k_0 \exp(k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3), \quad x_2 \ll -\lambda, \quad -h < x_3 < 0, \quad (14\alpha)$$

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) \approx -B_{\ell,0}^{(e)} k_0 \exp(-k_0 x_2) Z_0^{(e)}(x_3), \quad x_2 \gg \lambda, \quad -h < x_3 < 0. \quad (14\beta)$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (13α) και (14α) για να απαλείψουμε τον συντελεστή $A_{\ell,0}^{(e)}$, και τις σχέσεις (13β) και (14β) αντίστοιχα για τον συντελεστή $B_{\ell,0}^{(e)}$, λαμβάνοντας έτσι τις ακόλουθες συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) - j k_0 \varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) \approx 0, \quad x_2 \ll -\lambda, \quad -h < x_3 < 0, \quad (15\alpha)$$

$$\varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) + j k_0 \varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) \approx 0, \quad x_2 \gg \lambda, \quad -h < x_3 < 0. \quad (15\beta)$$

Περαιτέρω, εισάγοντας τις σχέσεις συνέχειας (11) για την οριζόντια παράγωγο των δυναμικών στις διεπιφάνειες που διαχωρίζουν το εσωτερικό από τα εξωτερικά χωρία οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται στη παρακάτω (ενιαία) μορφή

$$\frac{\partial \varphi_{\ell}^{(i)}(x_2, x_3)}{\partial n} + j k_0 \varphi_{\ell,x_2}^{(e)}(x_2, x_3) \approx 0, \quad |x_2| \gg \lambda, \quad -h < x_3 < 0, \quad (16\alpha)$$

η οποία είναι τοπικού χαρακτήρα, και κάνοντας χρήση των αναπαραστάσεων των πεδίων στην εσωτερική περιοχή από τις Εξ. (4),(5), η ανωτέρω σχέση γράφεται ως ακολούθως

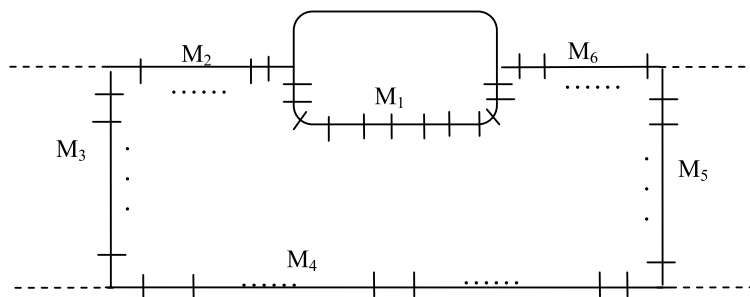
$$\frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \int_{\partial D_i} \sigma(\xi) \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}|\xi) dS + j k_0 \int_{\partial D_i} \sigma(\xi) F(\mathbf{x}|\xi) dS \approx 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_i^L \cup \partial D_i^R, \quad \ell = 2, 3, 4. \quad (16\beta)$$

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, στη πράξη η ανωτέρω προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρόσθετη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση στις κατακόρυφες διεπιφάνειες $\partial D_L^i \cup \partial D_R^i$, και να συμπληρώσει το σύνολο των εξισώσεων (10), αρκεί να λάβουμε το a (βλ. Σχήμα 1) να είναι μεγαλύτερο από μερικά μήκη κύματος. Τότε, οι εξισώσεις (10α), (10β), (10γ) και (16β) μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα ως προς τις ζητούμενες κατανομές πηγών-καταβοθρών, και να βρούμε τα $\{\sigma_{\ell,n}, n = 1, 2, \dots, M\}$, μετά τη διακριτοποίηση του προβλήματος την οποία θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

2. Εφαρμογή της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων

Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα, η μέθοδος στην απλούστερη της εκδοχή, βασίζεται στο διαχωρισμό του συνόρου της εσωτερικής περιοχής $\partial D^i = \partial D_b^i \cup \partial D_{\Pi}^i \cup \partial D_L^i \cup \partial D_R^i$ σε αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων, και έστω M_s , $s = 1, \dots, 6$, ο αριθμός των τμημάτων στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος, στο αριστερό μέρος της ελεύθερης επιφάνειας, στη αριστερή κατακόρυφη διεπιφάνεια, στο πυθμένα, στη δεξιά κατακόρυφη διεπιφάνεια και στο δεξί τμήμα της ελεύθερης

επιφάνειας, αντίστοιχα (βλ. και Σχήμα 2). Ο συνολικός αριθμός των επιφανειακών στοιχείων είναι $M = \sum_{i=1}^6 M_i$. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των στοιχείων τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η γεωμετρία του σώματος αλλά και η κατανομή πηγών-καταβοθρών σε όλο το σύνορο ∂D^i .



Σχήμα 2: Μερισμός του συνόρου ∂D^i του εσωτερικού χωρίου σε τμήματα

Η απλή προσέγγιση τύπου ευθυγράμμων τμημάτων για τη γεωμετρία του συνόρου σε συνδυασμό με την κατά τμήματα σταθερή προσέγγιση της έντασης πηγών-καταβοθρών φέρει το μειονέκτημα, σε σύγκριση με τις μεθόδους συνοριακών στοιχείων ανώτερης τάξης, να απαιτεί την διακριτοποίηση του προβλήματος σε μεγάλο αριθμό στοιχείων (μεγάλο M_s) προκειμένου να έχουμε καλή ακρίβεια. Βασικό κριτήριο για την επιλογή του μεγέθους του πλέγματος (δηλαδή του μεγέθους των στοιχείων) έρχεται από τις ακόλουθες απαιτήσεις:

- (i) να αποδίδονται ικανοποιητικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος (και επομένως χρειάζεται πυκνωση του πλέγματος στις περιοχές μεγάλης καμπυλότητας της βρεχόμενης επιφάνειας) και
- (ii) να είναι επαρκής ο αριθμός στοιχείων ανά μήκος κύματος (το οποίο εξαρτάται από τη συχνότητα) ώστε να μπορεί να αποδοθεί ικανοποιητικά η ταλαντωτικότητα της λύσεως. Ως κανόνας χρησιμοποιούνται τουλάχιστον 15 στοιχεία ανά μήκος κύματος.

Ταυτόχρονα όμως η παρούσα μέθοδος πλεονεκτεί επειδή τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα να μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, πράγμα που οδηγεί σε γρήγορο υπολογισμό και κατάρτιση του πίνακα των αλγεβρικών εξισώσεων καθώς και του δεξιού μέλους του διακριτού συστήματος.

Βασικό στοιχείο είναι η λοιπόν η χρήση των παρακάτω αναλυτικών εκφράσεων των ολοκληρωμάτων για το επαγόμενο δυναμικό και ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο P με συντεταγμένες (x_2, x_3) από κατανομή πηγών-καταβοθρών σταθερής έντασεως σ σε ευθύγραμμο στοιχείο με άκρα τα σημεία A με συντεταγμένες (x_2^A, x_3^A) και B με συντεταγμένες (x_2^B, x_3^B) . Εισάγοντας σύστημα τοπικών συντεταγμένων με τον άξονα ζ στην ευθεία AB και τον άξονα η κάθετο προς αυτόν, βλ. Σχήμα 3, και

ονομάζοντας $(\zeta_A, 0)$ και $(\zeta_B, 0)$ τις συντεταγμένες των σημείων A και B , αντίστοιχα, και (ζ, η) τις συντεταγμένες του P , τα αποτελέσματα είναι

$$\varphi(\zeta, \eta) = -\frac{\sigma}{2\pi} \left\{ (\zeta - \zeta_A) \ln \left[(\zeta - \zeta_A)^2 + \eta^2 \right] - (\zeta - \zeta_B) \ln \left[(\zeta - \zeta_B)^2 + \eta^2 \right] + 2\eta \left(\tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\zeta - \zeta_B} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\zeta - \zeta_A} \right) \right) \right\}, \quad (17)$$

$$u_\zeta(\zeta, \eta) = -\frac{\sigma}{2\pi} \ln \left(\frac{(\zeta - \zeta_A)^2 + \eta^2}{(\zeta - \zeta_B)^2 + \eta^2} \right), \quad (18\alpha)$$

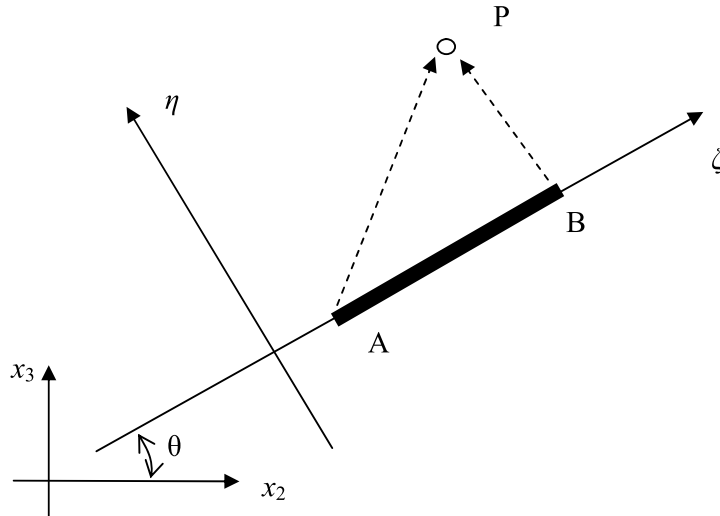
$$u_\eta(\zeta, \eta) = -\frac{\sigma}{2\pi} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\zeta - \zeta_B} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\eta}{\zeta - \zeta_A} \right) \right), \quad (18\beta)$$

και τα τελικά αποτελέσματα για τη ταχύτητα στο γενικό σύστημα συντεταγμένων (x_2, x_3) προκύπτουν με στροφή

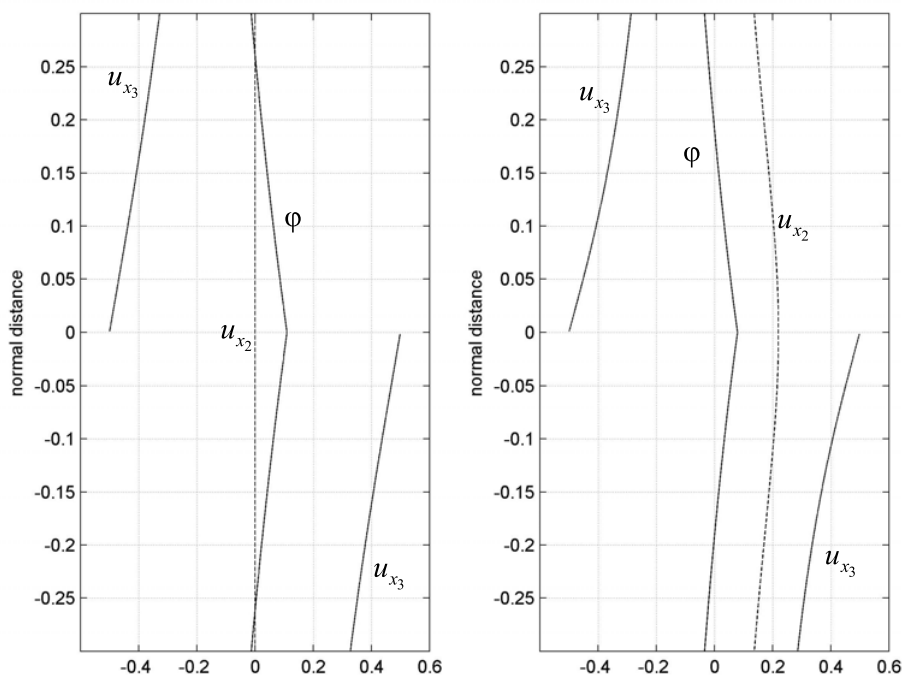
$$u_{x_2}(x_2, x_3) = u_\zeta(\zeta, \eta) \cos(\theta) - u_\eta(\zeta, \eta) \sin(\theta), \quad (19\alpha)$$

$$u_{x_3}(x_2, x_3) = u_\zeta(\zeta, \eta) \sin(\theta) + u_\eta(\zeta, \eta) \cos(\theta), \quad (19\beta)$$

όπου $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x_3^B - x_3^A}{x_2^B - x_2^A} \right)$. Ως παράδειγμα εφαρμογής των ανωτέρω σχέσεων



Σχήμα 3: Τοπικό σε κάθε συντοιακό στοιχείο (AB) και γενικό σύστημα συντεταγμένων



Σχήμα 4: Κατανομές $\varphi(x_2, x_3)$ και $\mathbf{u}(x_2, x_3)$ κατά τη μεσοκάθετο (αριστερά) και κατά τη κάθετο που περνά από σημείο $(x_2, x_3) = (0.2, 0)$ ευθύγραμμου στοιχείου με άκρα $(x_2^A, x_3^A) = (0, 0)$ και $(x_2^B, x_3^B) = (1, 0)$, για $\sigma = 1$ σταθερό σε όλο το μήκος AB .

παρουσιάζουμε στο Σχήμα 4 τις κατανομές των ανωτέρω ποσοτήτων κατά τη μεσοκάθετο (αριστερό γράφημα) ενός στοιχείου με άκρα $(x_2^A, x_3^A) = (0, 0)$ και $(x_2^B, x_3^B) = (1, 0)$ και κατά την κάθετο που περνά από το σημείο $(x_2, x_3) = (0.2, 0)$ (δεξί γράφημα). Παρατηρούμε χαρακτηριστικά την ασυνέχεια στην συνιστώσα u_{x_3} (η οποία έχει διεύθυνση κατά την κάθετο του επιφανειακού στοιχείου AB).

Η χαμηλοτάξια μέθοδος συνοριακών στοιχείων που περιγράφουμε εδώ ολοκληρώνεται με την ικανοποίηση των εξισώσεων (10α), (10β), (10γ) και (16β) σε ένα σύνολο σημείων που χάριν συμμετρίας του αριθμητικού σχήματος επιλέγεται να είναι τα κέντρα (x_2^m, x_3^m) , $m = 1, M$, των αντιστοίχων ευθυγράμμων στοιχείων. Η τεχνική αυτή είναι γνωστή και ως *collocation method* και οδηγεί στην άμεση αλγεβρικοποίηση του συστήματος. Σημειώνουμε πάντως πως και άλλες τεχνικές είναι δυνατές, όπως π.χ. η μέθοδος Galerkin (βλ. π.χ., Kress 1989), η οποία όμως απαιτεί πρόσθετες επιφανειακές ολοκληρώσεις για την υλοποίηση των απαιτούμενων προβολών των εξισώσεων σε κατάλληλα σχεδιασμένο υπόχωρο συναρτήσεων.

Ας συμβολίσουμε για τη συνέχεια με $\varphi_{km} = \varphi(x_2^k, x_3^k)$, $\mathbf{U}_{km} = \mathbf{u}(x_2^k, x_3^k)$ τα επαγόμενα δυναμικά και ταχύτητες στο κέντρο του k -στοιχείου από επιφανειακή κατανομή

σταθερής εντάσεως σ_m στο k -στοιχείο (ευθύγραμμο τμήμα) μερισμού του συνόρου. Ας θέσουμε επίσης \mathbf{n}_k , $k=1, M$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο k -στοιχείο. Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις (10α, β, γ) και (16β) γράφονται στην ακόλουθη διακριτή μορφή, αντιστοίχως, για τα επιμέρους προβλήματα ($\ell = 2, 3, 4$),

$$\frac{\sigma_k}{2} + \sum_{m=1}^M \sigma_m (\mathbf{n}_k \mathbf{U}_{km}) = N_\ell(x_2^k, x_3^k), \quad k=1, M_1, \quad (20\alpha)$$

$$\frac{\sigma_k}{2} + \sum_{m=1}^M \sigma_m (\mathbf{n}_k \mathbf{U}_{km}) = 0, \quad k = \sum_{i=1}^3 M_i + 1, \quad \sum_{i=1}^4 M_i, \quad (20\beta)$$

$$\frac{\sigma_k}{2} + \sum_{m=1}^M \sigma_m (\mathbf{n}_k \mathbf{U}_{km} - \mu \varphi_{km}) = 0, \quad k = M_1 + 1, M_1 + M_2 \text{ και } k = \sum_{i=1}^5 M_i + 1, \quad \sum_{i=1}^6 M_i \quad (20\gamma)$$

$$\frac{\sigma_k}{2} + \sum_{m=1}^M \sigma_m (\mathbf{n}_k \mathbf{U}_{km} + j k_0 \varphi_{km}) = 0, \quad k = M_1 + M_2 + 1, \quad \sum_{i=1}^3 M_i \quad (20\delta)$$

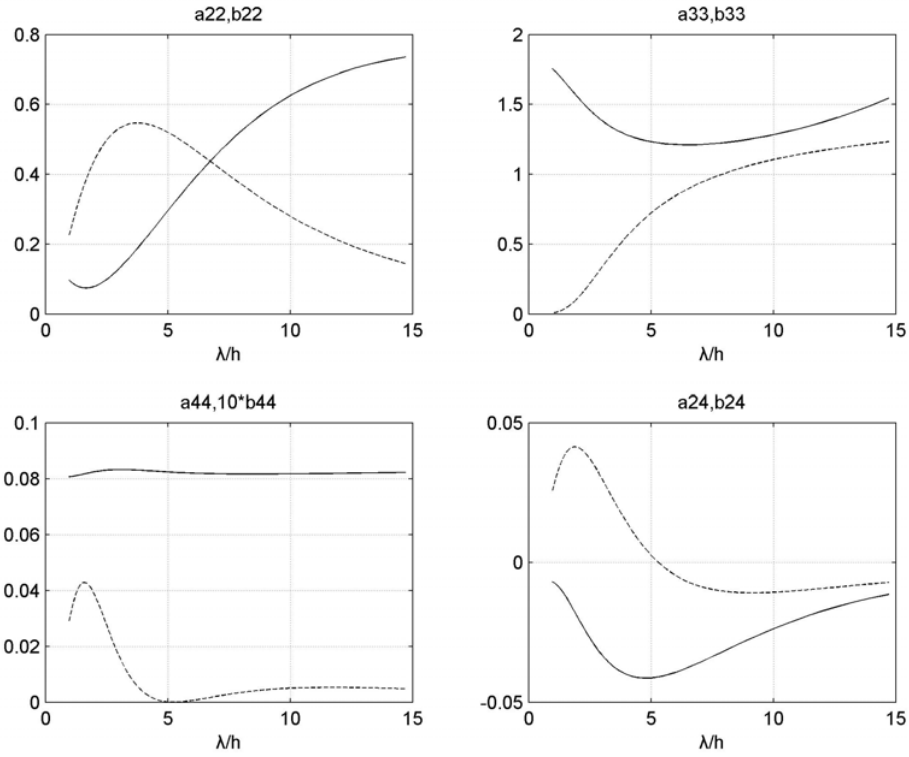
το οποίο αποτελεί το τελικό γραμμικό σύστημα από την επίλυση του οποίου λαμβάνουμε τις εντάσεις πηγών-καταβοθρών $\{\sigma_k, k=1, M\}$ στα στοιχεία του συνόρου. Ακολούθως, με εφαρμογή των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων σχέσεων (4) και (5) μπορούμε να υπολογίσουμε τα δυναμικά και τις ταχύτητες σε κάθε σημείο στο εσωτερικό χωρίο, και από τις σχέσεις απαλοιφής των $A_{\ell,0}^{(e)}$ και $B_{\ell,0}^{(e)}$ στις εξισώσεις (13) και (14) παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές των συντελεστών αυτών για την αναπαράσταση του μακρινού (εξωτερικού) πεδίου.

Μετά την επίλυση οι υδροδυναμικοί συντελεστές υπολογίζονται από τη σχέση (2α) με επιπρόσθετα ολοκληρώματα των κατανομών των υπολογισθέντων δυναμικών ακτινοβολίας $\varphi_\ell(x_2, x_3)$ πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια του σώματος ∂D_B .

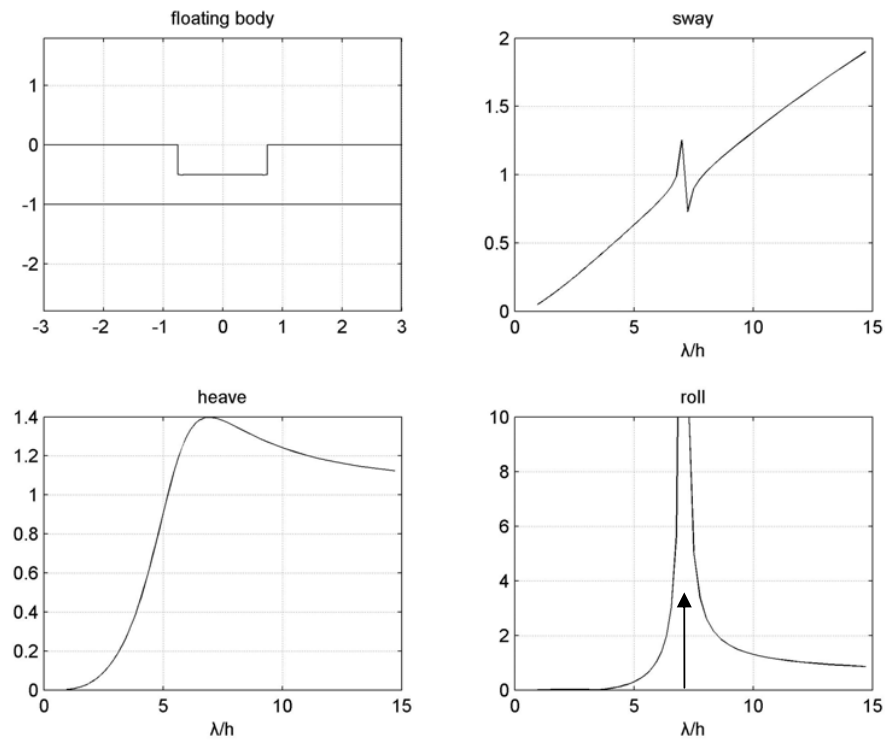
3. Αποτελέσματα

Παραθέτουμε στη συνέχεια στο Σχήμα 5 ενδεικτικά αποτελέσματα υπολογισμού του συντελεστή πρόσθετης μάζας και αποσβέσεως πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής λόγου $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h . Για τα αποτελέσματα έχει ληφθεί ακτίνα μαζικής ροπής αδράνειας περιστροφής ως προς το διαμήκη άξονα x_1 ίση με $0.2B$, οπότε, $m_{44} = m(0.2B)^2$ (ανά μονάδα μήκους), και κατακόρυφη θέση του κέντρου βάρους

$$\text{στην ίσαλο, οπότε } \overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} = -\frac{T}{2} + \frac{B^2}{12T}.$$



Σχήμα 5: Πρόσθετες μάζες (συνεχείς γραμμές) και αποσβέσεις (διακεκομμένες) πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής λόγου $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h .



Σχήμα 6: Αποκρίσεις πλωτού σώματος ορθογωνικής διατομής λόγου $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, συναρτήσει του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h .

Η αδιαστατοποίηση που χρησιμοποιείται εδώ για τη παρουσίαση των υδροδυναμικών συντελεστών είναι

$$a_{kl} / \rho h^2, \quad k, l = 2, 3, \quad a_{24} / \rho h^3, \quad a_{44} / \rho h^4, \quad \text{και}$$

$$(b_{kl} / \rho h^2) \sqrt{h/g}, \quad k, l = 2, 3, \quad (b_{24} / \rho h^3) \sqrt{h/g}, \quad (b_{44} / \rho h^4) \sqrt{h/g}.$$

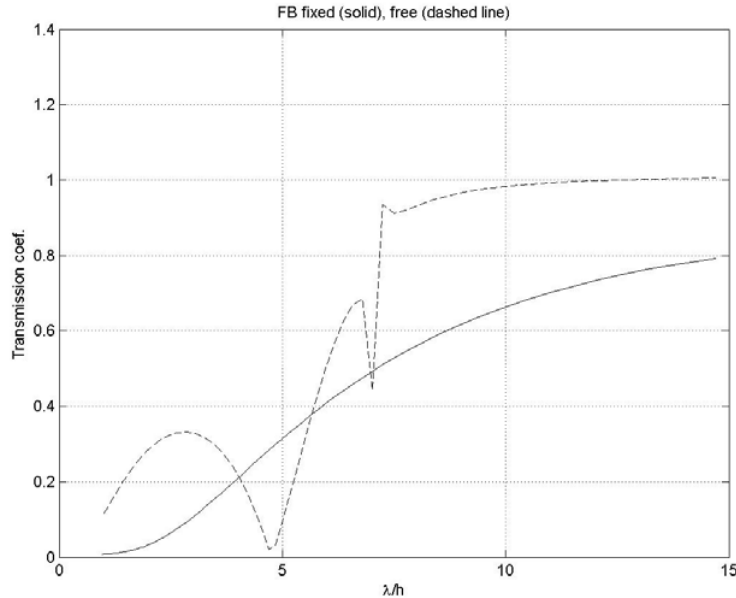
Με την ίδια μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά και το πρόβλημα περίθλασης και να υπολογισθούν οι υδροδυναμικές δυνάμεις με ολοκλήρωση των κατάλληλων δυναμικών πάνω στη βρεχόμενη επιφάνεια. Με βάση αυτά οι εξισώσεις κίνησης μπορεί να επιλυθούν και να υπολογισθούν οι αποκρίσεις (sway, heave και roll). Στο Σχήμα 6 παρουσιάζονται αντίστοιχα αποτελέσματα υπολογισμού των ταλαντωτικών αποκρίσεων του ίδιου (όπως παραπάνω) πλωτού σώματος, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h . Η αδιαστατοποίηση που χρησιμοποιείται για τις αποκρίσεις είναι

$$|\xi_k| / A, \quad k = 2, 3 \quad \text{και} \quad |\xi_4| / kA.$$

Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε τη μεγάλη τιμή της απόκρισης σε διατοιχισμό (roll) λόγω φαινομένων συντονισμού στην αντίστοιχη συχνότητα, και δείχνουμε με βέλος τη σχετική τιμή του μήκους κύματος προς το βάθος του νερού όταν συμβαίνει συντονισμός.

Ο υπολογισμός της λύσης του προβλήματος που εξετάσαμε εδώ μας επιτρέπει να πάρουμε πλούσια πληροφορία και για διάφορα άλλα χαρακτηριστικά πλύν των αποκρίσεων. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε κύμα που διαδίδεται προς τη x_2 -διεύθυνση και προσπίπτει σε επίμηκες σώμα ορθογωνικής διατομής, το οποίο χρησιμοποιείται ως πλωτός κυματοθραύστης, και να εκτιμήσουμε το μέρος της ενέργειας του κύματος που διαπερνά και μεταδίδεται πίσω από το πλωτό σώμα. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα παρουσιάζουμε στο Σχήμα 7 όπου εικονίζεται η τιμή του συντελεστή κυματικής μετάδοσης για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h , όταν χρησιμοποιείται επίμηκες σώμα ορθογωνικής διατομής ίδιων χαρακτηριστικών όπως προηγουμένως, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$. Μπορούμε μάλιστα να εκτιμήσουμε το συντελεστή αυτό όταν (i) το σώμα είναι δεσμευμένο (ακίνητο π.χ. με πασσάλωση) οπότε στη διαμόρφωση του συνολικού πεδίου λαμβάνονται υπόψη μόνο τα δυναμικά του προσπίπτοντος κύματος και της περίθλασης (τα αποτελέσματα δείχνονται με συνεχή γραμμή στο Σχ. 7), καθώς και όταν (ii) το σώμα είναι ελεύθερο να ταλαντώνεται χωρίς την επίδραση άλλων εξωτερικών δυνάμεων (όπως παρουσιάζεται στο Σχ.7 με διακεκομμένη γραμμή) ή και με την επίδραση πρόσθετων, π.χ. δυνάμεων αγκύρωσης οι οποίες μπορούν σε πρώτη φάση να προσεγγισθούν με τη προσθήκη πρόσθετης ελαστικής σταθεράς (π.χ. στην οριζόντια κίνηση).

Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήσαμε επιτρέπουν τον υπολογισμό των πεδίων σε όλο το χωρίο και παρέχουν πληροφορία και εκτός του χωρίου (που δεν μας είναι χρήσιμη). Ένα τέτοιο αποτέλεσμα για το πλωτό σώμα που εξετάσαμε προηγουμένως εικονίζεται στο Σχ.8, ενδεικτικά, για το πεδίο περίθλασης (diffraction) και το πεδίο ακτινοβολίας σε κατακόρυφη ταλάντωση (heave), χρησιμοποιώντας ισοδυναμικές γραμμές.



Σχήμα 7: Συντελεστής μετάδοσης κύματος που προσπίπτει σε επίμηκες σώμα ορθογωνικής διατομής λόγου $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού βάθους $h/T=2$, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/h .

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της υβριδικής μεθοδολογίας που αναπτύξαμε εδώ για τον αριθμητικό υπολογισμό των διδιαστάτων προβλημάτων που εξετάσαμε είναι ότι μπορεί πέραν της γενικής γεωμετρίας του σώματος, να χειρισθεί άλλα στερεά σύνορα όπως ο πυθμένας που δεν είναι κατ'ανάγκην επίπεδα. Ενδεικτικά, παρουσιάζουμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα στο Σχήμα 9.

Κλείνοντας το συμπλήρωμα αυτό σημειώνουμε ότι το πρόγραμμα σε Matlab για τους παραπάνω υπολογισμούς είναι διαθέσιμο από την ιστοσελίδα του μαθήματος.

5. Βιβλιογραφικές αναφορές

Athanassoulis G.A., Loukakis, 1985, An extended-Lewis form family of ship-sections and its application to seakeeping calculations, *International Shipbuilding Progress* vol.32, No 366, pp. 33-43

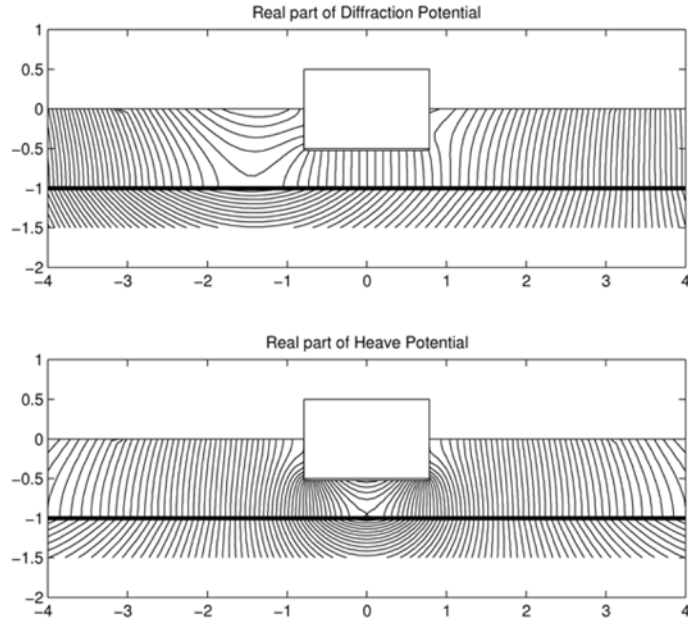
Belibassakis, K.A., 2008, A boundary element method for the hydrodynamic analysis of floating bodies in general bathymetry regions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.32 (2008), pp. 796-810.

Günter, N.M., 1967, *Potential Theory and its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics*. Fr. Urgan Publ.

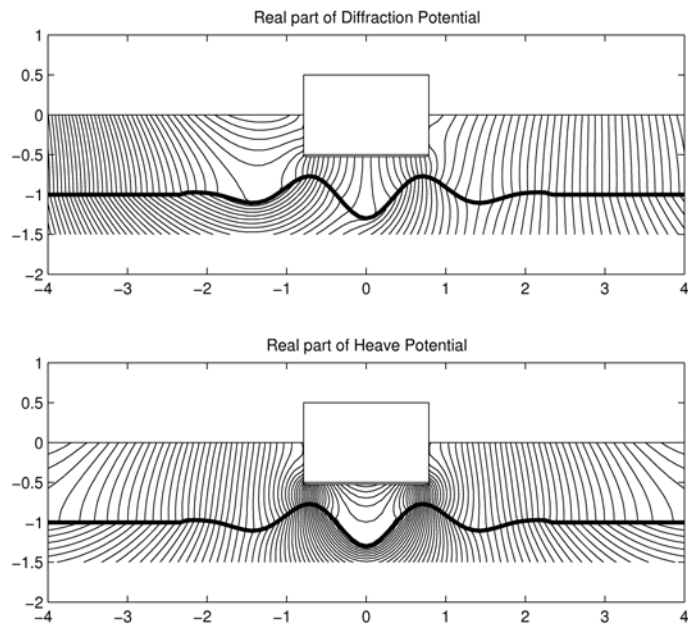
Kress, R., 1989, *Linear Integral Equations*. Springer Verlag.

Mikhlin, S.G., 1965, *Multi Dimensional Singular Integrals and Integral Equations*. Pergamon Press.

Mikhlin, S.G., 1970, *Mathematical Physics. An Advanced Course*. North Holland Paris F. , Canas J., 1997. *Boundary Element Methods*. Oxford University Press.



Σχήμα 8: Πεδίο περίθλασης (πάνω) και ακτινοβολίας (κάτω) πλωτού σώματος. Επίμηκες σώμα ορθογωνικής διατομής $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού σταθερού βάθους $h/T=2$, για συχνότητα $\omega=1.3\text{rad/s}$ ($\lambda/h=14.7$, $\omega\sqrt{B/2g}=0.36$). Εικονίζεται μόνο το πραγματικό μέρος των πεδίων αυτών.



Σχήμα 9: Πεδίο περίθλασης (πάνω) και ακτινοβολίας (κάτω) πλωτού σώματος. Επίμηκες σώμα ορθογωνικής διατομής $B/T=3$, σε λωρίδα ρευστού με μεταβαλλόμενη βαθυμετρία (λόγος μέσου βάθους $h/T=2$), και για συχνότητα $\omega=1.3\text{rad/s}$ ($\lambda/h=14.7$, $\omega\sqrt{B/2g}=0.36$). Εικονίζεται μόνο το πραγματικό μέρος των πεδίων αυτών.

2.12 Γενική αναπαράσταση των δυναμικών ακτινοβολίας και περίθλασης σε κυλινδρικό χωρίο. Γενική μορφή του πεδίου των «εξερχόμενων» αρμονικών κυματισμών σε νερό σταθερού βάθους (τρισιδιάστατο πρόβλημα)

Στο Παράρτημα αυτό θα λύσουμε το «γενικό πρόβλημα αναπαράστασης των δυναμικών $\Phi_\ell(\mathbf{x})$ στο ενδιάμεσο κυλινδρικό χωρίο $D_{R_N R_F}$ » και, με τη βοήθεια της λύσης αυτού του προβλήματος, θα προσδιορίσουμε το πλήρες ανάπτυγμα του πεδίου των «εξερχόμενων» κυματισμών σε τρισδιάστατο υδάτινο πεδίο σταθερού βάθους. Δεδομένου ότι η ανάλυση είναι γενική και αφορά σε όλα τα επί μέρους δυναμικά $\Phi_\ell(\mathbf{x})$, $\ell \in \{d, 1, 2, \dots, 6\}$, στη συνέχεια θα παραλείψουμε το δείκτη (ℓ). Η διατύπωση του προβλήματος αυτού έχει δοθεί στο εδάφιο 2.5 (σχέσεις (2α,β,γ)), και επαναλαμβάνεται και εδώ για λόγους αυτονομίας της παρουσίασης:

Να βρεθούν όλα τα δυνατά πεδία δυναμικού $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D_{R_N R_F}$, τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες μέσα στον κυλινδρικό δακτύλιο $D_{R_N R_F}$:

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in D_{R_N R_F} \quad (R_N \leq r \leq R_F) \quad (1\alpha)$$

$$\mu\Phi - \Phi_{,z} = 0, \quad \mu = \omega^2/g \quad \mathbf{x} \in \partial D_F \quad (z = 0) \quad (1\beta)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \equiv \Phi_{,z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_{II} \quad (z = -h). \quad (1\gamma)$$

Ουδεμία συνθήκη επιβάλλεται στα παράπλευρα κυλινδρικά σύνορα ∂D_{R_N} , ∂D_{R_F} .

Η επιλογή του κυλινδρικού δακτυλίου $D_{R_F R_N}$ γίνεται ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του **χωρισμού των μεταβλητών** για τη λύση της εξίσωσης Laplace (1α). Σε πρώτη φάση, αναζητούμε λύσεις του προβλήματος (1α,β,γ), της μορφής

$$\Phi(r, \theta, z) = f(r, \theta) g(z). \quad (2)$$

Χωρίζουμε, δηλαδή, κατ' αρχήν την οριζόντια (r, θ) από την κατακόρυφη (z) εξάρτηση. Εισάγοντας την αναπαράσταση (2) στον διαφορικό τελεστή (1α) παίρνουμε:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right] g(z) + f(r, \theta) g''(z) = 0, \quad (3)$$

$$R_N \leq r \leq R_F, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in (-h, 0).$$

Διαιρώντας την (3) με το γινόμενο $f(r, \theta) g(z)$ βρίσκουμε:

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial \theta^2}}{f(r, \theta)} + \frac{g''(z)}{g(z)} = 0. \quad (4)$$

Όπως βλέπουμε, ο πρώτος όρος είναι μια συνάρτηση των ορισμάτων (r, θ) , ενώ ο δεύτερος όρος είναι συνάρτηση του ορίσματος z . Κατά συνέπεια, κάθε ένας όρος μεταβάλλεται ανεξαρτήτως του άλλου και, άρα, το άθροισμά τους μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδενικό, μόνον εάν κάθε ένας από αυτούς ισούται με μία σταθερά, και αυτές οι δύο σταθερές είναι αντίθετες. Υποθέτοντας ότι ο δεύτερος όρος της (4) ισούται με $k^2 \in \mathbb{C}$ (**σταθερά διαχωρισμού**), οδηγούμαστε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = k^2, \quad (5\alpha)$$

$$\frac{\Delta_{r,\theta} f(r, \theta)}{f(r, \theta)} = -k^2, \quad (5\beta)$$

όπου

$$\Delta_{r,\theta} \bullet = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bullet}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \theta^2}. \quad (5\gamma)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες (1β) και (1γ) στο δυναμικό (2), βρίσκουμε $f(r, \theta) [\mu g(0) - g'(0)] = 0$, $f(r, \theta) g'(-h) = 0$, $f(r, \theta) \in [R_N, R_F] \times [0, 2\pi]$, εκ της οποίας συμπεραίνουμε ότι $\mu g(0) - g'(0) = 0$ και $g'(-h) = 0$. Η εξίσωση (5α), συνεπικουρούμενη από τις ανωτέρω συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση $g(z)$, οδηγεί στο ακόλουθο ομαλό πρόβλημα ιδιοτιμών (**κατακόρυφο πρόβλημα Sturm-Liouville**):

Να βρεθούν όλες οι μη τετριμμένες συναρτήσεις $g(z)$, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad (6\alpha)$$

$$\mu g(z) - g'(z) = 0, \quad z = 0, \quad (6\beta)$$

$$g'(z) = 0, \quad z = -h. \quad (6\gamma)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (6α) είναι, ως γνωστόν, η ακόλουθη:

$$g(z) = C \cosh[k(z+h)] + D \sinh[k(z+h)]. \quad (7)$$

Από την εφαρμογή της συνθήκης πυθμένα (6γ) προκύπτει ότι η σταθερά D μηδενίζεται, ενώ από την εφαρμογή της γραμμικοποιημένης συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας (6β), βρίσκουμε:

$$\mu C \cosh(kh) - kC \sinh(kh) = 0.$$

Δεδομένου ότι αναζητάμε μη τετριμμένη λύση, θα πρέπει $C \neq 0$, οπότε η ανωτέρω γίνεται

$$\mu h = kh \tanh(kh). \quad (8)$$

Η τελευταία ονομάζεται **σχέση** (ή **εξίσωση**) **διασποράς** (dispersion relation) και είναι εξαιρετικά σημαντική, διότι, «περικλείει» κατ' ουσίαν όλη τη δυναμική των γραμμικών υδάτινων κυματισμών. Η σχέση διασποράς (8) περιέχει τις γνωστές σταθερές $\mu = \omega^2 / g$ και h (= βάθος νερού), καθώς και την άγνωστη –προς το παρόν– σταθερά διαχωρισμού k^2 . Έτσι, η **σχέση διασποράς** αποτελεί μία εξίσωση, η οποία **επιλυόμενη μας δίδει τις επιτρεπτές τιμές της σταθεράς διαχωρισμού**.

Κατ' αρχήν, η σταθερά διαχωρισμού k^2 μπορεί να πάρει μιγαδικές τιμές. Εν προκειμένω, αποδεικνύεται ότι η σταθερά k^2 πρέπει να είναι πραγματική ⁽¹⁾. Άρα, το k θα είναι είτε πραγματικός αριθμός ($k \in \mathbb{R}$), είτε καθαρά φανταστικός αριθμός ($k \in i\mathbb{R}$).

Η εξίσωση διασποράς (8) επιλύεται εύκολα (και εποπτικά) με χρήση της **γραφικής μεθόδου**. Όταν k είναι πραγματικός αριθμός οι λύσεις προκύπτουν ως τομές των γραφημάτων των συναρτήσεων

$$\Lambda_1(kh) = \frac{\mu h}{kh} \quad \text{και} \quad \Lambda_2(kh) = \tanh(kh). \quad (9\alpha)$$

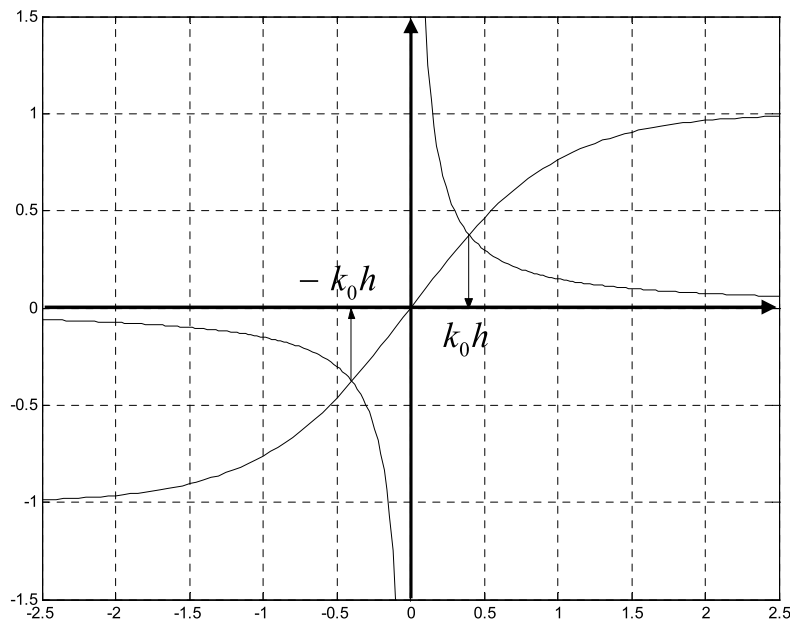
Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1, υπάρχουν δύο (συμμετρικές) τομές των γραφημάτων αυτών, που οδηγούν στις συμμετρικές ρίζες $\pm k_0$. Δεδομένου ότι στις εξισώσεις (5) και (6) υπεισέρχεται μόνο το k^2 , τα δύο πρόσημα δεν ενδιαφέρουν και μπορούμε να περιοριστούμε στη θετική τιμή, $k_0 > 0$.

Όταν η σταθερά διαχωρισμού είναι καθαρά φανταστικός αριθμός, τη συμβολίζουμε με ik , $k \in \mathbb{R}$. Τότε η σχέση διασποράς γίνεται

$$\mu h = ikh \tanh(ikh) \Leftrightarrow -\mu h = kh \tan(kh). \quad (8')$$

Στην περίπτωση αυτή (βλ. Σχήμα 2), προκύπτει ένα άπειρο πλήθος διακριτών καθαρά φανταστικών ριζών, έστω $\{ik_n\}_{n=1}^{+\infty}$, όπου τα k_n δίδονται ως τομή των γραφημάτων των

$$\Lambda_3(kh) = -\frac{\mu h}{kh} \quad \text{και} \quad \Lambda_4(kh) = \tan(kh). \quad (9\beta)$$



Σχήμα 1: Γραφική λύση της εξίσωσης διασποράς (8)

⁽¹⁾ Αυτό προκύπτει εύκολα από το ότι το πρόβλημα Sturm-Liouville (6) είναι αυτοσυζυγές.

Από αυτές τις λύσεις μας ενδιαφέρουν και πάλι μόνον οι θετικές (για τον ίδιο λόγο όπως πριν), ενώ η περίπτωση να υπάρχει ιδιοτιμή με πραγματικό και φανταστικό μέρος διαφορετικό του μηδενός ταυτόχρονα αποκλείεται από το γεγονός ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι αυτοσυζυγές. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου μ , ισχύει η παρακάτω «διάταξη»:

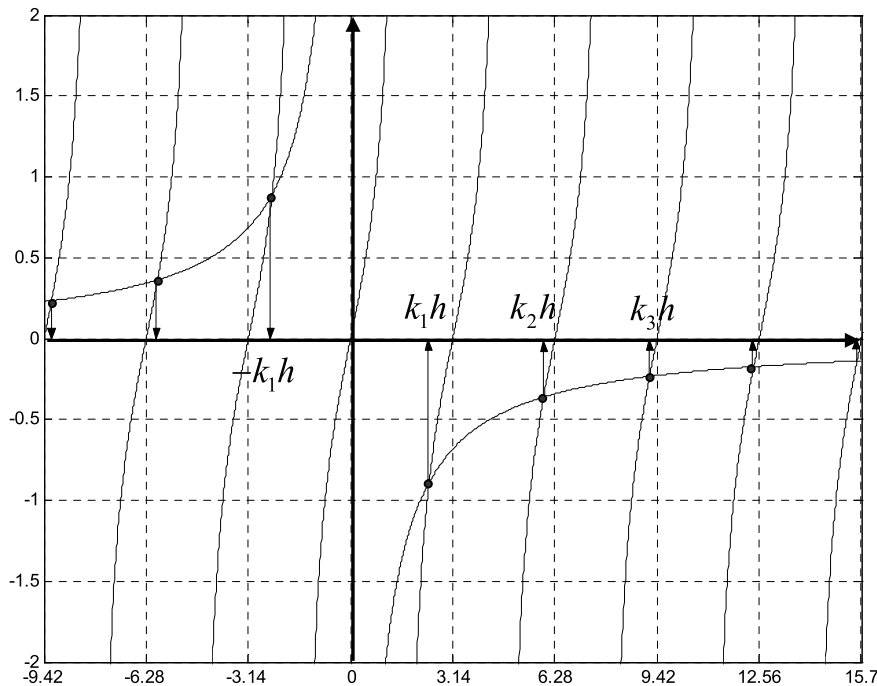
$$\frac{\pi}{2} < k_1 < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < k_2 < 2\pi, \dots, \quad n\pi - \frac{\pi}{2} < k_n < n\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

καθώς επίσης και ότι $k_n \rightarrow n\pi$, καθώς $n \rightarrow +\infty$.

Το σύνολο, λοιπόν, $\{k_0, \{i k_n\}_{n=1}^{+\infty}\}$ αποτελεί το σύνολο των ιδιοτιμών του κατακόρυφου προβλήματος (6α,β,γ). Οι αντίστοιχες **κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις**, έτσι ώστε να έχουν μοναδιαία τιμή στην ελεύθερη επιφάνεια, $g_n(0) = 1$, $n=0,1,2,\dots$, είναι οι ακόλουθες:

$$g_0(z) = \frac{\cosh[k_0(z+h)]}{\cosh(k_0h)}, \quad g_n(z) = \frac{\cos[k_n(z+h)]}{\cos(k_nh)}, \quad n=1,2,\dots \quad (10)$$

Από την γενική θεωρία των ομαλών προβλημάτων Sturm-Liouville γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων $\{g_n\}_{n=0}^{+\infty}$, συνιστά ένα **πλήρες ορθογώνιο σύστημα** (δηλαδή μια **ορθογώνια βάση**) στο χώρο Hilbert των τετραγωνικά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $L^2(-h,0)$. Η ανωτέρω δήλωση σημαίνει, κατ' ουσίαν, τα εξής:



Σχήμα 2: Γραφική λύση της εξίσωσης διασποράς (8')

1. Οι συναρτήσεις g_n είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή,

$$\int_{z=-h}^{z=0} g_n(z) g_m(z) dz = \|g_m\|_{L^2}^2 \delta_{nm}. \quad (2) \quad (11\alpha)$$

2. Κάθε συνάρτηση $G(z)$, $z \in [-h, 0]$, η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (συμβολικά γράφουμε $G \in L^2(-h, 0)$), μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g_n(z). \quad (11\beta)$$

Η σύγκλιση της σειράς και η ισότητα (11β) νοούνται κατά **μέση τετραγωνική έννοια**, δηλαδή

$$\left\| G(z) - \sum_{n=0}^N A_n g_n(z) \right\|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{-h}^0 \left| G(z) - \sum_{n=0}^N A_n g_n(z) \right|^2 dz \right)^{1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Η μέση τετραγωνική σύγκλιση δεν εξασφαλίζει γενικώς σύγκλιση κατά σημείο. Ισχύει όμως το ακόλουθο ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Εάν η ανάπτυξη συνάρτηση $G(z)$ είναι

- α. επαρκώς λεία (ας υποθέσουμε εδώ, σε συμφωνία με την εξίσωση Laplace, ότι η $G(z)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, συμβολικά $G \in C^2([-h, 0])$), και
- β. ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες (6β) και (6γ), όπως ακριβώς και οι συναρτήσεις βάσης $g_n(z)$,

τότε

3. η σύγκλιση της σειράς (11β) είναι ομοιόμορφη και, επιπλέον, η σειρά παραγωγίζεται κατά όρους.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, από την επίλυση του προβλήματος Sturm-Liouville (6), βρήκαμε μια κατάλληλη βάση «κατακορύφων», συναρτήσεων, ως προς την οποία μπορούμε να αναπτύξουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $G(z)$, $-h \leq z \leq 0$.

Με βάση τα ανωτέρω το πεδίο $\Phi(r, \theta, z)$, μπορεί να αναπτυχθεί/αναπαρασταθεί σε σειρά, ως εξής:

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, \theta) \cdot g_n(z). \quad (12)$$

Εισάγοντας την αναπαράσταση (12) στην πεδιακή εξίσωση (1α), και παραγωγίζοντας κατά όρους, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta_{r,\theta} f_n(r, \theta) \cdot g_n(z) + f_n(r, \theta) \cdot g_n''(z)] &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta_{r,\theta} f_n(r, \theta) + k_n^2 f_n(r, \theta)] \cdot g_n(z) &= 0, \end{aligned} \quad (13\alpha)$$

όπου η συνάρτηση $g_n''(z)$ αντικαταστάθηκε από $k_n^2 g_n(z)$, σύμφωνα με τη σχέση (6α).

(²) Υπενθυμίζεται ο ορισμός της L^2 -νόρμας: $\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (13α) με g_m , $m=0,1,2,\dots$, ολοκληρώνοντας από $-\hbar$ έως 0 , και εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα (11α) του συνόλου των ιδιοσυναρτήσεων, βρίσκουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\Delta_{r,\theta} f_n(r,\theta) + k_n^2 f_n(r,\theta)] \cdot \|g_m(z)\|_{L^2}^2 \delta_{nm} = 0, \quad m=0,1,2,\dots, \quad (13\beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{r,\theta} f_n(r,\theta) + k_n^2 f_n(r,\theta) = 0}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (13\gamma)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με την (13γ), κάθε μια συνάρτηση πλάτους $f_n(r,\theta)$ ικανοποιεί μία εξίσωση Helmholtz στις δύο (οριζόντιες) χωρικές διαστάσεις. Κάθε μια από τις εξισώσεις (13γ) νοείται στον κυκλικό δακτύλιο

$$D_{R_N R_F} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_N < r = (x^2 + y^2)^{1/2} < R_F \right\}.$$

Σε συμφωνία με το αρχικό μας «σχέδιο», να βρούμε δηλαδή όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος (1α,β,γ), στο χωρίο $D_{R_N \infty}$, δηλαδή την αναπαράσταση του πεδίου όταν $R_F \rightarrow \infty$ και $r \rightarrow \infty$, ουδεμία συνοριακή ή άλλη βοηθητική συνθήκη εισάγουμε κατά την οριζόντια έννοια. Συνεχίζουμε, δηλαδή, αναζητώντας όλες τις δυνατές λύσεις κάθε μιας από τις εξισώσεις (13γ).

Προς αποφυγή περιττής πολυπλοκότητας στο συμβολισμό, στη διάρκεια των αναλυτικών χειρισμών που ακολουθούν, θα αγνοήσουμε το δείκτη (n), δηλαδή οι συναρτήσεις $f_n(r,\theta)$ και οι ιδιοτιμές k_n θα γράφονται ως $f(r,\theta)$, k , αντιστοίχως. Στην χρήση του πλήρους συμβολισμού θα επιστρέψουμε αργότερα, προκειμένου να παρουσιάσουμε τα τελικά αποτελέσματα.

Προφανώς, η συνάρτηση $f(r,\theta)$ (κάθε συνάρτηση $f_n(r,\theta)$, $n=0,1,\dots$) είναι περιοδική ως προς θ . Κατά συνέπεια μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Fourier ως προς το δεύτερο όρισμά της:

$$f(r,\theta) = f_C(r,\theta) + f_S(r,\theta), \quad (14\alpha)$$

όπου

$$f_C(r,\theta) = \frac{F_0^C(r)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m^C(r) \cos m\theta \quad \text{και} \quad f_S(r,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^S(r) \sin m\theta. \quad (14\beta)$$

Οι συντελεστές Fourier $F_m^C(r)$, $F_m^S(r)$ δίδονται από τις σχέσεις:

$$F_m^C(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_C(r,\theta) \cos m\theta d\theta, \quad F_m^S(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_S(r,\theta) \sin m\theta d\theta, \quad m = 0,1,2, \dots \quad (14\gamma)$$

Μια πιο συνοπτική μορφή της ανωτέρω ανάπτυξης της $f(r,\theta)$, σχέσεις (14α,β), η οποία διευκολύνει σημαντικά τη διαδικασία των περαιτέρω υπολογισμών, είναι η εξής:

$$f(r,\theta) = \sum_m F_m(r) \varphi_m(\theta), \quad (15\alpha)$$

όπου

$$\{\varphi_m(\theta)\} = \left\{ \frac{1}{2}, \cos m\theta, \sin m\theta, m=1,2,\dots \right\}. \quad (15\beta)$$

Η χαρακτηριστική ιδιότητα των περιοδικών συναρτήσεων $\varphi_m(\theta)$, η οποία επαληθεύεται άμεσα με εκτέλεση της διαφορίσης, είναι η ακόλουθη:

$$\frac{d^2\varphi_m(\theta)}{d\theta^2} + m^2\varphi_m(\theta) = 0. \quad (15\gamma)$$

Εισάγοντας την αναπαράσταση (15α) της $f(r, \theta)$ στην εξίσωση (13γ) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\theta} \left[\sum_m F_m(r) \varphi_m(\theta) \right] + k^2 \sum_m F_m(r) \varphi_m(\theta) &= 0, \quad \text{ή} \\ \sum_m \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_m(r)}{\partial r} \right) \varphi_m(\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_m(\theta)}{\partial \theta^2} F_m(r) + k^2 F_m(r) \varphi_m(\theta) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (16\alpha)$$

Τέλος, ορίζοντας τον τελεστή $\Delta_r \bullet \triangleq \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bullet}{\partial r} \right)$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (15γ), οδηγούμαστε στην

$$\sum_m \left[\Delta_r F_m(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_m(r) \right] \varphi_m(\theta) = 0. \quad (16\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας με $\varphi_\ell(\theta)$, ολοκληρώνοντας από $-\pi$ έως π , και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\langle \varphi_m(\theta), \varphi_\ell(\theta) \rangle \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(\theta) \varphi_\ell(\theta) d\theta = \delta_{m\ell} \|\varphi_\ell(\theta)\|^2, \quad (16\gamma)$$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_r F_m(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_m(r) \right\} \sum_m \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(\theta) \varphi_\ell(\theta) d\theta &= 0, \quad \text{ή} \\ \left\{ \Delta_r F_m(r) + k^2 \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) F_m(r) \right\} \|\varphi_\ell(\theta)\|^2 &= 0, \end{aligned}$$

και εφόσον $\|\varphi_\ell(\theta)\| \neq 0, \forall \ell \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_r F_m(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_m(r) = 0, \quad \text{ή αναλυτικότερα}$$

$$\boxed{\frac{d^2 F_m(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_m(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_m(r) = 0}. \quad (16\delta)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = kr$, βρίσκουμε ότι οι συναρτήσεις $F_m(r, \theta)$ ικανοποιούν την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{d^2 F_m(u)}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dF_m(u)}{du} + \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right) F_m(u) = 0, \quad u = kr. \quad (17\alpha)$$

Στο σημείο αυτό, επειδή το σύνολο των ιδιοτιμών του προβλήματος αποτελείται από μια πραγματική ιδιοτιμή k_0 και από (άπειρες) άλλες καθαρά μιγαδικές ιδιοτιμές $\{ik_n\}_{n=1}^{+\infty}$, πρέπει να εξετάσουμε πως διαφοροποιείται η εξίσωση (17α) ανάλογα με το αν το k είναι πραγματικό ή καθαρά φανταστικό. Στην περίπτωση, λοιπόν, όπου το k είναι πραγματικός αριθμός, η εξίσωση (17α) (ως έχει) είναι μια **εξίσωση Bessel τάξεως m** . Όταν το k είναι καθαρά φανταστικός αριθμός, τότε λόγω του όρου $u^2 = (ikr)^2$ στον τελευταίο προσθετέο της εξίσωσης (17α), σημειώνεται εναλλαγή πρόσημου, και παίρνουμε:

$$\frac{d^2 F_m(u)}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dF_m(u)}{du} + \left(1 + \frac{m^2}{u^2}\right) F_m(u) = 0, \quad u = kr. \quad (17\beta)$$

Η εξίσωση (17β) είναι μια **τροποποιημένη εξίσωση Bessel (modified Bessel) τάξεως m** . Τόσο η (συνήθης) εξίσωση Bessel, όσο και η τροποποιημένη εμφανίζονται πολύ συχνά (σχεδόν πάντοτε!) όταν λύνουμε με χωρισμό μεταβλητών τις εξισώσεις Laplace, Helmholtz ή Poisson (καθώς και άλλες εξισώσεις), σε **κυλινδρικές συντεταγμένες**. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο οι εξισώσεις Bessel (17α) και (17β), $m = 0, 1, 2, \dots$, έχουν μελετηθεί διεξοδικά. Οι συναρτήσεις που επιλύουν τις εξισώσεις αυτές ανήκουν στην οικογένεια των ειδικών συναρτήσεων (special functions) της μαθηματικής φυσικής, και είναι γνωστές με τα ονόματα «**συναρτήσεις Bessel**» ή «**συναρτήσεις Hankel**». (Οι δύο οικογένειες δεν ταυτίζονται, προκύπτουν όμως οι μεν από τις δε).

Η εξίσωση Bessel (17α) έχει λύσεις της μορφής

$$C_m H_m^{(1)}(u) + D_m H_m^{(2)}(u), \quad (18)$$

όπου C_m, D_m κατάλληλες σταθερές, και $H_m^{(1)}$ και $H_m^{(2)}$ οι συναρτήσεις Hankel 1^{ου} και 2^{ου} είδους αντίστοιχα. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel καθώς $u = k_0 r \rightarrow +\infty$ έχει μελετηθεί διεξοδικά και δίδεται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$H_m^{(1)}(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{i\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)}, \quad H_m^{(2)}(u) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-i\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)}. \quad (19\alpha, \beta)$$

Έτσι, στην περίπτωση της πραγματικής ιδιοτιμής k_0 , και επειδή $u = k_0 r$, βλέπουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης (17α) έχουν ταλαντωτική μορφή, με ασθενώς μειούμενο πλάτος, ανάλογο προς $r^{-1/2}$. Περαιτέρω, οι δύο λύσεις $H_m^{(1)}(k_0 r)$ και $H_m^{(2)}(k_0 r)$, διαφέρουν –ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά τους για μεγάλες τιμές του r – μόνο ως προς το πρόσημο της φάσης: $\exp\left(\pm i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{4}\right)\right)$.

Η τροποποιημένη εξίσωση Bessel (17β) έχει λύσεις της μορφής

$$E_m I_m(u) + F_m K_m(u), \quad (20)$$

όπου E_m, F_m κατάλληλες σταθερές, και I_m και K_m οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1^{ov} και 2^{ov} είδους αντίστοιχα. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών καθώς $u = k_n r \rightarrow +\infty$ δίδεται από τις ακόλουθες εκφράσεις

$$I_m(u) \sim \frac{e^{|u|}}{\sqrt{2\pi|u|}}, \quad K_m(u) \sim \frac{e^{-|u|}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}|u|}}. \quad (21, \alpha\beta)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην περίπτωση των φανταστικών ιδιοτιμών ($u = k_n r$), οι οριζόντιες λύσεις (της τροποποιημένης εξίσωσης Bessel) αντιστοιχούν, για μεν τη λύση I_m σε εκθετικά αυξανόμενου πλάτους κύματα, για δε τη λύση K_m σε εκθετικώς μειούμενου πλάτους κύματα.

Στο σημείο αυτό επαναφέρουμε το δείκτη n στο συμβολισμό των $f(r, \theta)$ και k . Έτσι, οι συναρτήσεις $f(r, \theta)$ θα αναφέρονται στη συνέχεια ως $f_n(r, \theta)$ και οι ιδιοτιμές k ως k_n , $n=0, 1, \dots$, ενθυμούμενοι πάντοτε ότι η πρώτη ιδιοτιμή k_0 είναι πραγματική (και μας οδηγεί στην εξίσωση Bessel (17α)), ενώ οι υπόλοιπες, k_n , $n=1, 2, \dots$, είναι καθαρά φανταστικές (και μας οδηγούν στην τροποποιημένη Bessel (17β)).

Διατρέχοντας όλα τα ανωτέρω κατά την αντίστροφη κατεύθυνση και συνοψίζοντας (ενοποιώντας) τα αποτελέσματα, έχουμε –μετά την επαναφορά του δείκτη n – τα ακόλουθα: οι συναρτήσεις $F_m(u)$ γίνονται $F_{nm}(u_n)$ και δίνονται από τις σχέσεις:

$$F_{0m}(k_0 r) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} H_m^{(1)}(k_0 r) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(2)} H_m^{(2)}(k_0 r), \quad n=0, \quad (22\alpha)$$

$$F_{nm}(k_n r) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{nm}^{(I)} I_m(k_n r) + \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^{(K)} K_m(k_n r), \quad n=1, 2, \dots \quad (22\beta)$$

Οι σχέσεις (14α,β), με την εισαγωγή του δείκτη n , γίνονται

$$f_n(r, \theta) = \sum_m F_{nm}(r) \varphi_m(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Εισάγοντας στην τελευταία τις σχέσεις (22α,β), παίρνουμε την γενική μορφή της λύσης ως προς r, θ :

$$f_0(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} \varphi_m(\theta) \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(2)} \varphi_m(\theta) \cdot H_m^{(2)}(k_0 r), \quad n=0, \quad (23\alpha)$$

$$f_n(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{nm}^{(I)} \varphi_m(\theta) \cdot I_m(k_n r) + \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^{(K)} \varphi_m(\theta) \cdot K_m(k_n r). \quad n=1, 2, \dots \quad (23\beta)$$

Τέλος, το συνολικό πεδίο $\Phi(r, \theta, z)$ είναι, από τη σχέση (12), $\Phi(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, \theta) g_n(z)$,

οπότε εισάγοντας τις εκφράσεις (23α,β) για τις συναρτήσεις $f_n(r, \theta)$ έχουμε:

$$\Phi(r, \theta, z) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} \varphi_m(\theta) \cdot H_m^{(1)}(k_0 r) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(2)} \varphi_m(\theta) \cdot H_m^{(2)}(k_0 r) \right) \cdot g_0(z) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} E_{nm}^{(I)} \varphi_m(\theta) \cdot I_m(k_n r) + \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm}^{(K)} \varphi_m(\theta) \cdot K_m(k_n r) \right) \cdot g_n(z). \quad (24)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (15β), σύμφωνα με την οποίαν

$$\varphi_m(\theta) = \left\{ \frac{1}{2}, \cos m\theta, \sin m\theta, m=1, 2, \dots \right\},$$

καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Θεώρημα Αναπαράστασης του μακρινού πεδίου: Κάθε συνάρτηση δυναμικού $\Phi(x) = \Phi(r, \theta, z)$, που ικανοποιεί τις εξισώσεις (1α,β,γ) και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο χωρίο $D_{R_N R_F}$, γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, z) = & \left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k_0 r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} a_m^{(1)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(1)} \sin m\theta \end{array} \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_0 r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} a_m^{(2)} \cos m\theta + \\ + b_m^{(2)} \sin m\theta \end{array} \right\} \right) \cdot g_0(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} K_m(k_n r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} a_{nm}^{(K)} \cos m\theta + \\ + b_{nm}^{(K)} \sin m\theta \end{array} \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} I_m(k_n r) \cdot \left\{ \begin{array}{l} a_{nm}^{(I)} \cos m\theta + \\ + b_{nm}^{(I)} \sin m\theta \end{array} \right\} \right) \cdot g_n(z), \end{aligned} \quad (25)$$

όπου $H_m^{(1,2)}(k_0 r)$ είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους αντιστοίχως, $K_m(k_n r)$ και $I_m(k_n r)$ είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντιστοίχως, και $g_0(z)$ και $g_n(z)$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του κατακόρυφου προβλήματος Sturm - Liouville, που δίδονται από τις σχέσεις (10). Οι συντελεστές $a_m^{(1,2)}$, $b_m^{(1,2)}$, $a_{nm}^{(K,I)}$ και $b_{nm}^{(K,I)}$ είναι ελεύθερες σταθερές, οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν αν δοθούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα πλευρικά κυλινδρικά σύνορα, $r = R_N$ και $r = R_F$.

Βιβλιογραφικά σχόλια: Τα προβλήματα Sturm-Liouville, που προκύπτουν από το χωρισμό μεταβλητών διαφόρων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, εξετάζονται σε πολλά βιβλία Διαφορικών Εξισώσεων, καθώς και σε βιβλία με θεματολογία (ή τίτλο) Methods of Mathematical Physics. Καλά εισαγωγικά βιβλία που πραγματεύονται τα ανωτέρω θέματα είναι, π.χ., τα βιβλία των Birkhoff and Rota (1959/1989), Ince (1926/1956), Hochstadt (1964/1975), Churchill and Brown (1963/1987), Mathews and Walker (1964/1970) και Lebedev (1963/1965/1972). Βιβλία που πραγματεύονται τα προβλήματα Sturm-Liouville με μαθηματική πληρότητα και σε υψηλό επίπεδο είναι, μεταξύ άλλων, τα βιβλία των Coddington and Levinson (1955/1972) και Yosida (1960/1991).

Birkhoff, G. and Rota, G.C., *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc. 1st Edition 1959, 6th Edition 1989

Churchill, R.V. and Brown, J.W., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Book Co., 2nd Edition 1963, 4th Edition 1987

-
- Coddington, E.A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Co., 1955, TATA McGraw-Hill Publishing Co. 1972
- Hochstadt, H., *Differential Equations: A Modern Approach*, Holt, Rinehart and Winston, 1964, republished by Dover Publications, Inc., 1975
- Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Co., 1st Edition 1926, republished by Dover Publications, Inc., 1956
- Lebedev, N.N., *Special Functions & Their Applications*, Prentice-Hall, 1965 (translated from the 2nd Russian Edition of 1963), republished by Dover Publications, Inc., 1972
- Mathews, J. and Walker, R.L., *Mathematical Methods of Physics*, W.A. Benjamin, Inc., 1st Edition 1964, W.A. Benjamin/Addison-Wesley, 2nd Edition 1970
- Yosida, K., *Lectures on Differential and Integral Equations*, Interscience Publishers, 1960, republished by Dover Publications, Inc., 1991

Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 2

Λουκάκη, Θ.Α., Πέρρα, Π.Τ., Υδροστατική και Ευστάθεια Πλοίου, Αθήνα 1982.

John, F., On the motion of floating bodies. II, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, 1950

Newman, J.N., The exciting forces on fixed bodies in waves, Journal of Ship Research, Vol. 6, 1962.

Newman, J.N., Marine Hydrodynamics, The MIT Press, 1977.

Semyonov-Tyan-Shansky, V., Statics and Dynamics of the Ship, MIR Publishers, Moscow, 1978.

Sommerfeld, A., Partial Differential Equations in Physics, Lectures on Theoretical Physics, Vol. VI, Academic Press, 1949.

Stoker, J.J., Water Waves, Interscience, 1957.

Wehausen J.V., Laitone, E.V., Surface Waves, in Encyclopedia of Physics, Vol. 9, Springer-Verlag, 1960.

Wehausen, J.V., The Motion of Floating Bodies, Annual Rev. Fluid Mech., Vol. 3, 1971.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΠΛΟΙΟΥ ΣΕ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Κεφάλαιο 3

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΠΛΟΙΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΡΟΣΩ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | σελ. |
|--|------|
| 3.1 Γενικά. Το πρόβλημα (U, ω) | 175 |
| 3.2 Αδρανειακός ρυθμός μεταβολής πεδιακών μεγεθών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει ιδίαν κίνηση | 176 |
| 3.3 Οι εξισώσεις της Υδροδυναμικής όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει ιδίαν κίνηση | 184 |
| 3.4 Κινηματικές σχέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων ενός και του αυτού βαθμωτού πεδιακού μεγέθους ροής θεωρούμενης από διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων | 192 |
| 3.5 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, σε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων. I: Παραγωγή των γενικών μη-γραμμικών συνθηκών | 201 |
| 3.6 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, σε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων. II: Γραμμικοποίηση και απλές κυματικές λύσεις | 208 |
| 3.7 Θεμελιώδης λύση του γραμμικοποιημένου (U, ω)-προβλήματος | 216 |
| Παράρτημα: Πρόσθετες μάζες, αποσβέσεις και φορτίσεις επιμήκων σωμάτων κινουμένων με σταθερή ταχύτητα. Θεωρία λωρίδων | 240 |

3.1 Γενικά. Το πρόβλημα (U, ω)

Σκοπός αυτού του εδαφίου είναι να μελετήσουμε τις υδροδυναμικές δυνάμεις που αναπτύσσονται πάνω σ' ένα στερεό σώμα το οποίο ταλαντεύεται γύρω από μια σταθερή μέση θέση, πάνω (ή κοντά) στην ελεύθερη επιφάνεια, σε αλληλεπίδραση με απλούς αρμονικούς κυματισμούς. Προς τούτο, πρέπει να μελετήσουμε το πεδίο ροής του περιρρέοντος υγρού.

Αγνοώντας τη συνεκτικότητα και υποθέτοντας αστρόβιλη ροή (potential flow), το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ⁽¹⁾ εκφράζεται με τη βοήθεια ενός δυναμικού ταχύτητας $\Phi(\mathbf{x}, t)$ από τη σχέση

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

όπου D είναι το γεωμετρικό χωρίο που καταλαμβάνεται από το υγρό.

⁽¹⁾ Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο \mathbf{x} για να δηλώσουμε το γενικό πεδιακό σημείο μέσα στο πεδίο ροής. Δηλαδή $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

3.2 Αδρανειακός ρυθμός μεταβολής πεδιακών μεγεθών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει ιδίαν κίνηση

Όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 1.2, για τη μοντελοποίηση και μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίου, κινούμενου με μέση πρόσω ταχύτητα $U_s > 0$ δια μέσου κυματισμών, διευκολύνει να χρησιμοποιούμε κινούμενα συστήματα συντεταγμένων. Προκειμένου να προχωρήσουμε στην παραγωγή των εξισώσεων της Υδροδυναμικής και των συνθηκών Ελεύθερης Επιφάνειας όταν το σύστημα συντεταγμένων κινείται, χρειαζόμαστε εκφράσεις του αδρανειακού ρυθμού μεταβολής βαθμωτών και διανυσματικών πεδιακών μεγεθών στην περίπτωση αυτή (δηλ. όταν ο χώρος (το πεδίο) περιγράφεται μέσω κινούμενου συστήματος συντεταγμένων). Υπενθυμίζουμε και πάλι ότι, ανεξαρτήτως του εάν το σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.) κινείται ή όχι, η μοντελοποίηση που ακολουθούμε βασίζεται στις απόλυτες⁽¹⁾ ταχύτητες και επιταχύνσεις του πλοίου και του περιρρέοντος υγρού. Η κίνηση του σ.σ. υπεισέρχεται στην ανάλυση μας κατά δύο τρόπους:

- i) Οι συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) ενός υλικού στοιχείου $[\sigma]$ του υγρού μεταβάλλονται όχι μόνον λόγω της ταχύτητας $\mathbf{u}([\sigma]; t)$ του υλικού στοιχείου, αλλά και λόγω της κίνησης του σ.σ., και
- ii) Οι συνιστώσες ενός (οποιουδήποτε) αδρανειακού διανυσματικού πεδιακού μεγέθους $\mathbf{b} = \mathbf{b}([\sigma]; t)$ νοούνται επί των στιγμιαίων αξόνων. Άρα, οι ρυθμοί μεταβολής των συνιστωσών $b_n([\sigma]; t)$ του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{b} = \mathbf{b}([\sigma]; t)$ επηρεάζονται από την κίνηση (περιστροφή) του σ.σ..

Στο παρόν εδάφιο θα παράγουμε τις εκφράσεις του αδρανειακού ρυθμού μεταβολής βαθμωτών και διανυσματικών πεδιακών μεγεθών, όταν το σύστημα συντεταγμένων κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$ ⁽²⁾. Στην περίπτωση βαθμωτών μεγεθών έχουμε να χειριστούμε μόνο την επίδραση i) της κίνησης του σ.σ., ενώ στην περίπτωση διανυσματικών μεγεθών έχουμε και τις δύο επιδράσεις i) και ii), ανωτέρω.

- Ουσιώδης παράγωγος βαθμωτού πεδιακού μεγέθους

Ως γνωστόν, η *ουσιώδης* (ή ολική ή υλική) *παράγωγος*⁽³⁾ βαθμωτού πεδιακού μεγέθους (π.χ., της πίεσης ή του δυναμικού) είναι ο απόλυτος χρονικός ρυθμός μεταβολής του μεγέθους αυτού, αναφερόμενου σε συγκεκριμένο υλικό στοιχείο. Η ακριβής φυσική σημασία της ανωτέρω διατύπωσης και οι μαθηματικές της συνέπειες αναλύονται διεξοδικά στη συνέχεια.

Έστω υλικό στοιχείο $[\sigma]$ μάζας δm , το οποίο στη χρονική στιγμή t κατέχει τη θέση $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ και κινείται με απόλυτη ταχύτητα $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$. Έστω $a = a([\sigma]; t)$ βαθμωτό

⁽¹⁾ Εν προκειμένω νοούνται συμβατικά ως απόλυτες οι ταχύτητες και επιταχύνσεις ως προς τον στερεό φλοιό της Γης. Άλλες επιλογές, που λαμβάνουν υπ' όψιν και την κίνηση του στερεού φλοιού της Γης, είναι επίσης δυνατές, και χρησιμοποιούνται σε προβλήματα Ναυσιπλοΐας καθώς και σε προβλήματα Γεωφυσικών ροών μεγάλης κλίμακας.

⁽²⁾ Δηλαδή σ.σ. του οποίου η αρχή O κινείται με ταχύτητα $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$, και το οποίο περιστρέφεται (ως στερεό σώμα) με γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

⁽³⁾ Στα αγγλικά, material or essential or total derivative.

πεδιακό μέγεθος (φυσική ιδιότητα), αναφερόμενο(η) στο υλικό στοιχείο $[\sigma]$. Ακολουθώντας το συνήθη πεδιακό συμβολισμό (με χρήση Eulerian χωρικών μεταβλητών), γράφουμε επίσης $a = a(\mathbf{r}; t) = a(x_1, x_2, x_3; t)$, χωρίς όμως να ξεχνάμε ότι η φυσική ιδιότητα a αναφέρεται στο υλικό στοιχείο $[\sigma]$ που κατέχει τη θέση $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ στη χρονική στιγμή t . Το φυσικό αυτό γεγονός αποδίδεται εναργέστερα αν γράψουμε $a = a(\mathbf{r}(t); t)$, όπου $\mathbf{r}(t)$ είναι η (τοπική) εξίσωση της τροχιάς του υλικού σημείου $[\sigma]$. Μετά από χρόνο δt το υλικό στοιχείο $[\sigma]$ θα βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}(t + \delta t)$, οπότε το μέγεθος $a = a([\sigma]; t + \delta t)$, θα έχει την πεδιακή γραφή $a(\mathbf{r}(t + \delta t); t + \delta t)$. Προφανώς, $\mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t)$, είναι η μεταβολή της διανυσματικής ακτίνας που ξεκινά από την αρχή O του χρησιμοποιούμενου Καρτεσιανού σ.σ. και καταλήγει στο υλικό στοιχείο $[\sigma]$. Βλέπε και Σχήμα 1. Ας σημειωθεί ότι δεν έχουμε κάμει –προς το παρόν– καμιά υπόθεση σχετικά με το εάν το σ.σ. κινείται ή είναι ακίνητο. Εάν το σύστημα συντεταγμένων $S \equiv [Ox_1x_2x_3]$ κινείται, τότε $O(t + \delta t) \neq O(t)$ και –γενικότερα– $S(t + \delta t) \neq S(t)$, πράγμα το οποίο επιδρά, και πρέπει να ληφθεί υπ’ όψιν, στον υπολογισμό της μεταβολής $\mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t)$.

Ο **απόλυτος χρονικός ρυθμός μεταβολής του μεγέθους** $a = a([\sigma]; t)$ ή, ισοδυνάμως, η **ουσιώδης παράγωγος** $D \bullet / Dt$ του πεδιακού μεγέθους $a = a(\mathbf{r}; t) = a(x_1, x_2, x_3; t)$, δίδεται, σύμφωνα με τα παραπάνω, από την έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{Da}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{a([\sigma]; t + \delta t) - a([\sigma]; t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{a(\mathbf{r}(t + \delta t); t + \delta t) - a(\mathbf{r}; t)}{\delta t} =, \\ &= \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial t} + \nabla a(\mathbf{r}; t) \cdot \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}, \end{aligned} \quad (1)$$

όπου $\nabla \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \bullet}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \mathbf{i}_3$, και $\delta \mathbf{r} \stackrel{def}{=} \mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t) = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$, είναι η μεταβολή της διανυσματικής ακτίνας $\overline{O[\sigma]}$.

Όπως ήδη εξηγήθηκε ανωτέρω, η μέχρις εδώ ανάλυση είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση του σ.σ., η οποία επεμβαίνει μόνο στη φυσική ερμηνεία (και στη μαθηματική διατύπωση) του ρυθμού μεταβολής $\delta \mathbf{r} / \delta t$ της διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{r} = \overline{O[\sigma]}$. Πράγματι, εάν το σ.σ. είναι ακίνητο, τότε προφανώς

$$\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}, \quad (2)$$

οπότε προκύπτει η συνηθισμένη έκφραση της ουσιώδους πεδιακής παραγώγου:

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla a. \quad \dots\dots[ακίνητο \sigma.σ.]\dots\dots \quad (3)$$

Εάν το σ.σ. κινείται, τότε είναι φανερό πως η σχέση (2) δεν ισχύει, εφ’ όσον ο ρυθμός μεταβολής $\delta \mathbf{r} / \delta t$ της διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{r} = \overline{O[\sigma]}$ οφείλεται εν μέρει στην κίνηση του

στοιχείου του ρευστού, και εν μέρει στην κίνηση του σ.σ.. Για να βρούμε τη σωστή έκφραση για το συνολικό ρυθμό μεταβολής $\delta\mathbf{r}/\delta t$ στην περίπτωση αυτή, ξεχωρίζουμε τους δύο ρυθμούς, έστω $(\delta\mathbf{r}/\delta t)_1$ και $(\delta\mathbf{r}/\delta t)_2$, και γράφουμε

$$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \left(\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}\right)_1 + \left(\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}\right)_2, \quad (4)$$

όπου

$$\left(\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}\right)_1 = \text{ρυθμός μεταβολής που οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του υλικού στοιχείου } [\sigma],$$

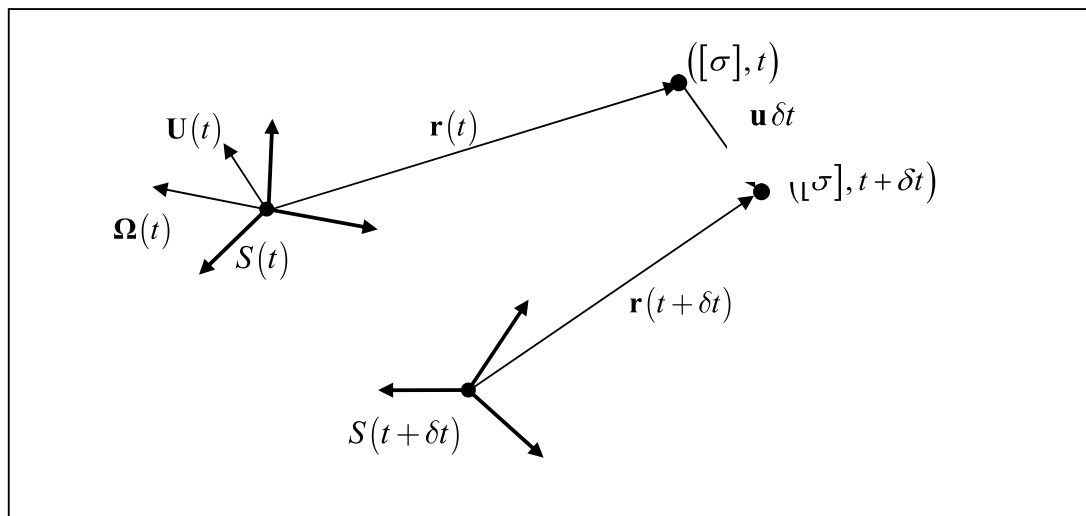
και

$$\left(\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}\right)_2 = \text{ρυθμός μεταβολής που οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του σ.σ..}$$

Προφανώς, $(\delta\mathbf{r}/\delta t)_1 = \mathbf{u}$. Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής $(\delta\mathbf{r}/\delta t)_2$ αγνοούμε την κίνηση του υλικού στοιχείου $[\sigma]$ (θεωρούμε, δηλαδή, προς στιγμήν $\mathbf{u} = 0$) και σκεπτόμεθα ως εξής: Η κατάσταση στην οποία τα πεδιακά σημεία είναι ακίνητα ενώ το σ.σ. κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$ είναι **κινηματικά ισοδύναμη** με την κατάσταση όπου τα πεδιακά σημεία κινούνται με ταχύτητα $-\mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ ενώ το σ.σ. είναι ακίνητο. Στην κατάσταση αυτή, ο ρυθμός μεταβολής της διανυσματικής ακτίνας \mathbf{r} , ο οποίος ταυτίζεται τώρα με $(\delta\mathbf{r}/\delta t)_2$, εκφράζεται μέσω της ταχύτητας του άκρου της $-\mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. Έχουμε δηλαδή

$$\left(\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t}\right)_2 = -\mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Τα ανωτέρω αποτελέσματα, σε συνδυασμό με την (4) μας δίνουν



Σχήμα 1: Ο ρυθμός μεταβολής $\delta\mathbf{r}/\delta t$ της διανυσματικής ακτίνας $\mathbf{r} = \overline{O[\sigma]}$ εξαρτάται από την κίνηση και της αρχής O και του πέρατος $[\sigma]$.

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (5)$$

Η (5) αποτελεί την αναζητούμενη γενίκευση της (2), για την περίπτωση κινούμενου συστήματος συντεταγμένων. Συνδυάζοντας την (5) με την (1) βρίσκουμε

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla a, \quad \dots\dots[\sigma.\sigma. \text{ κινούμενο με ταχύτητα } (\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})] \dots\dots \quad (6\alpha)$$

ή, αναλυτικότερα,

$$\frac{Da(\mathbf{r}; t)}{Dt} = \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial t} + [\mathbf{u}(\mathbf{r}; t) - \mathbf{U}(t) - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}] \cdot \nabla a(\mathbf{r}; t). \quad (6\beta)$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί την κατάλληλη γενίκευση της (3) η οποία εκφράζει την *ουσιώδη παράγωγο του βαθμωτού πεδιακού μεγέθους* $a(\mathbf{r}; t) = a(x_1, x_2, x_3; t)$, όταν το σ.σ. στο οποίο μετράται και αναλύεται η διανυσματική ακτίνα \mathbf{r} , κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$. Για τη σωστή κατανόηση και χρήση των σχέσεων (5) και (6) θα πρέπει να μην ξεχνούμε ότι οι ταχύτητες $\mathbf{u}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}$ είναι *αδρανειακές ταχύτητες*, με συνιστώσες πάνω στους (στιγμιαίους) άξονες Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

- Ουσιώδης παράγωγος διανυσματικού πεδιακού μεγέθους, με συνιστώσες πάνω στους στιγμιαίους άξονες του κινούμενου σ.σ.

Έστω $\mathbf{b} = \mathbf{b}([\sigma]; t) \equiv \mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$ διανυσματικό πεδιακό μέγεθος (φυσική ιδιότητα), αναφερόμενο(η) στο υλικό στοιχείο $[\sigma]$, μάζας δm , το οποίο στη χρονική στιγμή t κατέχει τη θέση $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, και κινείται με απόλυτη ταχύτητα $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$. Σε πλήρη συμφωνία με την ανωτέρω ανάλυση, ο *απόλυτος χρονικός ρυθμός μεταβολής του διανυσματικού μεγέθους* $\mathbf{b} = \mathbf{b}([\sigma]; t)$ ή, ισοδυνάμως, η *ουσιώδης παράγωγος* $D\mathbf{b}/Dt$ *του διανυσματικού πεδίου* $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3; t)$, δίδεται από την έκφραση

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{b}([\sigma]; t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t) - \mathbf{b}([\sigma]; t)}{\delta t}. \quad (7)$$

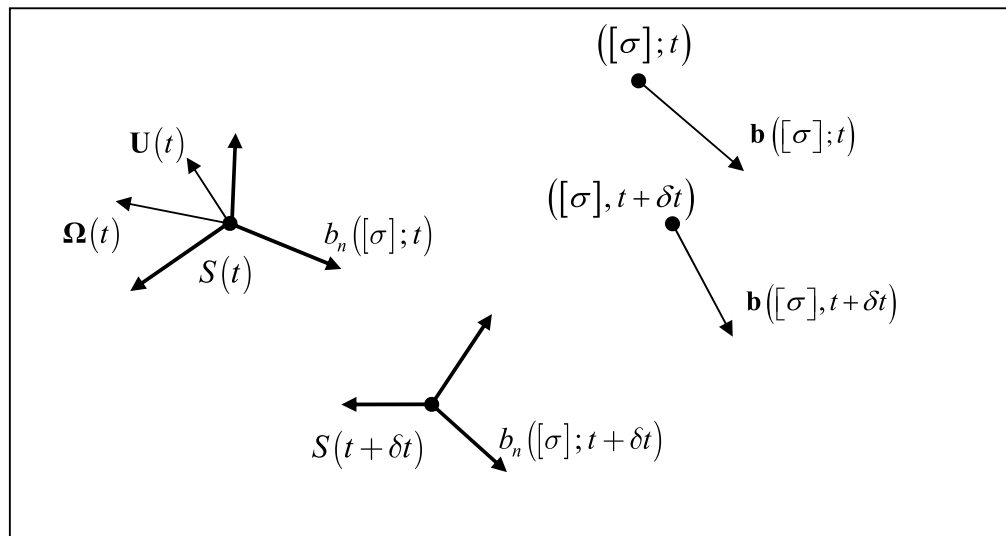
Στο σημείο αυτό πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας ότι το σ.σ. $S(t)$ κινείται, και μάλιστα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Άρα το διάνυσμα $\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)$ αναλύεται σε συνιστώσες πάνω στους (στιγμιαίους) άξονες του $S(t + \delta t)$, οι οποίοι δεν είναι παράλληλοι με τους άξονες του συστήματος $S(t)$, επί των οποίων αναλύεται σε συνιστώσες το διάνυσμα $\mathbf{b}([\sigma]; t)$. Η κατάσταση είναι τελείως αντίστοιχη με αυτήν που αντιμετωπίσαμε στο εδάφιο 1.5, όπου μελετήσαμε τον αδρανειακό (ουσιώδη) ρυθμό μεταβολής διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, αναλυμένου στους στιγμιαίους άξονες κινούμενου συστήματος συντεταγμένων. Αν και μπορούμε να προχωρήσουμε γρήγορα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του εδαφίου 1.5 (βλέπε Σχόλιο 1, κατωτέρω), κατ' αρχήν θα προτιμήσουμε να επαναλάβουμε τα επιχειρήματα και να μελετήσουμε/αναλύσουμε τη σχέση (7) αυτοτελώς, χωρίς να παραπέμψουμε τον αναγνώστη στο εδάφιο 1.5.

Κατ' αρχήν επαναφέρουμε⁽⁴⁾ το συμβολισμό $\mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S(t)} \equiv (\mathbf{b}([\sigma]; t))_{S(t)}$ για να δηλώνουμε την αναλυτική αναπαράσταση του διανύσματος $\mathbf{b}([\sigma]; t)$ μέσω των συνιστωσών του ως προς το σύστημα $S(t)$. Δηλαδή η έκφραση $\mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S(t)}$ θα χρησιμοποιείται ως συντομογραφία του συνόλου των τριών συνιστωσών του διανύσματος \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_1([\sigma]; t) \\ b_2([\sigma]; t) \\ b_3([\sigma]; t) \end{pmatrix}_{S(t)}. \quad (8)$$

Περαιτέρω, ο συμβολισμός $\mathbf{b}([\sigma]; t_1)|_{S(t_2)}$ θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει την αναπαράσταση του διανύσματος $\mathbf{b}([\sigma]; t_1)$ μέσω των συνιστωσών του ως προς το σύστημα $S(t_2)$, ακόμη και όταν $t_1 \neq t_2$.

Είναι φανερό ότι, αν δύο συστήματα S_a και S_b δεν έχουν παράλληλους άξονες, τότε για ένα και το αυτό διάνυσμα $\mathbf{b}([\sigma]; t)$ θα έχουμε $\mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S_a} \neq \mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S_b}$, εφ' όσον οι συνιστώσες του στα δύο συστήματα είναι διαφορετικές. Η διαφορά μεταξύ της γεωμετρικής



Σχήμα 2: Ο αδρανειακός ρυθμός μεταβολής του διανύσματος $\mathbf{b}([\sigma]; t)$ εξαρτάται και από το ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του $b_n([\sigma]; t)$ επί των στιγμιαίων αξόνων του κινούμενου σ.σ. $S(t)$, και από την περιστροφή του σ.σ.

⁽⁴⁾ Ο συμβολισμός αυτός εισήχθη για πρώτη φορά στο εδάφιο 1.3.

οντότητας $\mathbf{b}([\sigma]; t)$ και της αναλυτικής οντότητας $\mathbf{b}([\sigma]; t)|_{S(t)}$, που παριστάνει το σύνολο των τριών συνιστωσών του $\mathbf{b}([\sigma]; t)$, καθίσταται σαφής αν συγκρίνουμε τη σχέση (8) με την

$$\mathbf{b}([\sigma]; t) = \sum_{n=1}^3 b_n([\sigma]; t) \mathbf{i}_n(t). \quad (9)$$

Η αναλυτική οντότητα (8), δεν «περιέχει» (δεν «βλέπει») τα διανύσματα βάσης $\mathbf{i}_n(t)$, $n = 1, 2, 3$, (ενώ η γεωμετρική οντότητα $\mathbf{b}([\sigma]; t)$ τα «βλέπει») πράγμα που δημιουργεί προβλήματα μόνον όταν τα διανύσματα αυτά μεταβάλλονται.

Κατόπιν των ανωτέρω διευκρινήσεων, και έχοντας προ οφθαλμών τις σχέσεις (8) και (9), γεννάται το ερώτημα πώς ακριβώς πρέπει να νοηθεί η διαφορά $\delta \mathbf{b}([\sigma]; t)$, που εμφανίζεται στο δεξιά μέλος της (7), προκειμένου ο υπολογιζόμενος ρυθμός μεταβολής να είναι πράγματι ο αδρανειακός ρυθμός μεταβολής, παρά το ότι το σ.σ. αλλάζει (περιστρέφεται) με το χρόνο. Κάνοντας την εύλογη επιλογή το διάνυσμα $D\mathbf{b}([\sigma]; t)/Dt$ να νοείται αναλυμένο στους στιγμιαίους άξονες του σ.σ. $S(t)$, οδηγούμεθα στην ακόλουθη «συγκεκριμενοποίηση» της σχέσης (7):

$$\left(\frac{D\mathbf{b}([\sigma]; t)}{Dt} \right)_{S(t)} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t)} - (\mathbf{b}([\sigma]; t))_{S(t)}}{\delta t}. \quad (10)$$

Δηλαδή, τα (απόλυτα, αδρανειακά) διανύσματα $\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)$ και $\mathbf{b}([\sigma]; t)$, του δεξιά μέλους της (7), νοούνται αναλυμένα στο ίδιο στιγμιαίο σ.σ., $S(t)$, στο οποίο νοείται αναλυμένο και το αριστερά μέλος της (7). Η «απόφαση» αυτή πρέπει να νοηθεί και κατανοηθεί στη βάση της φυσικής σημασίας των διαφόρων μεγεθών, και όχι ως μια αναγκαία (φορμαλιστική) συνέπεια μαθηματικών ιδιοτήτων. Το τελευταίο συμβαίνει πράγματι στην από εδώ και κάτω επεξεργασία της σχέσης (10). Προσθαφαιρώντας την έκφραση $(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t+\delta t)}$ στον αριθμητή του δεξιά μέλους της (10) και συνδυάζοντας κατάλληλα τους όρους παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t)} - (\mathbf{b}([\sigma]; t))_{S(t)}}{\delta t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t+\delta t)} - (\mathbf{b}([\sigma]; t))_{S(t)}}{\delta t} + \\ &+ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t)} - (\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t+\delta t)}}{\delta t}. \quad (11) \end{aligned}$$

Βάσει της (8), το πρώτο όριο στο δεξιά μέλος της ανωτέρω σχέσεως γράφεται

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t))_{S(t+\delta t)} - (\mathbf{b}([\sigma]; t))_{S(t)}}{\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b_1([\sigma]; t + \delta t) - b_1([\sigma]; t)}{\delta t} \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b_2([\sigma]; t + \delta t) - b_2([\sigma]; t)}{\delta t} \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{b_3([\sigma]; t + \delta t) - b_3([\sigma]; t)}{\delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Db_1([\sigma]; t)}{Dt} \\ \frac{Db_2([\sigma]; t)}{Dt} \\ \frac{Db_3([\sigma]; t)}{Dt} \end{pmatrix}$$

Οι παράγωγοι $Db_n([\sigma]; t)/Dt$ υπολογίζονται ως εάν οι συνιστώσες $b_n([\sigma]; t)$ να ήταν βαθμωτές ποσότητες, με τη βοήθεια της σχέσεως (6).

Το δεύτερο όριο στο δεξιά μέλος της σχέσεως (11) περιέχει στον αριθμητή τη διαφορά των συνιστωσών του ίδιου διανύσματος $\mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)$ ως προς τα δύο συστήματα $S(t)$ και $S(t + \delta t)$. Η διαφορά αυτή υπολογίζεται εύκολα αν λάβουμε υπ' όψιν μας ότι το σύστημα $S(t + \delta t)$ προκύπτει από το σύστημα $S(t)$ μετά από μία παράλληλη μεταφορά $\mathbf{U}(t)\delta t$ (η οποία δεν ενδιαφέρει εν προκειμένω) και μια περιστροφή περί τον άξονα $\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t)/|\boldsymbol{\Omega}(t)|$ κατά γωνία $\delta\theta(t) = |\boldsymbol{\Omega}(t)|\delta t$. Τότε, εφαρμόζοντας τη σχέση (12) του εδαφίου 1.3, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t+\delta t)} &= \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t)} + \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t)} \times \mathbf{e} \delta\theta + O(\delta\theta^2) = \\ &= \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t)} + \mathbf{b}([\sigma]; t)_{|S(t)} \times \boldsymbol{\Omega}(t) \delta t + O(\delta t^2), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t)} - \mathbf{b}([\sigma]; t + \delta t)_{|S(t+\delta t)} &= -\mathbf{b}([\sigma]; t)_{|S(t)} \times \boldsymbol{\Omega}(t) \delta t + O(\delta t^2) \\ &= \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{b}([\sigma]; t)_{|S(t)} \delta t + O(\delta t^2). \end{aligned}$$

Εισάγοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα στο δεξιά μέλος της σχέσεως (11), παίρνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \text{αδρανειακός ρυθμός} \\ \text{μεταβολής του} \\ \text{διανύσματος } \mathbf{b}([\sigma]; t) \end{array} \right\} = \left(\frac{D\mathbf{b}([\sigma]; t)}{Dt} \right)_{S(t)} = \begin{pmatrix} \frac{Db_1([\sigma]; t)}{Dt} \\ \frac{Db_2([\sigma]; t)}{Dt} \\ \frac{Db_3([\sigma]; t)}{Dt} \end{pmatrix} + \left(\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{b}([\sigma]; t) \right)_{|S(t)}.$$

(12)

Η ανωτέρω σχέση (12), σε συνδυασμό με την (6), επιλύει το πρόβλημα του υπολογισμού του αδρανειακού χρονικού ρυθμού μεταβολής διανυσματικού πεδιακού μεγέθους $\mathbf{b} = \mathbf{b}([\sigma]; t)$ ως προς σύστημα συντεταγμένων κινούμενο με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$.

Σχόλιο 1: Τα αποτελέσματα του εδαφίου 1.5, σε συνδυασμό με τη σχέση (6), ανωτέρω, που εκφράζει την ουσιαστική παράγωγο βαθμωτού πεδιακού μεγέθους, μπορούν να αξιοποιηθούν για τον «γρήγορο» υπολογισμό της *ουσιαστικής παράγωγου* $D\mathbf{b}/Dt$ του *διανυσματικού πεδίου* $\mathbf{b}(\mathbf{r}; t)$, ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{b}}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left(\sum_{n=1}^3 b_n(\mathbf{r}; t) \mathbf{i}_n(t) \right) = \sum_{n=1}^3 \frac{D}{Dt} (b_n(\mathbf{r}; t) \mathbf{i}_n(t)) = \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{Db_n(\mathbf{r}; t)}{Dt} \mathbf{i}_n(t) + \sum_{n=1}^3 b_n(\mathbf{r}; t) \frac{D\mathbf{i}_n(t)}{Dt} = \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{Db_n(\mathbf{r}; t)}{Dt} \mathbf{i}_n(t) + \sum_{n=1}^3 b_n(\mathbf{r}; t) \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{i}_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{Db_n(\mathbf{r}; t)}{Dt} \mathbf{i}_n(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \sum_{n=1}^3 b_n(\mathbf{r}; t) \mathbf{i}_n(t), \end{aligned}$$

εκ της οποίας λαμβάνουμε

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = \sum_{n=1}^3 \frac{Db_n(\mathbf{r}; t)}{Dt} \mathbf{i}_n(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}; t). \quad (12')$$

Η (12') είναι φορμαλιστικά ταυτόσημη με την (12). Η αναλυτική παραγωγή είναι προφανώς πολύ πιο «απλή», αλλά η φυσική σημασία των χειρισμών είναι σαφώς πιο «σκοτεινή».

3.3 Οι εξισώσεις της Υδροδυναμικής, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει ιδίαν κίνηση

Έχοντας βρει τις κατάλληλες εκφράσεις για τον υπολογισμό του αδρανειακού ρυθμού μεταβολής βαθμωτών και διανυσματικών πεδιακών μεγεθών όταν ο χώρος (το πεδίο) περιγράφεται αναλυτικά μέσω συστήματος συντεταγμένων το οποίο κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε εύκολα στην παραγωγή των εξισώσεων της Υδροδυναμικής ως προς το σύστημα αυτό. Στο παρόν εδάφιο θα παράγουμε τις εξισώσεις Euler, συνέχειας και Bernoulli.

- Οι εξισώσεις Euler ως προς τους στιγμιαίους άξονες κινούμενου σ.σ.

Έστω πεδίο ροής $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$, μη-συνεκτικού (ατριβούς) ρευστού. Έστωσαν $\mathbf{X}(\mathbf{r}; t)$ οι κατανεμημένες δυνάμεις, ανά μονάδα όγκου, και $p(\mathbf{r}; t)$ το πεδίο της πίεσης εντός του ρευστού. Ας θεωρήσουμε υλικό στοιχείο $[\sigma]$ του ρευστού, όγκου δV και πυκνότητας ρ (άρα μάζας $\delta m = \rho \delta V$), το οποίο στη χρονική στιγμή t κατέχει τη θέση $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ και κινείται με (απόλυτη) ταχύτητα $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$. Ο νόμος του Newton για το υλικό στοιχείο $\delta m = \rho \delta V$ γράφεται στη μορφή:

$$\rho \delta V \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{X} \delta V - \nabla p \delta V. \quad (1)$$

$D\mathbf{u}/Dt$ είναι η απόλυτη επιτάχυνση του στοιχείου $\delta m = \rho \delta V$, η οποία –όπως και τα διανύσματα του δεξιά μέλους της (1)- νοείται αναλυμένη σε συνιστώσες πάνω στους στιγμιαίους άξονες του (κινούμενου) σ.σ.. Εφ' όσον το σύστημα συντεταγμένων κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$, ο αδρανειακός ρυθμός μεταβολής $D\mathbf{u}/Dt$ δίδεται από τη σχέση (12) του εδαφίου 3.2:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{Du_1}{Dt} \mathbf{i}_1 + \frac{Du_2}{Dt} \mathbf{i}_2 + \frac{Du_3}{Dt} \mathbf{i}_3 + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (2)$$

Οι ουσιώδεις παράγωγοι Du_n/Dt των συνιστωσών $u_n = u_n([\sigma]; t) = u_n(x_1, x_2, x_3; t)$ επί των στιγμιαίων αξόνων δίδονται από τη σχέση (6) του εδαφίου 3.2:

$$\frac{Du_n}{Dt} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla u_n. \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) και (3), ανωτέρω, παίρνουμε την ακόλουθη μορφή για τις εξισώσεις Euler ως προς τους στιγμιαίους άξονες κινούμενου σ.σ.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla u_1 + \Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2 &= \frac{1}{\rho} X_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla u_2 + \Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3 &= \frac{1}{\rho} X_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla u_3 + \Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1 &= \frac{1}{\rho} X_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (4a)$$

Οι παραγωγίσεις $\partial u_n / \partial t \equiv \dot{u}_n$ είναι μερικές παραγωγίσεις ως προς χρόνο των συνιστωσών $u_n(x_1, x_2, x_3; t)$ της πεδιακής ταχύτητας επί των στιγμιαίων αξόνων του κινούμενου σ.σ.. Οι σχέσεις (4α) μπορούν να ενοποιηθούν στην ακόλουθη διανυσματική γραφή:

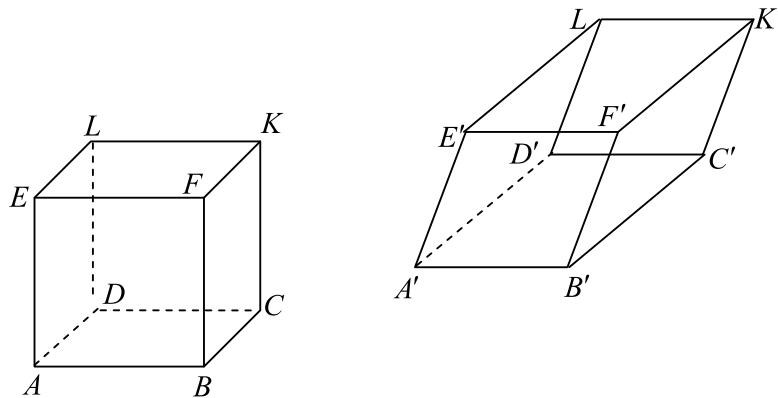
$$\dot{\mathbf{u}} + [(\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{X} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4\beta)$$

Οι εξισώσεις (4α) δίδονται (με συνοπτική παραγωγή) από τον Lamb (1945, Article 12), με αναφορά στον Greenhill (1880).

- Η εξίσωση συνέχειας (διατήρησης μάζας) ως προς κινούμενο σύστημα συντεταγμένων

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό υλικό παραλληλεπίπεδο⁽¹⁾ $ABCDEFKL$, με την κορυφή A στη θέση (x_1, x_2, x_3) και με ακμές dx_1, dx_2, dx_3 , ορθογώνιες στη χρονική στιγμή t . Η πυκνότητα του ρευστού στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου είναι $\rho(x_1, x_2, x_3; t) + O(|dx_n|)$ και η ταχύτητα του $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3; t) + O(|dx_n|)$. Λόγω του απειροστού των ακμών, μπορούμε, χωρίς ουσιώδες σφάλμα, να αγνοήσουμε τις διαφορικές ποσότητες $O(|dx_n|)$ σε σχέση με τις πεπερασμένες, και να υποθέσουμε ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι ομοιόμορφες στο εσωτερικό του απειροστού παραλληλεπιπέδου.

Η μάζα που περιέχεται στο παραλληλεπίπεδο $ABCDEFKL$ τη χρονική στιγμή t είναι $\rho \delta V$, όπου $\delta V = dx_1 dx_2 dx_3$ είναι ο όγκος αυτού. Εφ' όσον οι επιφάνειες του παραλληλεπιπέδου παρακολουθούν τις κινήσεις των στοιχείων του ρευστού που τις αποτελούν, δεν υπάρχει ροή μάζας δι' αυτών. Άρα, η μάζα που περιέχεται στο εσωτερικό του $ABCDEFKL$ τη χρονική στιγμή t θα είναι ίδια με τη μάζα που θα περιέχεται στο εσωτερικό του $A'B'C'D'E'F'K'L'$, στο οποίο μετασχηματίζεται το $ABCDEFKL$ μετά πάροδο χρόνου δt . Το φυσικό αυτό γεγονός εκφράζεται μαθηματικά με τη βοήθεια της ουσιώδους (υλικής) παραγώγου ως εξής:



Σχήμα 1: Υλικό παραλληλεπίπεδο σε πεδίο ροής

⁽¹⁾ Λέγοντας υλικό παραλληλεπίπεδο εννοούμε ένα παραλληλεπίπεδο του οποίου οι επιφάνειες κινούνται με τις ταχύτητες των στοιχείων ρευστού του βρίσκονται πάνω σ' αυτές, και άρα αποτελούνται διαρκώς από τα ίδια στοιχεία ρευστού.

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = 0. \quad (5)$$

Ο όρος $\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}$ εκφράζει το ρυθμό διόγκωσης του στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου, και υπολογίζεται ως εξής: Μετά πάροδο χρόνου δt το αρχικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $ABCDEFKL$ μετασχηματίζεται στο –κατά προσέγγιση– πλάγιο παραλληλεπίπεδο $A'B'C'D'E'F'K'L'$, του οποίου η βασική τριέδρος αποκλίνει απειροστά της αντίστοιχης τρισσορθογώνιας τριέδρου του αρχικού. Κατά συνέπεια, ο όγκος του πλάγιου παραλληλεπίπεδου μπορεί να εκφρασθεί, σε πρώτη τάξη προσέγγισης, από το γινόμενο των μηκών των ακμών του. Οι ακμές του παραλληλεπίπεδου $A'B'C'D'E'F'K'L'$ έχουν μήκη:

$$dx_n + \varepsilon_{mn} \delta t dx_n = (1 + \varepsilon_{mn} \delta t) dx_n,$$

όπου $\varepsilon_{mn} = \partial u_n / \partial x_m$ είναι οι ρυθμοί γραμμικής παραμόρφωσης των υλικών ινών του πεδίου. Βάσει των ανωτέρω έχουμε ότι ο όγκος του πλάγιου παραλληλεπίπεδου $A'B'C'D'E'F'K'L'$ είναι, σε πρώτη τάξη προσέγγισης (δηλαδή παραλείποντας τα διαφορικά ανώτερης τάξης):

$$(1 + \varepsilon_{11} \delta t)(1 + \varepsilon_{22} \delta t)(1 + \varepsilon_{33} \delta t) dx_1 dx_2 dx_3 \approx [1 + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta t] \delta V.$$

Η μεταβολή του όγκου είναι λοιπόν:

$$[1 + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta t] \delta V - \delta V = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta t \delta V,$$

και ο ρυθμός της διόγκωσης:

$$\frac{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta t \delta V}{\delta t \delta V} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \nabla \mathbf{u}.$$

Άρα:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \nabla \mathbf{u}. \quad (6)$$

Συνδυάζοντας τις (5) και (6) παίρνουμε:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (7)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να έχει ήδη παρατηρήσει ότι όλη η ανωτέρω ανάλυση εμφανίζεται αυτούσια και στην περίπτωση όπου το σ.σ. θεωρείται ακίνητο. (Βλ. π.χ. Lamb 1945, Article 7.) Η ουσία αυτής της –σωστής– παρατήρησης είναι ότι **η ανωτέρω ανάλυση είναι ανεξάρτητη από την κινηματική κατάσταση του συστήματος συντεταγμένων με το οποίο περιγράφουμε το χώρο, εφ' όσον επιμένουμε να εργαζόμαστε με τα απόλυτα (αδρανειακά) μεγέθη**. Η κινηματική κατάσταση του σ.σ. υπεισέρχεται μόνο στην ερμηνεία (στον υπολογισμό) της ουσιώδους παραγώγου $D\rho/Dt$. Έτσι, σύμφωνα με την (6) του εδαφίου 3.2, η (7) γίνεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (8a)$$

Επειδή όμως $\nabla(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$, έχουμε ότι $\nabla \mathbf{u} = \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$, οπότε η (8a) γράφεται και στη μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla [\rho(\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] = 0. \quad (8\beta)$$

Παρά το ότι δεν εργαζόμαστε με σχετικά –ως προς το σ.σ.– κινηματικά μεγέθη, στο σημείο αυτό αξίζει να δούμε την (8β) και με την οπτική της σχετικής ταχύτητας. Πράγματι, η διαφορά $\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ εκφράζει τη *σχετική πεδιακή ταχύτητα* \mathbf{u}_{rel} του υλικού στοιχείου $[\sigma(\mathbf{r}; t)]$ ως προς το (κινούμενο) σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, η (8β) γράφεται, ισοδυνάμως, και στη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}_{rel}) = 0. \quad (8\gamma)$$

Από οποιαδήποτε από τις σχέσεις (7) ή (8), βλέπουμε ότι, στην περίπτωση $\rho = \text{σταθερό}$, η εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (9\alpha)$$

η οποία δεν διαφέρει σε τίποτα από την εξίσωση συνέχειας που βρίσκουμε όταν χρησιμοποιούμε ακίνητο σύστημα συντεταγμένων. Ειδικότερα, αν το πεδίο είναι και αστρόβιλο, οπότε $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ και $\mathbf{u} = \nabla \Phi$, η εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (9\beta)$$

Ισχύει λοιπόν το εξής πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα: «**Η εξίσωση συνέχειας του ασυμπίεστου και αστρόβιλου ρευστού έχει τη μορφή** $\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}$, ανεξαρτήτως του εάν το σ.σ. κινείται ή όχι. Το δυναμικό $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3; t)$ ορίζεται έτσι ώστε η κλίση του (gradient) να παρέχει την αδρανειακή πεδιακή ταχύτητα».

Το ανωτέρω αποτέλεσμα παράγεται κατά διαφορετικό τρόπο στο επόμενο εδάφιο.

- **Ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler για αστρόβιλο και ασυμπίεστο ρευστό. Νόμος του Bernoulli**

Είναι γνωστό ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι εξισώσεις Euler μπορούν να ολοκληρωθούν (χωρικά) και να δώσουν μια έκφραση της πίεσης συναρτήσει των κινηματικών ποσοτήτων (και ενδεχομένως των εξωτερικών δυνάμεων). Μια τέτοια περίπτωση είναι και αυτή του αστρόβιλου, ασυμπίεστου ρευστού, εξεταζόμενου με τη βοήθεια κινούμενου σ.σ..

Υποθέτουμε, κατ' αρχήν, ότι οι εξωτερικές δυνάμεις (ανά μονάδα όγκου) προέρχονται από δυναμικό (συντηρητικό) πεδίο (όπως συμβαίνει, π.χ., με τις δυνάμεις βαρύτητας), οπότε $\mathbf{X} = -\nabla \Psi$, όπου $\Psi = \Psi(x_1, x_2, x_3)$ είναι κατάλληλη συνάρτηση δυναμικού. Στην περίπτωση ομογενούς πεδίου βαρύτητας (που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα εν προκειμένω) έχουμε $\Psi = \rho g h$ (h κατακόρυφη απόσταση από μια στάθμη αναφοράς). Υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις, η (4β) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \Psi + \dot{\mathbf{u}} + [(\mathbf{u} - \mathbf{U} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

η οποία ολοκληρωνόμενη κατά μήκος ενός (αυθαίρετου) δρόμου γ , με αρχή το σημείο \mathbf{r}_0 και πέρας το σημείο \mathbf{r} , κείμενου εξ ολοκλήρου μέσα στο πεδίο ροής (βλ. Σχήμα 2), μας δίδει

$$\frac{1}{\rho}(p-p_0) + \frac{1}{\rho}(\Psi-\Psi_0) + \underbrace{\int \dot{\mathbf{u}} dS}_{I_{\dot{\mathbf{u}}}} + \underbrace{\int \{[(\mathbf{u}-\mathbf{U}) \cdot \nabla](\mathbf{u}-\mathbf{U})\} dS}_{I_{\mathbf{u},\mathbf{U}}} - \underbrace{\int \{[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}\} dS}_{I_{\boldsymbol{\Omega},\mathbf{u}}} = 0. \quad (11)$$

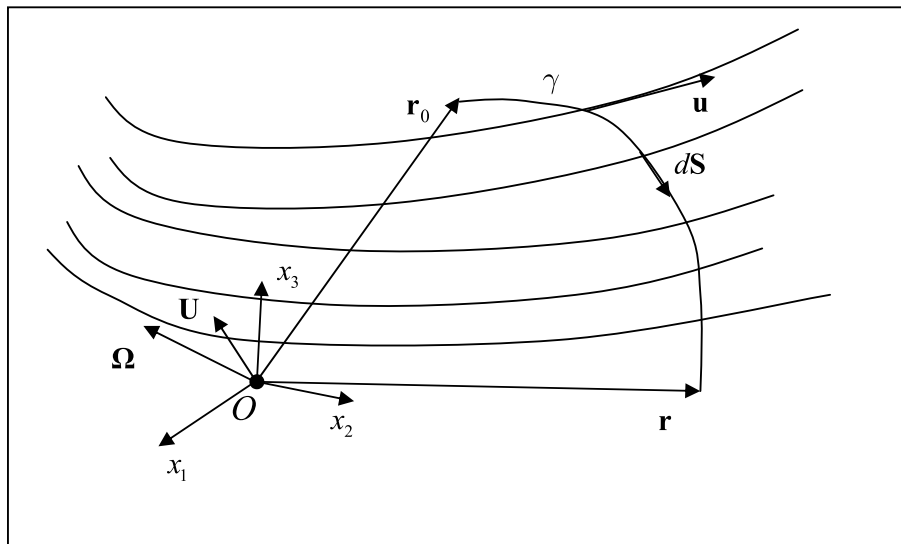
Γενικώς, όταν το πεδίο δεν είναι αστρόβιλο, δηλαδή όταν $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$, τα ολοκληρώματα $I_{\dot{\mathbf{u}}}$, $I_{\mathbf{u},\mathbf{U}}$ και $I_{\boldsymbol{\Omega},\mathbf{u}}$ εξαρτώνται από το δρόμο ολοκλήρωσης. Όταν όμως το πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή όταν

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{οπότε} \quad \mathbf{u} = \nabla \Phi, \quad (12\alpha,\beta)$$

τα τρία ανωτέρω ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα του δρόμου ολοκλήρωσης, και υπολογίζονται άμεσα. Το «κλειδί» γι' αυτόν τον υπολογισμό είναι η μετατροπή των ολοκληρωτέων συναρτήσεων στη μορφή κλίσεων (gradients) βαθμωτών πεδίων.

Η περίπτωση του ολοκληρώματος $I_{\dot{\mathbf{u}}}$ είναι ιδιαίτερα απλή. Από τη σχέση (12β) παίρνουμε $\dot{\mathbf{u}} = \nabla \dot{\Phi}$, με τη βοήθεια της οποίας βρίσκουμε

$$I_{\dot{\mathbf{u}}} = \int \dot{\mathbf{u}} dS = \int \nabla \dot{\Phi} dS = \int d\dot{\Phi} = \dot{\Phi} - \dot{\Phi}_0. \quad (\alpha)$$



Σχήμα 2: Ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler κατά μήκος δρόμου γ εντός του πεδίου ροής

Για να επεξεργασθούμε ανάλογα τα δύο άλλα ολοκληρώματα, $I_{\mathbf{u},\mathbf{U}}$ και $I_{\mathbf{\Omega},\mathbf{u}}$, χρειαζόμαστε την ακόλουθη διανυσματική ταυτότητα, που δίδεται σε πολλά βιβλία διανυσματικής ανάλυσης (βλ. π.χ. Spiegel 1974, σελ. 58), και μπορεί να επαληθευθεί με απ' ευθείας εκτέλεση των πράξεων:

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}). \quad (13)$$

Εάν θέσουμε στην ανωτέρω ταυτότητα $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{U} \equiv \mathbf{q}$ και λάβουμε υπ' όψιν μας ότι, λόγω του αστροβίλου, $\nabla\times\mathbf{u} \equiv \nabla\times(\mathbf{u} - \mathbf{U}) = 0$, παίρνουμε:

$$\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) = 2(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{q}.$$

Άρα, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιά μέλος της (11) γράφεται ως εξής:

$$I_{\mathbf{u},\mathbf{U}} = \int [(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{q}] \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int [\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})] \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}(q^2 - q_0^2). \quad (\beta)$$

Για τον μετασχηματισμό της ολοκληρωτέας του ολοκληρώματος $I_{\mathbf{\Omega},\mathbf{u}}$, εφαρμόζουμε την ταυτότητα (13) θέτοντας $\mathbf{a} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{u}$, οπότε βρίσκουμε

$$\nabla[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})] = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) + [(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \mathbf{u}\times(\nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})) + (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times(\nabla\times\mathbf{u}). \quad (\gamma)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν μας ότι $\nabla\times\mathbf{u} = 0$ και $\nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{\Omega}$ (η τελευταία προκύπτει αμέσως με απ' ευθείας εκτέλεση των παραγωγίσεων), η (γ) γίνεται:

$$\nabla[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})] = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) + [(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \mathbf{u}\times(2\mathbf{\Omega}). \quad (\delta)$$

Και πάλι με απ' ευθείας εκτέλεση των παραγωγίσεων βρίσκουμε ότι

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}, \quad (\epsilon)$$

οπότε η (δ) γίνεται

$$[(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla]\mathbf{u} - \mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} = \nabla[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})]. \quad (\sigma\tau)$$

Η (στ) εκπληρώνει τον βασικό μας στόχο, δηλαδή το μετασχηματισμό της ολοκληρωτέας του $I_{\mathbf{\Omega},\mathbf{u}}$ σε κλίση βαθμωτής συνάρτησης:

$$I_{\mathbf{\Omega},\mathbf{u}} = \int \left\{ \nabla[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})] \right\} d\mathbf{S} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) - \mathbf{u}_0\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_0) = \nabla\Phi\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) - \nabla\Phi_0\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_0). \quad (\zeta)$$

Εισάγοντας τις (α), (β) και (ζ) στην (11), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{p+\Psi}{\rho} + \dot{\Phi} + \frac{1}{2}q^2 - \nabla\Phi\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) &= . \\ \frac{p_0+\Psi_0}{\rho} + \dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2}q_0^2 - \nabla\Phi_0\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_0) &= c(t), \end{aligned} \quad (14)$$

όπου $p_0 = p_0(\mathbf{r}_0; t)$ και ομοίως για τα Ψ_0 , Φ_0 , $q_0^2 = (\mathbf{u}_0 - \mathbf{U})^2 = (\nabla\Phi_0 - \mathbf{U})^2$. Κατά συνέπεια η ανωτέρω ποσότητα αποτελεί ένα χωρικό ολοκλήρωμα των εξισώσεων Euler, εφ' όσον το δεξιά μέλος της εξίσωσης (14) εξαρτάται μόνο από το χρόνο. Η (14) αποτελεί το **νόμο του Bernoulli** στην περίπτωση αστρόβιλης και ασυμπίεστης ροής, όταν η γεωμετρία

του χώρου περιγράφεται με τη βοήθεια κινούμενου σ.σ., και τα (αδρανειακά) διανυσματικά μεγέθη του πεδίου ροής αναλύονται πάνω στους στιγμιαίους άξονες.

Στη συνέχεια παράγουμε μια εναλλακτική, πλην όμως ισοδύναμη, μορφή του νόμου του Bernoulli (14), η οποία εμφανίζεται πιο συχνά σε διάφορα συγκεκριμένα προβλήματα. Αναλύοντας την ποσότητα q^2 βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\nabla\Phi - \mathbf{U}) \cdot (\nabla\Phi - \mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{2}U^2. \quad (\eta)$$

Εισάγοντας την (η) στο αριστερά μέλος της (14), παίρνουμε:

$$\frac{p + \Psi}{\rho} + \dot{\Phi} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot \mathbf{U} - \nabla\Phi \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = c(t) - \frac{1}{2}U^2(t)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\frac{p + \Psi}{\rho} + \dot{\Phi} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = c_1(t), \quad (15\alpha)$$

όπου η ποσότητα $U^2(t)/2$, ως συνάρτηση του χρόνου, ενσωματώνεται στη σταθερά του δεξιού μέλους. Η (15α) γράφεται επίσης στη μορφή

$$\frac{p + \Psi}{\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \right] \Phi + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = c_1(t). \quad (15\beta)$$

Η εξίσωση (14) ή (15) επιτρέπει –σε πολλές περιπτώσεις– την **αποσύζευξη του δυναμικού από το κινηματικό** υποπρόβλημα, διευκολύνοντας σημαντικά τη μαθηματική επίλυση των αντίστοιχων υδροδυναμικών προβλημάτων. Αυτό συμβαίνει όταν η εξίσωση συνέχειας (9), σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες του προς επίλυση προβλήματος, οδηγούν σε ένα «κλειστό» κινηματικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (ή αρχικών-συνοριακών τιμών), το οποίο επιλύσιμο μας δίδει το κινηματικό πεδίο \mathbf{u} ή Φ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το νόμο του Bernoulli (15), βρίσκουμε το πεδίο της πίεσης $p(\mathbf{r}; t)$, κατά προσέγγιση μιας συνάρτησης του χρόνου $c_1(t)$. Η συνάρτηση $c_1(t)$ προσδιορίζεται αν γνωρίζουμε την πίεση $p(\mathbf{r}_*; t)$ σε ένα (οποιοδήποτε) σταθερό σημείο, \mathbf{r}_* , του πεδίου, για κάθε t .

Αυτή αποσύζευξη, του δυναμικού υποπροβλήματος από το κινηματικό υποπρόβλημα, δεν «δουλεύει» γενικώς σε **προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας**, επειδή το κινηματικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν είναι «κλειστό» (η ελεύθερη επιφάνεια δεν είναι γνωστή!). Έτσι, για να λύσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών με ελεύθερη επιφάνεια, πρέπει να εμπλέξουμε και τη δυναμική συνθήκη (15). Το γεγονός αυτό αποτελεί μια από τις αιτίες της μεγάλης δυσκολίας επίλυσης των προβλημάτων ελεύθερης επιφάνειας. Μια **σημαντική εξαίρεση**, όπου αυτή η περιπλοκή δεν εμφανίζεται τελικώς, έχουμε στο **γραμμικό πρόβλημα στο πεδίο συχνοτήτων**. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε ήδη δει στο Κεφάλαιο 2, η αποσύζευξη είναι εφικτή, αν και στη διατύπωση του «κινηματικού» υποπροβλήματος χρησιμοποιούμε και τη δυναμική συνθήκη προκειμένου να απαλείψουμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Λόγω όμως της γραμμικοποίησης και της απαλοιφής της χρονικής παραγωγού, η «παρέμβαση» της δυναμικής συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας περιορίζεται, από μαθηματική άποψη, στην διαφοροποίηση της συνοριακής συνθήκης, πάνω στην (επίπεδη) μέση ελεύθερη

επιφάνεια, από συνθήκη Neumann σε συνθήκη Robin, του τύπου $\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \nu \Phi = 0$. Η «μικρή» αυτή μαθηματική διαφορά έχει όμως πολύ σημαντικές φυσικές συνέπειες –πράγμα αναμενόμενο εφ' όσον, από φυσική άποψη, η διαφορά συνίσταται στην εισαγωγή της δυναμικής του προβλήματος!

3.4 Κινηματικές σχέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων ενός και του αυτού βαθμωτού πεδιακού μεγέθους ροής, θεωρούμενης από διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

- Σύνδεση με τα δύο προηγούμενα εδάφια. Αυτονομία του παρόντος

Στα δύο προηγούμενα εδάφια, 3.2 και 3.3, μελετήσαμε το πεδίο ροής χρησιμοποιώντας σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.) το οποίο κινείται με ίδια κίνηση (ως στερεό σώμα), με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$. Με τη βοήθεια του συστήματος αυτού υπολογίσαμε, στο εδάφιο 3.2, τον αδρανειακό ρυθμό μεταβολής πεδιακών μεγεθών, δηλ. ποσοτήτων που εκφράζουν υλικές ιδιότητες του ρευστού (και άρα αναφέρονται σε υλικά στοιχεία και όχι σε θέσεις στο χώρο) και, στη συνέχεια, στο εδάφιο 3.3, εφαρμόσαμε τα αποτελέσματα αυτά με σκοπό την παραγωγή των βασικών υδροδυναμικών εξισώσεων (Euler, συνέχειας και Bernoulli). Τονίζουμε για μια ακόμη φορά ότι πάντοτε εργαζόμαστε με τα απόλυτα (αδρανειακά) κινηματικά μεγέθη (ταχύτητα και επιτάχυνση)⁽¹⁾, ανεξαρτήτως της κινητικής κατάστασης του σ.σ.. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εισαγωγική παράγραφο του εδαφίου 3.2, όπου εξηγείται διεξοδικά με ποιό τρόπο υπαισέρχεται στην υδροδυναμική ανάλυση η κίνηση του σ.σ..

Στο παρόν εδάφιο διαφοροποιούμε ελαφρά την οπτικής μας, και στρέφουμε την προσοχή μας στη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων ενός και του αυτού (βαθμωτού, κατ' αρχήν) πεδιακού μεγέθους της ροής, θεωρούμενης από δύο διαφορετικά σ.σ.. Δεδομένου ότι το ένα από τα δύο συστήματα συντεταγμένων θα ληφθεί ακίνητο και το άλλο κινούμενο, τα αποτελέσματα αυτού του εδαφίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την (εναλλακτική) παραγωγή των εξισώσεων της Υδροδυναμικής όταν το σ.σ. κινείται, ανεξαρτήτως των δύο προηγούμενων εδαφίων. Γι' αυτό το λόγο, **η ανάπτυξη του παρόντος εδαφίου είναι αυτόνομη**, χωρίς καμιά αναφορά στα εδάφια 3.2 και 3.3.

- Συστήματα συντεταγμένων

Στο εδάφιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη διερεύνηση των (καθαρώς κινηματικών) σχέσεων μεταξύ των αναπαραστάσεων ενός και του αυτού (βαθμωτού, κατ' αρχήν) πεδιακού μεγέθους της ροής, θεωρούμενης από διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Θα παράγουμε επίσης σχέσεις που συνδέουν τις χωρικές παραγώγους των μεγεθών αυτών, καθώς και σχέσεις που συνδέουν τις χρονικές παραγώγους αυτών. Το δυναμικό ταχύτητας και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι δύο σημαντικά παραδείγματα τα οποία θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια. Τέλος, με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων αυτών, θα διατυπώσουμε τις συνοριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας ως προς σύστημα συντεταγμένων κινούμενο με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$. Θα περιοριστούμε σε Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων, αν και όλες οι θεωρήσεις μας μπορούν να επεκταθούν σε γενικά καμπυλόγραμμα συστήματα, με τη βοήθεια του Τανυστικού Λογισμού.

Θεωρούμε δύο συστήματα συντεταγμένων, ένα ακίνητο $S_f \equiv [O_f x_1^{(f)} x_2^{(f)} x_3^{(f)}]$ ($f=fixed$) και ένα κινούμενο $S_m \equiv [O_m x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}]$ ($m=moving$), με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$. (Τα περισσότερα από

⁽¹⁾ Και, άρα, δεν χρειαζόμαστε πρόσθετες υποθετικές φορτίσεις, όπως π.χ., οι δυνάμεις Coriolis, που υπαισέρχονται όταν εργαζόμαστε με τα σχετικά κινηματικά μεγέθη.

τα αποτελέσματα που θα παραχθούν ισχύουν, είτε αυτούσια είτε κατάλληλα διαμορφωμένα, και στην περίπτωση που θεωρούμε δύο κινούμενα συστήματα).

Κάθε σημείο M του χώρου (του πεδίου ροής) περιγράφεται (αναπαρίσταται) με δύο τρόπους:

$$\blacksquare \text{ αφ' ενός με το διάνυσμα θέσης } \mathbf{r}_f = (x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}) = \overline{O_f M}, \quad (1\alpha)$$

$$\blacksquare \text{ αφ' ετέρου δε με το διάνυσμα θέσης } \mathbf{r}_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}) = \overline{O_m M}. \quad (1\beta)$$

όπου $\mathbf{r}_f = \mathbf{R}_f + \mathbf{r}_m$ (βλ. Σχήμα 1). Οι συντεταγμένες ενός και του αυτού σημείου M του πεδίου ως προς τα δύο συστήματα, δηλαδή οι τριάδες $(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)})$ και $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)})$, είναι προφανώς διαφορετικές, και η σχέση τους αλλάζει με το χρόνο, εφ' όσον το ένα από τα δύο συστήματα έχει ίδια κίνηση⁽²⁾.

Κάθε **βαθμωτό πεδιακό μέγεθος** είναι μονότιμη συνάρτηση του πεδιακού σημείου M και του χρόνου t . Ας θεωρήσουμε, π.χ., το δυναμικό ταχύτητας $\Phi = \Phi(M; t)$. Χρησιμοποιώντας τις δύο αναπαραστάσεις (1α) και (1β) για το πεδιακό σημείο M , λαμβάνουμε τις ακόλουθες δύο αναπαραστάσεις του πεδιακού μεγέθους $\Phi(M; t)$:

$$\Phi \equiv \Phi(M; t) = \Phi_f(\mathbf{r}_f; t) = \Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t), \quad (2\alpha)$$

και

$$\Phi \equiv \Phi(M; t) = \Phi_m(\mathbf{r}_m; t) = \Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t), \quad (2\beta)$$

όπου $\mathbf{r}_f = \mathbf{R}_f + \mathbf{r}_m$. Τα ερωτήματα που θα εξετάσουμε εδώ είναι **ποιά είναι η σχέση μεταξύ των δύο συναρτήσεων** $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$, **καθώς και μεταξύ των παραγώγων τους**.

- **Σχέση μεταξύ των συναρτήσεων (π.χ. δυναμικών ταχύτητας)** $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2) [που εκφράζουν το φυσικό «αξίωμα» ότι κάθε βαθμωτό μέγεθος, είναι αναλλοίωτος του πεδιακού σημείου M ως προς οποιαδήποτε αλλαγή του σ.σ.], έχουμε

$$\Phi_m(\mathbf{r}_m; t) = \Phi_f(\mathbf{r}_f; t) \quad \text{ή} \quad \Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t) = \Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t), \quad (3)$$

εφ' όσον οι συντεταγμένες $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)})$ και $(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)})$ περιγράφουν ένα και το αυτό πεδιακό σημείο M , δηλαδή εφ' όσον ισχύει η σχέση $\mathbf{r}_f = \mathbf{R}_f + \mathbf{r}_m$. Η απλή αυτή γεωμετρική σχέση (βλ. και Σχήμα 1), νοούμενη «αναλυτικά» (δηλ., ανά συνιστώσα), υλοποιεί την αλλαγή του συστήματος των αξόνων. Πράγματι, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα διανύσματα $\mathbf{r}_f = \overline{O_f M}$ και $\mathbf{R}_f = \overline{O_f O_m}$ νοούνται αναλυμένα σε συνιστώσες στους άξονες του συστήματος $S_f \equiv [O_f x_1^{(f)} x_2^{(f)} x_3^{(f)}]$, ενώ το διάνυσμα \mathbf{r}_m νοείται αναλυμένο σε συνιστώσες στους (στιγμιαίους) άξονες του συστήματος $S_m \equiv [O_m x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}]$, γράφουμε

⁽²⁾ Γενικώς, οι δείκτες (f) και (m) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ως προς ποιο σύστημα νοούνται οι συντεταγμένες.

$$\sum_{i=1}^3 x_i^{(f)} \mathbf{e}_i^{(f)} = \sum_{i=1}^3 R_i^{(f)} \mathbf{e}_i^{(f)} + \sum_{i=1}^3 x_i^{(m)} \mathbf{e}_i^{(m)}(t). \quad (4\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την τελευταία σχέση επί $\mathbf{e}_j^{(f)}$, $j = 1, 2, 3$, βρίσκουμε

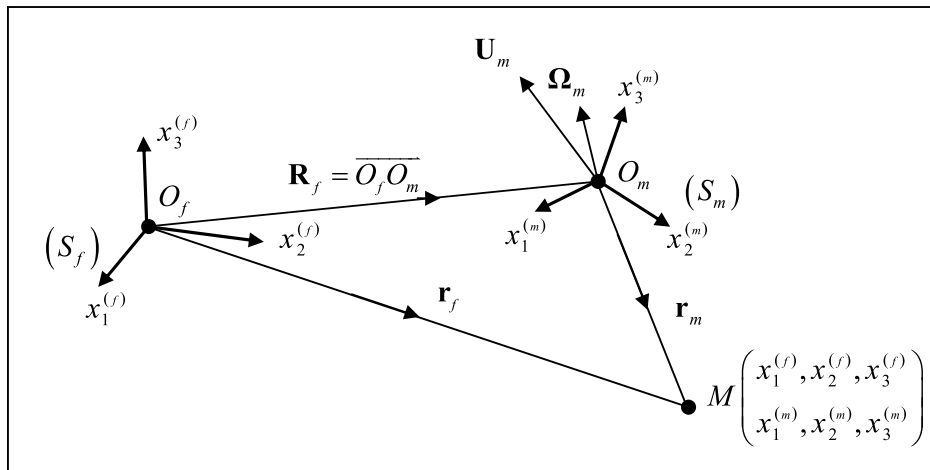
$$x_j^{(f)} = R_j^{(f)} + \sum_{i=1}^3 x_i^{(m)} \underbrace{(\mathbf{e}_i^{(m)}(t) \cdot \mathbf{e}_j^{(f)})}_{a_{ij}(t)}, \quad (4\beta)$$

ή αναλυτικότερα:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(f)} &= R_1^{(f)} + a_{11}x_1^{(m)} + a_{21}x_2^{(m)} + a_{31}x_3^{(m)} \\ x_2^{(f)} &= R_2^{(f)} + a_{12}x_1^{(m)} + a_{22}x_2^{(m)} + a_{32}x_3^{(m)} \\ x_3^{(f)} &= R_3^{(f)} + a_{13}x_1^{(m)} + a_{23}x_2^{(m)} + a_{33}x_3^{(m)} \end{aligned} \right\}. \quad (4\gamma)$$

Οι συντελεστές $a_{ij} = a_{ij}(t)$ που εμφανίζονται στο δεξιά μέλος της (4γ) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης μεταξύ των αξόνων του συστήματος $S_f \equiv [O_f x_1^{(f)} x_2^{(f)} x_3^{(f)}]$ και του συστήματος $S_m \equiv [O_m x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}]$, και δίδονται από τις σχέσεις:

$$a_{ij} = \frac{\partial x_j^{(f)}}{\partial x_i^{(m)}} = \cos(O_f x_j^{(f)}, O_m x_i^{(m)}) = \mathbf{e}_j^{(f)} \cdot \mathbf{e}_i^{(m)}. \quad (5)$$



Σχήμα 1: Κάθε σημείο M του πεδίου ροής αναπαρίσταται με δύο τρόπους:

$$\text{αφ' ενός με το διάνυσμα θέσης } \mathbf{r}_f = (x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}) = \overline{O_f M},$$

$$\text{αφ' ετέρου με το διάνυσμα θέσης } \mathbf{r}_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}) = \overline{O_m M}.$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (4) και (5), ο πίνακας $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ είναι ένας πίνακας στροφής, και άρα είναι *αντιστρέψιμος* και μάλιστα *ορθομοναδιαίος*, δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\underline{A}\underline{A}^T = \underline{A}^T\underline{A} = \underline{I} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^3 a_{ij}a_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (6)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3) και (4), αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $\Phi_f(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}; t)$ του δυναμικού ταχύτητας γραμμένου μέσω των συντεταγμένων $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$ του πεδριακού σημείου M στους άξονες του ακίνητου σ.σ., τότε το δυναμικό $\Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t)$, όπου το πεδριακό σημείο αναπαρίσταται με τις συντεταγμένες του $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}$ ως προς τους στιγμιαίους άξονες του κινουμένου σ.σ., δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t) &= \\ &= \Phi_f(R_1^{(f)} + a_{11}x_1^{(m)} + a_{21}x_2^{(m)} + a_{31}x_3^{(m)}, R_2^{(f)} + a_{12}x_1^{(m)} + a_{22}x_2^{(m)} + a_{32}x_3^{(m)}, \\ &\quad R_3^{(f)} + a_{13}x_1^{(m)} + a_{23}x_2^{(m)} + a_{33}x_3^{(m)}; t). \end{aligned} \quad (7)$$

- Σχέση μεταξύ των χωρικών παραγώγων $\partial\Phi_m/\partial x_j^{(m)}$ και $\partial\Phi_f/\partial x_i^{(r)}$ των συναρτήσεων (π.χ. δυναμικών ταχύτητας) $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$

Η σχέση μεταξύ των χωρικών παραγώγων $\partial\Phi_m/\partial x_j^{(m)}$ και $\partial\Phi_f/\partial x_i^{(r)}$ των δύο αναπαραστάσεων, $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$, ενός και του αυτού βαθμωτού πεδριακού μεγέθους $\Phi(M; t)$, προκύπτει αμέσως με τη βοήθεια των σχέσεων (7) και (5), ανωτέρω:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_j^{(m)}} &= \frac{\partial}{\partial x_j^{(m)}} \Phi_f(\beta\lambda. \text{ δεξιά μέλος (7)}) = \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_1^{(r)}} \frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_2^{(r)}} \frac{\partial x_2^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_3^{(r)}} \frac{\partial x_3^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_p^{(r)}} \frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} = \\ &= \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_1^{(r)}} \cos(O_f x_1^{(r)}, O_m x_j^{(m)}) + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_2^{(r)}} \cos(O_f x_2^{(r)}, O_m x_j^{(m)}) + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_3^{(r)}} \cos(O_f x_3^{(r)}, O_m x_j^{(m)}) = \\ &= \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_1^{(r)}} (\mathbf{e}_1^{(r)} \cdot \mathbf{e}_j^{(m)}) + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_2^{(r)}} (\mathbf{e}_2^{(r)} \cdot \mathbf{e}_j^{(m)}) + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_3^{(r)}} (\mathbf{e}_3^{(r)} \cdot \mathbf{e}_j^{(m)}) = \nabla_f \Phi_f \cdot \mathbf{e}_j^{(m)}, \end{aligned} \quad (\alpha)$$

όπου

$$\nabla_f \Phi_f = \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_1^{(r)}} \mathbf{e}_1^{(r)} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_2^{(r)}} \mathbf{e}_2^{(r)} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_3^{(r)}} \mathbf{e}_3^{(r)}.$$

Περαιτέρω, δεδομένου ότι -εξ ορισμού- $\nabla_f \Phi_f = \mathbf{u} = \text{αδρανειακή πεδριακή ταχύτητα}$, η (α) γίνεται

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_j^{(m)}} \stackrel{(\omega)}{=} \nabla_f \Phi_f \cdot \mathbf{e}_j^{(m)} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j^{(m)} = u_j^{(m)}, \quad (\beta)$$

όπου $u_j^{(m)}$ είναι οι *συνιστώσες της αδρανειακής πεδριακής ταχύτητας \mathbf{u} πάνω στους στιγμιαίους άξονες του κινουμένου σ.σ.*

Τα ανωτέρω αποτελέσματα συνοψίζονται στην ακόλουθη

Πρόταση: Έστω $\Phi = \Phi(M; t)$ *βαθμωτό πεδιακό μέγεθος* και $\Phi_f(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}; t)$, $\Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t)$ δύο *αναλυτικές αναπαραστάσεις* αυτού, γραμμένες αντιστοίχως με τη βοήθεια των συντεταγμένων του πεδιακού σημείου M ως προς τα σ.σ. $S_f \equiv [O_f x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)}]$ (ακίνητο) και $S_m \equiv [O_m x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}]$ (κινούμενο). Τότε, οι χωρικές παράγωγοι $\partial\Phi_m / \partial x_j^{(m)}$ και $\partial\Phi_f / \partial x_i^{(r)}$ των δύο αυτών αναπαραστάσεων του βαθμωτού μεγέθους $\Phi = \Phi(M; t)$, συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_j^{(m)}} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_p^{(r)}} \frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_p^{(r)}} a_{jp} = \nabla_f \Phi_f \cdot \mathbf{e}_j^{(m)}. \quad (3) \quad (8\alpha)$$

Ειδικότερα, εάν $\Phi = \Phi(M; t)$ είναι το δυναμικό ταχύτητας και $\partial\Phi_f / \partial x_i^{(r)} = u_i^{(r)}$ είναι οι συνιστώσες της αδρανειακής πεδιακής ταχύτητας \mathbf{u} πάνω στους άξονες του (ακίνητου) σ.σ. $S_f \equiv [O_f x_1^{(r)} x_2^{(r)} x_3^{(r)}]$, τότε $\partial\Phi_m / \partial x_j^{(m)} = u_j^{(m)}$ είναι οι συνιστώσες της ίδιας (αδρανειακής πεδιακής) ταχύτητας \mathbf{u} πάνω στους στιγμιαίους άξονες του (κινούμενου) σ.σ.. Το τελευταίο συμπέρασμα γράφεται και ως εξής:

$$\nabla_f \Phi_f = \mathbf{u} \Rightarrow \nabla_m \Phi_m = \mathbf{u} = \nabla_f \Phi_f. \quad (8\beta)$$

- *Σχέση μεταξύ των δεύτερων χωρικών παραγώγων $\partial^2\Phi_m / \partial x_\ell^{(m)} \partial x_j^{(m)}$ και $\partial^2\Phi_f / \partial x_p^{(r)} \partial x_i^{(r)}$ των συναρτήσεων (π.χ. δυναμικών ταχύτητας) $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$*

Εάν παραγωγίσουμε την (8α) ως προς $x_\ell^{(m)}$ και λάβουμε υπ' όψιν μας ότι $\frac{\partial}{\partial x_\ell^{(m)}} \left(\frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} \right) = 0$, (εφ' όσον τα συστήματά μας είναι καρτεσιανά και άρα, για $t = \text{σταθ.}$, οι συντεταγμένες $x_p^{(r)}$ και $x_j^{(m)}$ συνδέονται μέσω των γραμμικών σχέσεων (4)), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\ell^{(m)}} \left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_j^{(m)}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_\ell^{(m)}} \left(\sum_{p=1}^3 \frac{\partial\Phi_f}{\partial x_p^{(r)}} \frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} \right) = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\ell^{(m)}} \left(\frac{\partial\Phi_f}{\partial x_p^{(r)}} \right) \frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} = \\ &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \left(\frac{\partial^2\Phi_f}{\partial x_q^{(r)} \partial x_p^{(r)}} \frac{\partial x_q^{(r)}}{\partial x_\ell^{(m)}} \right) \frac{\partial x_p^{(r)}}{\partial x_j^{(m)}} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2\Phi_f}{\partial x_q^{(r)} \partial x_p^{(r)}} a_{\ell q} a_{jp}. \quad (4) \quad (9) \end{aligned}$$

(³) Στα πλαίσια της θεωρίας των Καρτεσιανών Τανυστών, η σχέση $\partial\Phi_m / \partial x_j^{(m)} = \sum_{p=1}^3 (\partial\Phi_f / \partial x_p^{(r)}) a_{jp}$ δηλώνει ότι η τριάδα $\{\partial\Phi_m / \partial x_j^{(m)}, j = 1, 2, 3\}$ είναι τανυστής πρώτης τάξεως. Το φυσικό νόημα της δήλωσης αυτής αποδίδεται εναργέστερα από τη σχέση (8β): η τριάδα $\{\partial\Phi_m / \partial x_j^{(m)}, j = 1, 2, 3\}$ αναπαριστά ένα φυσικό πεδιακό διάνυσμα, το οποίο παραμένει αναλλοίωτο σε αλλαγές Καρτεσιανών συντεταγμένων του τύπου (4).

Με τη βοήθεια της (9) μπορούμε να βρούμε αμέσως τη σχέση μεταξύ των Laplacian τελεστών $\Delta_m \bullet = \nabla_m^2 \bullet$ και $\Delta_f \bullet = \nabla_f^2 \bullet$:

$$\begin{aligned} \Delta_m \Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_m}{(\partial x_j^{(m)})^2} = \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x_\ell^{(m)} \partial x_j^{(m)}} \delta_{j\ell} = \\ &= \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t)}{\partial x_q^{(f)} \partial x_p^{(f)}} a_{\ell q} a_{jp} \delta_{j\ell} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x_q^{(f)} \partial x_p^{(f)}} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{\ell q} a_{jp} \delta_{j\ell} = \\ &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x_q^{(f)} \partial x_p^{(f)}} \sum_{j=1}^3 a_{jq} a_{jp} \stackrel{\text{σχέση (6)}}{=} \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial x_q^{(f)} \partial x_p^{(f)}} \delta_{qp} = \Delta_f \Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t) \end{aligned}$$

ήτοι

$$\Delta_m \Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t) = \Delta_f \Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t) \quad (10)$$

Με άλλα λόγια, **ο τελεστής Laplace παραμένει αναλλοίωτος σε αλλαγές Καρτεσιανών συντεταγμένων του τύπου (4)**. Εξ αυτού προκύπτει το πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι

$$\Delta_f \Phi_f \equiv \nabla_f^2 \Phi_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_m \Phi_m \equiv \nabla_m^2 \Phi_m = 0. \quad (5) \quad (11)$$

Παρατήρηση: Οι σχέσεις (8) και (10), ανωτέρω, μας επιτρέπουν να **αναδιατυπώσουμε ως προς το δυναμικό $\Phi_m(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}; t)$ διάφορα προβλήματα συνοριακών τιμών** τα οποία κατ' αρχήν νοούνται και διατυπώνονται ως προς το δυναμικό $\Phi_f(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)}; t)$. Η δυνατότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί εν εκτάσει στη συνέχεια.

- **Σχέση μεταξύ των χρονικών παραγώγων των συναρτήσεων (π.χ. δυναμικών ταχύτητας) $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$**

Θα συμβολίσουμε με $\partial_f \bullet / \partial_f t$ το χρονικό ρυθμό μεταβολής βαθμωτού μεγέθους $\Phi(M; t)$ όταν τα $(x_1^{(f)}, x_2^{(f)}, x_3^{(f)})$ κρατούνται σταθερά, και με $\partial_m \bullet / \partial_m t$ το χρονικό ρυθμό μεταβολής του ίδιου βαθμωτού μεγέθους $\Phi(M; t)$ όταν τα $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)})$ κρατούνται σταθερά. Ο πρώτος είναι χρονικός ρυθμός μεταβολής ως προς τον αδρανειακό χώρο, ο δεύτερος είναι η μερική χρονική παράγωγος του πεδιακού μεγέθους $\Phi(M; t)$, όταν κρατούνται σταθερές οι συντεταγμένες $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)})$ του σημείου M ως προς το κινούμενο σύστημα. Προφανώς,

⁽⁴⁾ Αντίστοιχο είναι το νόημα της σχέσης (9), στα πλαίσια της θεωρίας των Καρτεσιανών Τανυστών: Ο (3×3) -πίνακας $\{\partial^2 \Phi_m / \partial x_\ell^{(m)} \partial x_j^{(m)}, \ell, j = 1, 2, 3\}$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως.

⁽⁵⁾ Πρβλ. το ανωτέρω αποτέλεσμα με τη σχέση (9β) του εδαφίου 3.3. Έχουμε κατ' ουσίαν το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο εδώ προκύπτει με διαφορετικό τρόπο, εντελώς ανεξάρτητο από τις θεωρήσεις του εδαφίου 3.3.

μέρος αυτού του χρονικού ρυθμού μεταβολής οφείλεται στην κίνηση του σ.σ., και όχι στην μεταβολή του πεδιακού μεγέθους $\Phi(M;t)$.

Είναι προφανές ότι $\partial_f \bullet / \partial_f t$ είναι η μερική παράγωγος ως προς t μεγεθών του τύπου $\Phi_f(\mathbf{r}_f;t)$, ενώ $\partial_m \bullet / \partial_m t$ είναι η μερική παράγωγος ως προς t μεγεθών του τύπου $\Phi_m(\mathbf{r}_m;t)$. Έτσι, όταν εργαζόμαστε κατά συστηματικό και συνεπή τρόπο μόνο με τη μια από τις δύο αναπαραστάσεις του βαθμωτού μεγέθους $\Phi(M;t)$, δεν απαιτείται ειδικός συμβολισμός προκειμένου να διακρίνουμε μεταξύ $\partial_f \bullet / \partial_f t$ και $\partial_m \bullet / \partial_m t$. Χρησιμοποιούμε το συνηθισμένο σύμβολο $\partial \bullet / \partial t$, και εννοούμε πάντοτε την αντίστοιχη μερική παράγωγο.

Στο παρόν υποεδάφιο εισάγουμε και χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\partial_f \bullet / \partial_f t$ και $\partial_m \bullet / \partial_m t$, προκειμένου να υπολογίσουμε τη σχέση μεταξύ των μερικών παραγώγων $\partial_f \Phi_f / \partial_f t$ και $\partial_m \Phi_m / \partial_m t$. Αφετηρία και πάλι θα είναι το αναλλοίωτο του βαθμωτού μεγέθους $\Phi(M;t)$, σχέση (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial_f \Phi_f(\mathbf{r}_f;t)}{\partial_f t} &= \frac{\partial_f}{\partial_f t} \Phi_m(\mathbf{r}_m(\mathbf{r}_f;t);t) = && \text{(chain rule)} \\ &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial \Phi_m(\mathbf{r}_m;t)}{\partial x_\ell^{(m)}} \cdot \frac{\partial_f x_\ell^{(m)}(\mathbf{r}_f;t)}{\partial_f t} + \frac{\partial_m \Phi_m(\mathbf{r}_m;t)}{\partial_m t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Προσοχή! Για την κατανόηση της χρήσης των τριών διαφορετικών συμβόλων μερικής παραγωγίσης στο δεξιά μέλος της (12), δηλαδή των συμβόλων $\partial \bullet / \partial x_\ell^{(m)}$, $\partial_f \bullet / \partial_f t$ και $\partial_m \bullet / \partial_m t$, απαιτείται η πλήρης κατανόηση του ποιού μέγεθος μεταβάλλεται και ποιό κρατείται σταθερό σε κάθε όρο.

Το όλο πρόβλημα έχει πλέον μετατοπισθεί στον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{\partial_f x_\ell^{(m)}(\mathbf{r}_f;t)}{\partial_f t}$. Η

σχέση $\mathbf{r}_m = -\mathbf{R}_f + \mathbf{r}_f$, λαμβάνοντας υπ' όψιν σε ποιό σύστημα αναλύεται το κάθε διάνυσμα, γράφεται ισοδυνάμως

$$\sum_{j=1}^3 x_j^{(m)} \mathbf{e}_j^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^3 (-R_j^{(f)}(t) + x_j^{(f)}) \mathbf{e}_j^{(f)}. \quad (13\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας, εσωτερικά επί $\mathbf{e}_\ell^{(m)}(t)$, παίρνουμε

$$x_\ell^{(m)} \equiv x_\ell^{(m)}(\mathbf{r}_f;t) = \sum_{j=1}^3 (-R_j^{(f)}(t) + x_j^{(f)}) (\mathbf{e}_j^{(f)} \cdot \mathbf{e}_\ell^{(m)}(t)) \quad (13\beta)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο την τελευταία, υπό την προϋπόθεση ότι $x_j^{(f)} = \text{σταθ.}$ και $\mathbf{e}_j^{(f)} = \text{σταθ.}$, βρίσκουμε

$$\frac{\partial_f x_\ell^{(m)}(\mathbf{r}_f;t)}{\partial_f t} = -\frac{\partial_f}{\partial_f t} \left[\sum_{j=1}^3 (-R_j^{(f)}(t) + x_j^{(f)}) (\mathbf{e}_j^{(f)} \cdot \mathbf{e}_\ell^{(m)}(t)) \right] =$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (14) και τον ορισμό $\nabla_m \Phi_m = \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1^{(m)}} \mathbf{e}_1^{(m)} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2^{(m)}} \mathbf{e}_2^{(m)} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_3^{(m)}} \mathbf{e}_3^{(m)}$,

βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της (12), γράφεται στη μορφή

$$\sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial \Phi_m(\mathbf{r}_m; t)}{\partial x_\ell^{(m)}} \cdot \frac{\partial_f x_\ell^{(m)}(\mathbf{r}_f; t)}{\partial_f t} = - [\mathbf{U}_m(t) + (\mathbf{\Omega}_m(t) \times \mathbf{r}_m)] \cdot \nabla_m \Phi_m. \quad (15)$$

Συνδυάζοντας τις (12) και (15), παίρνουμε

$$\frac{\partial_f \Phi_f(\mathbf{r}_f; t)}{\partial_f t} = \frac{\partial_m \Phi_m(\mathbf{r}_m; t)}{\partial_m t} - [\mathbf{U}_m(t) + (\mathbf{\Omega}_m(t) \times \mathbf{r}_m)] \cdot \nabla_m \Phi_m(\mathbf{r}_m; t), \quad (16\alpha)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\frac{\partial_f \Phi_f(\mathbf{r}_f; t)}{\partial_f t} = \left(\frac{\partial_m}{\partial_m t} - [\mathbf{U}_m(t) + (\mathbf{\Omega}_m(t) \times \mathbf{r}_m)] \cdot \nabla_m \right) \Phi_m(\mathbf{r}_m; t). \quad (16\beta)$$

Η τελευταία εκφράζει τη ζητούμενη σχέση μεταξύ των χρονικών παραγώγων των συναρτήσεων $\Phi_f(\mathbf{r}_f; t)$ και $\Phi_m(\mathbf{r}_m; t)$.

Εργαζόμενοι αναλόγως μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial_f^2 \Phi_f(\mathbf{r}_f; t)}{\partial_f t^2} = \left(\frac{\partial_m}{\partial_m t} - [\mathbf{U}_m(t) + (\mathbf{\Omega}_m(t) \times \mathbf{r}_m)] \cdot \nabla_m \right)^2 \Phi_m(\mathbf{r}_m; t), \quad (17)$$

και, γενικώς,

$$\frac{\partial_f^n \Phi_f(\mathbf{r}_f; t)}{\partial_f t^n} = \left(\frac{\partial_m}{\partial_m t} - [\mathbf{U}_m(t) + (\mathbf{\Omega}_m(t) \times \mathbf{r}_m)] \cdot \nabla_m \right)^n \Phi_m(\mathbf{r}_m; t), \quad (18)$$

όπου $n = 2, 3, 4, \dots$.

Άσκηση 1: Να αποδειχθεί η σχέση (16) χρησιμοποιώντας την ανάλυση $\mathbf{r}_f = \mathbf{R}_m + \mathbf{r}_m$, δηλαδή θεωρώντας το διάνυσμα $\mathbf{R} = \overline{O_f O_m}$ αναλυμένο στους στιγμιαίους άξονες του κινούμενου σ.σ..

Άσκηση 2: Να αποδείξετε τις σχέσεις (17) και (18).

3.5 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, σε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων.

I: Παραγωγή των γενικών μη-γραμμικών συνθηκών

Έστω ότι στην εξεταζόμενη περιοχή του θαλασσίου περιβάλλοντος έχει αναπτυχθεί (από διάφορες αιτίες, π.χ. επίδραση ανέμου ή/και ρευμάτων, αλληλεπίδραση με στερεά σύνορα, κλπ) ένα πεδίο ροής $\mathbf{v}(M,t)$, όπου M είναι το γενικό πεδιακό σημείο. Προετοιμαζόμενοι για τη μελέτη των υδροδυναμικών φαινομένων που σχετίζονται με την κίνηση πλοίου δια μέσου απλών αρμονικών κυματισμών, **θα χρησιμοποιήσουμε για την γεωμετρική περιγραφή του πεδίου ροής κινούμενο σύστημα συντεταγμένων** (σ.σ.). Η κίνηση του σ.σ. θα εισαχθεί τώρα αυθαιρέτως, και θα είναι $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, 0, 0, 0, \Omega_3) = (U_1, \Omega_3)$. Αργότερα, όταν θα εστιασθούμε στη μελέτη του προβλήματος του πλοίου, οι ταχύτητες U_1 και Ω_3 θα είναι, αντιστοίχως, η μέση οριζόντια (πρόσω) ταχύτητα του πλοίου και η μέση γωνιακή ταχύτητα στροφής. Η τελευταία είναι διάφορη της μηδενικής μόνον όταν το πλοίο εκτελεί ελιγμούς (στρίβει). Παραδοσιακά, το βασικό πρόβλημα της δυναμικής συμπεριφοράς πλοίου εξετάζεται ως ταλάντωση μικρού πλάτους γύρω από μια μέση θέση η οποία κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή $U_1 = \text{σταθ.}$ και $\Omega_3 = 0$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και η περίπτωση $U_1 = \text{σταθ.}$ και $\Omega_3 = \text{σταθ.}$ (κυκλικός ελιγμός).

Τίθεται λοιπόν το πρόβλημα να διατυπώσουμε και μελετήσουμε (απλοποιήσουμε) τις εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες που διέπουν το υδρομηχανικό μας σύστημα. Οι εξισώσεις/συνθήκες αυτές είναι:

- α) Οι **υδροδυναμικές εξισώσεις**, που διέπουν την κίνηση του υγρού (νερού), και ισχύουν μέσα στο πεδίο ροής $D = D(t)$.
- β) Οι **συνοριακές συνθήκες** (κινηματική και δυναμική), που ικανοποιούνται πάνω **στην ελεύθερη επιφάνεια** του νερού $\partial D_F = \partial D_F(t)$.
- γ) Οι **συνθήκες μη διείσδυσης** του υγρού **στα στερεά σύνορα**.

Όταν η θαλάσσια περιοχή που εξετάζουμε απέχει αρκετά από τις ακτές, το πεδίο ροής θεωρείται (για λόγους απλότητας, εφ' όσον δεν εισάγεται σφάλμα εξ αυτού) **μη-φραγμένο** κατά την οριζόντια έννοια. Τίθεται έτσι το **ερώτημα** της κατάλληλης **έπ' άπειρον συμπεριφοράς του πεδίου**, το οποίο συχνά διατυπώνεται ως «συνθήκη ακτινοβολίας».

Τέλος, προκειμένου να ολοκληρωθεί η μαθηματική διατύπωση του ειδικότερου προβλήματος της δυναμικής συμπεριφορά του πλοίου σε κυματισμούς, απαιτούνται και **οι εξισώσεις κίνησης του πλοίου ως στερεού σώματος με έξι βαθμούς ελευθερίας**. Οι τελευταίες έχουν ήδη παραχθεί και γραμμικοποιηθεί στο Κεφάλαιο 1, και έτσι δεν θα μας απασχολήσουν εδώ. Απλώς θα χρησιμοποιηθούν όταν έρθει η ώρα.

Στο παρόν εδάφιο θα δώσουμε τη μορφή των υδροδυναμικών εξισώσεων και των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας, στην περίπτωση όπου η γεωμετρία του χώρου ορίζεται και περιγράφεται με τη βοήθεια σ.σ. που κινείται με ίδια ταχύτητα $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο σ.σ.: ένα ακίνητο, το οποίο θα συμβολίζεται ως $S_0 = [O_0 x_{10} x_{20} x_{30}]$ και ένα κινούμενο με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$, το οποίο εδώ θα συμβολίζεται απλά ως $S = [O x_1 x_2 x_3]$. Δηλαδή, ο δείκτης $(_0)$ υποδηλώνει το ακίνητο σ.σ., το οποίο στο εδάφιο 3.4 συμβολίζεται με το δείκτη $(_f)$.

Όσον αφορά τις βασικές φυσικές υποθέσεις (παραδοχές) για το υγρό (νερό) και το πεδίο ροής, θα θεωρήσουμε ότι το υγρό είναι **ατριβές** και **ασυμπίεστο**, και το πεδίο ταχύτητας είναι **αστρόβιλο**, χωρίς κυκλοφορία, και παράγεται από ένα **βαθμωτό δυναμικό**. Θα συμβολίσουμε το βαθμωτό δυναμικό ταχύτητας με $\Phi_T(M, t)$ (γενικώς), ή $\Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)$ (όταν χρησιμοποιούμε ακίνητο σ.σ.), ή $\Phi_T(\mathbf{x}, t)$ (όταν χρησιμοποιούμε κινούμενο σ.σ.). Ο δείκτης $(_T)$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει το **ολικό δυναμικό** (Total potential), σε αντιδιαστολή με διάφορα επί μέρους δυναμικά τα οποία θα εισαχθούν και θα χρησιμοποιηθούν αργότερα.

Οι υδροδυναμικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του νερού **όταν χρησιμοποιούμε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων**, έχουν ήδη παραχθεί διεξοδικά στο εδάφιο 3.3: Υπό τη μορφή των εξισώσεων Euler (Θεώρημα της Ορμής), δίδονται από τις εξισώσεις (4) του εδαφίου 3.3. Η εξίσωση συνέχειας στην περίπτωση $\rho = \text{σταθερό}$, που μας ενδιαφέρει εδώ, δίδεται από την εξίσωση (9α) ή (9β) του εδαφίου 3.3. Τέλος, το ολοκλήρωμα Bernoulli δίδεται, για την περίπτωση κινούμενου συστήματος συντεταγμένων, από τη σχέση (15α) ή (15β) του εδαφίου 3.3. Υπό τις προϋποθέσεις που εργαζόμαστε εδώ (**ατριβές, ασυμπίεστο, αστρόβιλο**), ως πεδιακή εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε την (καθαρώς κινηματικού χαρακτήρα) **εξίσωση Laplace για το δυναμικό ταχύτητας**, η οποία ισχύει είτε χρησιμοποιούμε ακίνητο σύστημα σ.σ. είτε χρησιμοποιούμε κινούμενο σ.σ.:

$$\Delta_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t) = 0 = \Delta \Phi_T(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Η παραγωγή των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας και των απλών κυματικών λύσεων **όταν χρησιμοποιούμε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων**, που αποτελεί το κύριο αντικείμενο του παρόντος εδαφίου, μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους:

Είτε

- a) Εργαζόμενοι **απ' ευθείας στο κινούμενο σύστημα**, οπότε –με τη βοήθεια των εννοιών και των εξισώσεων που αναπτύχθηκαν στα εδάφια 3.2 και 3.3– μπορούμε να παράγουμε πρωτογενώς τις συνθήκες και τις λύσεις που αναζητούμε,

Είτε

- b) Εργαζόμενοι **κατ' αρχήν στο ακίνητο σύστημα**, στο οποίο οι συνθήκες και οι λύσεις είναι ήδη γνωστές, **και μετασχηματίζοντας** αυτές –δηλ. τις γνωστές συνθήκες και λύσεις– **στο κινούμενο σύστημα**, με τη βοήθεια των εννοιών και των αποτελεσμάτων που παρήχθησαν στο εδάφιο 3.4.

Και οι δύο γραμμές σκέψης είναι ενδιαφέρουσες και παρουσιάζουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε τη δεύτερη γραμμή δουλειάς, ενθαρρύνοντας παράλληλα τον αναγνώστη να παράγει τα αντίστοιχα (ίδια!) αποτελέσματα με τη βοήθεια της πρώτης. Αυτό θα είναι μια πρώτης τάξεως άσκηση για την πλήρη κατανόηση των υδροδυναμικών εξισώσεων και φυσικής σημασίας των χειρισμών και των λύσεων όταν χρησιμοποιούμε κινούμενα συστήματα συντεταγμένων.

- **Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, όταν χρησιμοποιούμε ακίνητο σύστημα σ.σ.**

Θα υπενθυμίσουμε, κατ' αρχήν, τη μορφή που λαμβάνουν οι οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας **όταν χρησιμοποιούμε το ακίνητο σ.σ.** $S_0 = [O_0 x_{10} x_{20} x_{30}]$. Στην περίπτωση αυτή, η ίδια η ελεύθερη επιφάνεια αναπαρίσταται με τη βοήθεια της συνάρτησης ανύψωσης $\eta_0(x_{10}, x_{20}; t)$, ως εξής:

$$\partial D_F(t) = \{ \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) \in \mathbb{R}^3 : x_{30} = \eta_0(x_{10}, x_{20}; t) \} \quad (2\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \partial D_F(t) = \{ \mathbf{x}_0 = (\mathbf{R}_0, x_{30}) \in \mathbb{R}^3 : x_{30} = \eta_0(\mathbf{R}_0; t) \}. \quad (2\beta)$$

όπου με $\mathbf{R}_0 = (x_{10}, x_{20}, 0)$ συμβολίζουμε το οριζόντιο διάνυσμα $\overline{O_0 M}$ (βλ. Σχήμα 1).

Από φυσική άποψη, η **ελεύθερη επιφάνεια είναι μια υλική επιφάνεια**, δηλαδή, αποτελείται διαρκώς από τα ίδια υλικά στοιχεία. Το γεγονός αυτό αποδίδεται από (ισοδυναμεί με) την **κινηματική συνθήκη** ελεύθερης επιφάνειας, η μαθηματική μορφή της οποίας, όταν χρησιμοποιούμε το ακίνητο σ.σ., είναι, ως γνωστόν, η εξής:

$$\frac{D_0(x_{30} - \eta_0(\mathbf{R}_0; t))}{D_0 t} = 0. \quad (3\alpha)$$

Δεδομένου ότι ο διαφορικός τελεστής $D_0 \bullet / D_0 t$ εκφράζει την **υλική παράγωγο** και δίδεται από τη σχέση $\frac{D_0 \bullet}{D_0 t} = \frac{\partial_0 \bullet}{\partial_0 t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_0 \bullet = \frac{\partial_0 \bullet}{\partial_0 t} + \nabla_0 \Phi_{T0} \cdot \nabla_0 \bullet$, όπου $(v_{10}, v_{20}, v_{30}) = \mathbf{v}$ είναι η πεδιακή ταχύτητα, έχουμε $D_0 x_{30} / D_0 t \equiv \partial_0 \Phi_{T0} / \partial_0 x_{30}$, οπότε η (3α) γίνεται

$$\frac{D_0 \eta_0(\mathbf{R}_0; t)}{D_0 t} = \frac{\partial_0 \Phi_{T0}(\mathbf{R}_0, \eta_0; t)}{\partial_0 x_{30}}. \quad (3\beta)$$

Περαιτέρω, πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να ασκείται μια οποιαδήποτε εξωτερικά επιβεβλημένη (γνωστή ή άγνωστη) πίεση $\overline{p(\mathbf{x}_0, t)}$. Η **δυναμική συνθήκη** ελεύθερης επιφάνειας, αποδίδει αυτό ακριβώς το γεγονός, αξιοποιώντας και το ολοκλήρωμα Bernoulli:

$$\frac{\partial_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial_0 t} + \frac{1}{2} [\nabla_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)]^2 + g \eta_0(\mathbf{R}_0; t) + \frac{\overline{p(\mathbf{x}_0, t)}}{\rho} = C_0, \quad \mathbf{x}_0 \in \partial D_F(t), \quad (4)$$

όπου C_0 είναι μια κατάλληλη σταθερά. Δεδομένου ότι η συνθήκη αυτή ισχύει πάνω σε μια **υλική επιφάνεια**, γράφεται ισοδυνάμως

$$\frac{D_0}{D_0 t} \left(\frac{\partial_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial_0 t} + \frac{1}{2} [\nabla_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)]^2 + g \eta_0(\mathbf{R}_0; t) + \frac{\overline{p(\mathbf{x}_0, t)}}{\rho} \right) = 0,$$

ή

$$\frac{D_0}{D_0 t} \left(\frac{\partial_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial_0 t} + \frac{1}{2} [\nabla_0 \Phi_{T0}(\mathbf{x}_0, t)]^2 + g \eta_0(\mathbf{R}_0; t) \right) = - \frac{D_0}{D_0 t} \left(\frac{\overline{p(\mathbf{x}_0, t)}}{\rho} \right). \quad (5)$$

Η ανωτέρω μορφή της δυναμικής συνθήκης δεν περιέχει τη σταθερά C_0 , πράγμα που ενίοτε διευκολύνει τους χειρισμούς. Στη συνέχεια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση $\bar{p} = \text{σταθερό}$, οπότε το δεξιά μέλος της σχέσεως (5) μηδενίζεται και έχουμε:

$$\frac{D_0}{D_0 t} \left(\frac{\partial_0 \Phi_{T_0}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial_0 t} + \frac{1}{2} [\nabla_0 \Phi_{T_0}(\mathbf{x}_0, t)]^2 + g \eta_0(\mathbf{R}_0; t) \right) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \partial D_F(t), \quad (6)$$

Δυνάμει της εξίσωσης (3β), αντικαθιστούμε στην (6) τον όρο $D_0 \eta_0 / D_0 t$ με $\partial_0 \Phi_{T_0} / \partial_0 x_{30}$, οπότε παίρνουμε

$$\frac{D_0}{D_0 t} \left(\frac{\partial_0 \Phi_{T_0}}{\partial_0 t} \right) + \frac{1}{2} \frac{D_0}{D_0 t} (\nabla_0 \Phi_{T_0})^2 + g \frac{\partial_0 \Phi_{T_0}}{\partial_0 x_{30}} = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \partial D_F(t), \quad (7\alpha)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της υλικής παραγώγου $D_0 \bullet / D_0 t = \partial_0 \bullet / \partial_0 t + \nabla_0 \Phi_{T_0} \cdot \nabla_0 \bullet$, η συνθήκη (7α) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\partial_0^2 \Phi_{T_0}}{\partial_0 t^2} + 2 \nabla_0 \Phi_{T_0} \cdot \nabla_0 \left(\frac{\partial_0 \Phi_{T_0}}{\partial_0 t} \right) + \frac{1}{2} \nabla_0 \Phi_{T_0} \cdot \nabla_0 (\nabla_0 \Phi_{T_0})^2 + g \frac{\partial_0 \Phi_{T_0}}{\partial_0 x_{30}} = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \partial D_F(t) \quad (7\beta)$$

Θα ονομάσουμε τη συνθήκη (7) «**μικτή**» **συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας**, διότι προκύπτει ως συνδυασμός της κινηματικής και της δυναμικής συνθήκης.

Πρέπει εδώ να τονισθεί ότι **οι συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας** (κινηματική και δυναμική) **εμπλέκουν δύο άγνωστα πεδία**. Το πεδίο της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\eta_0(\mathbf{R}_0; t)$ και το πεδίο του ολικού δυναμικού $\Phi_{T_0}(\mathbf{x}_0, t)$. Οποιοσδήποτε δύο ανεξάρτητες από τις συνθήκες (3), (4) και (7), μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως **το βασικό ζεύγος των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας**. Στη συνέχεια θα εργασθούμε με τις μορφές (4) και (7β). Και τούτο διότι η μεν (7β) περιέχει –κατά ρητό τρόπο– μόνο το δυναμικό $\Phi_{T_0}(\mathbf{x}_0, t)$ ⁽¹⁾, ενώ η (4) περιέχει την ίδια την ανύψωση $\eta_0(\mathbf{R}_0; t)$, ελεύθερη από παραγωγίσεις.

- **Σύνοψη των σχέσεων μετασχηματισμού βαθμωτού πεδιακού μέγεθους και των παραγώγων αυτού**

Για τον μετασχηματισμό των συνθηκών (4) και (7β), όταν χρησιμοποιούμε σ.σ. κινούμενο με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$, θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα του εδαφίου 3.4.. Ειδικότερα, εάν $\mathcal{M}(M; t)$ είναι ένα **βαθμωτό πεδιακό μέγεθος**, και $\mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t)$ και $\mathcal{M}(\mathbf{x}; t)$ είναι οι συναρτησιακές αναπαραστάσεις αυτού όταν χρησιμοποιούμε ακίνητο ή κινούμενο σ.σ., αντιστοίχως, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t) = \mathcal{M}(\mathbf{x}; t), \quad (8\alpha)$$

$$\nabla_0 \mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t) = \nabla \mathcal{M}(\mathbf{x}; t), \quad (8\beta)$$

(¹) Χωρίς, εν τούτοις, να είναι ανεξάρτητη από το πεδίο της ανύψωσης $\eta_0(\mathbf{R}_0; t)$, εφ' όσον η ίδια η συνθήκη εφαρμόζεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή στα σημεία $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{R}_0, \eta_0(\mathbf{R}_0; t))$.

$$\frac{D_0}{D_0 t} \mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t) = \frac{D}{Dt} \mathcal{M}(\mathbf{x}; t), \quad (8\gamma)$$

$$\frac{\partial_0}{\partial_0 t} \mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - [\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \nabla \right) \mathcal{M}(\mathbf{x}; t). \quad (8\delta)$$

Και, γενικότερα,

$$\frac{\partial_0^n}{\partial_0 t^n} \mathcal{M}_0(\mathbf{x}_0; t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - [\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \nabla \right)^n \mathcal{M}(\mathbf{x}; t), \quad n=1,2,3,\dots \quad (8\epsilon)$$

Πέραν των ανωτέρων, στη συνθήκη (7β) εμφανίζεται και ο όρος $\partial_0 \Phi_0(x_0; t) / \partial_0 x_{30}$. Εργαζόμενοι ανάλογα, όπως για την παραγωγή της σχέσεως (α) του εδαφίου 3.4, βρίσκουμε

$$\frac{\partial_0 \Phi_0(\mathbf{x}_0; t)}{\partial_0 x_{30}} = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}; t)}{\partial x_\ell} (\mathbf{e}_\ell^{(m)} \cdot \mathbf{e}_3^{(f)}) = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}; t)}{\partial x_\ell} a_{\ell 3}. \quad (9\alpha)$$

Εάν οι κατακόρυφοι άξονες των δύο σ.σ. είναι παράλληλοι, όπως επί παραδείγματι συμβαίνει στην περίπτωση όπου η ταχύτητα του κινούμενου σ.σ. είναι της μορφής $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$, τότε $\mathbf{e}_\ell^{(m)} \cdot \mathbf{e}_3^{(f)} = \delta_{\ell 3}$, και άρα η σχέση (9α) απλουστεύεται στην

$$\frac{\partial_0 \Phi_0(\mathbf{x}_0; t)}{\partial_0 x_{30}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}; t)}{\partial x_3}. \quad (9\beta)$$

- **Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, όταν χρησιμοποιούμε σ.σ. κινούμενο με ίδια κίνηση**

Όταν χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων $S = [O x_1 x_2 x_3]$ το οποίο κινείται με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$, η ελεύθερη επιφάνεια $\partial D_F(t)$ αναπαρίσταται με τη βοήθεια της συνάρτησης ανύψωσης $\eta(x_1, x_2; t)$, ως εξής:

$$\partial D_F(t) = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \eta(x_1, x_2; t) \} \quad (10\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \partial D_F(t) = \{ \mathbf{x} = (\mathbf{R}, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \eta(\mathbf{R}; t) \}. \quad (10\beta)$$

όπου με $\mathbf{R} = (x_1, x_2, 0)$ συμβολίζουμε το οριζόντιο διάνυσμα \overline{OM} (βλ. Σχήμα 1). Το πεδίο ανύψωσης $\eta(x_1, x_2; t)$ είναι προφανώς μια **βαθμωτή πεδιακή αναλλοίωτος**, και άρα ισχύει η σχέση $\eta(\mathbf{R}; t) = \eta_0(\mathbf{R}_0; t)$.

Αξιοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού (8α), (8β) και (8δ), η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (4), στην περίπτωση σ.σ. κινούμενου με ταχύτητα $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$, γράφεται στη μορφή

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - [\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \nabla \right) \Phi_T(\mathbf{x}; t) + \frac{1}{2} [\nabla \Phi_T(\mathbf{x}; t)]^2 + g \eta(\mathbf{R}; t) + \frac{\overline{p(\mathbf{x}; t)}}{\rho} = C, \quad (11)$$

όπου $\mathbf{R} = (x_1, x_2, 0)$ είναι το οριζόντιο διάνυσμα \overline{OM} , $\mathbf{r} = \mathbf{x} = (\mathbf{R}, \eta(\mathbf{R}; t)) \in \partial D_F(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του γενικού υλικού στοιχείου πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και $\Phi_T(\mathbf{x}; t)$, $\overline{p(\mathbf{x}; t)}$ είναι, αντιστοίχως, το ολικό δυναμικό ταχύτητας και η εξωτερικά επιβεβλημένη πίεση, γραμμένα με τη βοήθεια των συντεταγμένων του (κινούμενου) συστήματος $S = [O x_1 x_2 x_3]$. Περαιτέρω, η «μικτή» συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (7β) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - [\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \nabla\right)^2 \Phi_T(\mathbf{x}; t) + 2\nabla\Phi_T \cdot \nabla \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - [\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot \nabla\right) \Phi_T \right] + \frac{1}{2} \nabla\Phi_T \cdot \nabla (\nabla\Phi_T)^2 + g \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial\Phi_T}{\partial x_\ell} a_{\ell 3} = 0 \quad (12)$$

όπου $\Phi_T = \Phi_T(\mathbf{x}; t)$ και $\mathbf{r} = \mathbf{x} = (\mathbf{R}, \eta(\mathbf{R}; t)) \in \partial D_F(t)$, ως ανωτέρω.

Περαιτέρω, εφ' όσον έχουμε υποθέσει ότι η ταχύτητα του κινούμενου σ.σ. είναι της μορφής $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$, έχουμε

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega_3 \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{R} + \eta(\mathbf{R}; t) \mathbf{e}_3) = \Omega_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{R} = \Omega_3 \mathbf{e}_3 \times (R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2) = -\Omega_3 R_2 \mathbf{e}_1 + \Omega_3 R_1 \mathbf{e}_2,$$

εκ της οποίας λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \bullet &= [(U_1 - \Omega_3 R_2) \mathbf{e}_1 + \Omega_3 R_1 \mathbf{e}_2 + 0 \mathbf{e}_3] \cdot \left[\mathbf{e}_1 \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \bullet}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \right] = \\ &= (U_1 - \Omega_3 R_2) \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} + \Omega_3 R_1 \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τη σχέση (13) για να μετασχηματίσει τις συνθήκες (11) και (12) στην ειδική μορφή που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, \Omega_3)$.

Στην ειδικότερη περίπτωση όπου $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}) = (U_1, 0)$, οι *συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας* (11) και (12) παίρνουν τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \Phi_T(\mathbf{x}; t) + \frac{1}{2} [\nabla\Phi_T(\mathbf{x}; t)]^2 + g\eta(\mathbf{R}; t) + \frac{\overline{p(\mathbf{x}; t)}}{\rho} = C, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \Phi_T(\mathbf{x}; t) + 2\nabla\Phi_T \cdot \nabla \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \Phi_T \right] + \\ + \frac{1}{2} \nabla\Phi_T \cdot \nabla (\nabla\Phi_T)^2 + g \frac{\partial\Phi_T}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

όπου $\Phi_T = \Phi_T(\mathbf{x}; t)$ και $\mathbf{x} = (\mathbf{R}, \eta(\mathbf{R}; t)) \in \partial D_F(t)$, ως ανωτέρω.

Οι δύο ανωτέρω συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (14) και (15), όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες μορφές τους (4) και (7β) στο ακίνητο σ.σ., είναι **μη-γραμμικές**, κατά δύο

διαφορετικούς τρόπους. Αφ' ενός περιέχουν τετραγωνικούς και κυβικούς όρους (*ρητή μη-γραμμικότητα*), αφ' ετέρου περιέχουν το πεδίο του δυναμικού ταχύτητας πάνω στην άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια:

$$\Phi_T(\mathbf{x}; t) = \Phi_T(\mathbf{R}, \eta(\mathbf{R}; t); t),$$

δηλαδή έχουμε και μια μη-γραμμικότητα υπό τη μορφή *πεπλεγμένης συναρτησιακής εξάρτησης*.

Η μη-γραμμικότητα και ο πεπλεγμένος χαρακτήρας των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας (14) και (15), καθιστά την επίλυση των σχετικών προβλημάτων συνοριακών τιμών εξαιρετικά δυσχερή. Αν και σήμερα είναι εφικτή η αριθμητική επίλυση των προβλημάτων αυτών, θα προχωρήσουμε με τον πιο παραδοσιακό τρόπο, δηλαδή την απλούστευση των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας μέσω κατάλληλων γραμμικοποιήσεων. Ο τρόπος αυτός, αφ' ενός μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ορισμένες απλές ειδικές λύσεις και να κατανοήσουμε καλύτερα τους φυσικούς χαρακτήρες των προβλημάτων που θέλουμε να επιλύσουμε και, αφ' ετέρου, διευκολύνει σημαντικά την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων αυτών. Βέβαια, η γραμμικοποίηση βασίζεται στην υπόθεση διαταραχών (κινήσεων και ταχυτήτων) μικρού πλάτους γύρω από μια ευσταθή κατάσταση του εξεταζόμενου συστήματος, πράγμα το οποίο περιορίζει –σε κάποιο βαθμό– την εφαρμοσιμότητα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων.

3.6 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, σε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων.

II: Γραμμικοποίηση και απλές κυματικές λύσεις

Προκειμένου να επιτύχουμε την απλούστευση των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας, θα προχωρήσουμε τώρα σε (διάφορες) κατάλληλες γραμμικοποιήσεις. Αν και η τεχνική της γραμμικοποίησης που θα ακολουθήσουμε σε όλες τις περιπτώσεις είναι λίγο-πολύ η ίδια (ανάπτυξη του άγνωστου δυναμικού ταχύτητας κατά Taylor γύρω από τη στάθμη ηρεμίας $x_3 = 0$), το σημείο αφετηρίας, δηλαδή, *οι αρχικές μορφές των άγνωστων πεδίων της ανύψωσης και του δυναμικού*, οι οποίες αντανakλούν τη φυσική τοποθέτηση του εκάστοτε εξεταζόμενου προβλήματος, *θα διαφέρουν κατά περίπτωση*.

- Πρώτη γραμμικοποίηση: Μη-μόνιμη κυματική διαταραχή μικρού πλάτους.

Απλός αρμονικός κυματισμός σε κινούμενο σ.σ.

Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η ανύψωση $\eta(\mathbf{R}; t)$, η ταχύτητα $\nabla\Phi_T(\mathbf{x}; t)$ και οι χρονικοί ρυθμοί μεταβολής $\partial\Phi_T(\mathbf{x}; t)/\partial t$, $\partial\nabla\Phi_T(\mathbf{x}; t)/\partial t$ και $\partial\eta(\mathbf{R}; t)/\partial t$ είναι όλα «μικρές» ποσότητες, των οποίων τα τετράγωνα και οι ανώτερες δυνάμεις είναι αμελητέα σε σχέση με τους πρωτοβάθμιους (γραμμικούς) όρους. Τότε έχουμε

$$\Phi_T(\mathbf{x}|_{\mathbf{x} \in \partial D_f}; t) = \Phi_T(\mathbf{R}, \eta(\mathbf{R}; t); t) = \Phi_T(\mathbf{R}, 0; t) + \eta(\mathbf{R}; t) \frac{\partial\Phi_T(\mathbf{R}, 0; t)}{\partial x_3} + \eta^2(\mathbf{R}; t) \frac{\partial^2\Phi_T(\mathbf{R}, 0; t)}{\partial x_3^2} + \dots \quad (1)$$

και οι συνθήκες (14) και (15) του προηγούμενου εδαφίου γραμμικοποιούνται ως εξής:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Phi_T(\mathbf{R}, 0; t) + g\eta(\mathbf{R}; t) + \frac{\overline{p(\mathbf{x}; t)}}{\rho} = C \quad (2\alpha)$$

ή, υποθέτοντας ότι $\overline{p(\mathbf{x}; t)} = \overline{p_0} = \text{σταθερά}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Phi_T(\mathbf{R}, 0; t) + g\eta(\mathbf{R}; t) = 0, \quad (2\beta)$$

και

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi_T(\mathbf{R}, 0; t) + g \frac{\partial\Phi_T(\mathbf{R}, 0; t)}{\partial x_3} = 0, \quad (3\alpha)$$

αντιστοίχως. Είμαστε πλέον σε θέση, με τη βοήθεια των γραμμικοποιημένων συνθηκών (2β) και (3α), να προχωρήσουμε σε ορισμένες απλές λύσεις. Ο πρώτος μας στόχος είναι να προσδιορίσουμε το πεδίο ενός *απλού αρμονικού κυματισμού*, όπως αυτό «φαίνεται» στο κινούμενο σύστημα $(U_1, 0)$. Στην περίπτωση νερού σταθερού βάθους h , το *γραμμικοποιημένο πρόβλημα οριακών τιμών* έχει ως εξής:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi(\mathbf{R}, 0; t) + g \frac{\partial\Phi(\mathbf{R}, 0; t)}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2, \quad (3\alpha)$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}; t) = 0, \quad \mathbf{x} \in D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -h < x_3 < 0\}, \quad (3\beta)$$

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{R}, -h; t)}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2 \quad (3\gamma)$$

και

$$\eta(\mathbf{R}; t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Phi(\mathbf{R}, 0; t), \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2. \quad (3\delta)$$

Δεδομένου ότι αναζητούμε λύση της μορφής απλού αρμονικού κυματισμού, εισάγουμε τη χρονικά αρμονική εξάρτηση, γράφοντας το ζητούμενο δυναμικό και την αντίστοιχη ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας στη μορφή

$$\Phi(\mathbf{x}; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}; \omega) e^{j\omega t} \right\}, \quad \eta(\mathbf{R}; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{R}; \omega) e^{j\omega t} \right\}. \quad (4)$$

Παραλείποντας τη ρητή αναφορά στην ω -εξάρτηση των πεδίων $\overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}; \omega)$ και $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{R}; \omega)$, το πρόβλημα (3) γράφεται πλέον ως εξής:

$$\left(j\omega - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0) + g \frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0)}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2, \quad (5\alpha)$$

$$\Delta \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (5\beta)$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, -h)}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2, \quad (5\gamma)$$

και

$$\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{g} \left(j\omega - U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0), \quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^2. \quad (5\delta)$$

Έχοντας ως στόχο τον προσδιορισμό λύσης του προβλήματος (5), η οποία να προσομοιώνει έναν απλό αρμονικό κυματισμό, εισάγουμε το χωρισμό μεταβλητών

$$\overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(x_1, x_2) \cdot Z(x_3). \quad (6)$$

Τότε η εξίσωση Laplace $\Delta \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}) = 0$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\Delta_2 \mathcal{H}(x_1, x_2)}{\mathcal{H}(x_1, x_2)} + \frac{Z''(x_3)}{Z(x_3)} = 0,$$

εκ της οποίας συνάγεται (με τη βοήθεια του θεμελιώδους επιχειρήματος της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών), ότι

$$\frac{\Delta_2 \mathcal{H}(x_1, x_2)}{\mathcal{H}(x_1, x_2)} = -\frac{Z''(x_3)}{Z(x_3)} = -k^2, \quad (7)$$

όπου k^2 είναι θετικός πραγματικός αριθμός. (Να σχολιάσετε την επιλογή του προσήμου στο τελευταίο μέλος της εξίσωσης (7). Είναι ή δεν είναι αποδεκτή άλλη επιλογή προσήμου και γιατί; Είναι αποδεκτή ή επιλογή $k^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;) Σημειώνεται ότι ο τελεστής $\Delta_2 \cdot$ που

εμφανίζεται στις ανωτέρω εξισώσεις είναι ο τελεστής Laplace ως προς τις δύο οριζόντιες μεταβλητές x_1, x_2 .

Από την εξίσωση (7), ανωτέρω, βρίσκουμε

$$Z''(x_3) - k^2 Z(x_3) = 0, \quad -h < x_3 < 0. \quad (8)$$

Η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$Z(x_3) = \tilde{A} \cosh[k(x_3 + h)] + \tilde{B} \sinh[k(x_3 + h)]. \quad (9)$$

Λόγω της συνθήκης πυθμένα $\partial \Phi(\mathbf{R}, -h) / \partial x_3 = 0 = \mathcal{H}(x_1, x_2) Z'(-h)$, είμαστε αναγκασμένοι να επιβάλουμε στη συνάρτηση $Z(x_3)$ την οριακή συνθήκη $Z'(-h) = 0$. Παραγωγίζοντας την (9) βλέπουμε αμέσως ότι $Z'(-h) = 0 \Leftrightarrow \tilde{B}k = 0$, και άρα (εφ' όσον $k > 0$) $\tilde{B} = 0$. Οδηγούμεθα, λοιπόν, στην ακόλουθη μορφή για την κατακόρυφη δομή του ζητούμενου κυματικού πεδίου:

$$Z(x_3) = \tilde{A} \cosh[k(x_3 + h)]. \quad (10)$$

Συνήθως η ανωτέρω έκφραση για την κατακόρυφη συνάρτηση $Z(x_3)$ κανονικοποιείται, έτσι ώστε $Z(0) = A = \text{σταθερά ανεξάρτητη του βάθους}$. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα αντικαθιστώντας τη σταθερά \tilde{A} από την έκφραση $A / \cosh(kh)$, οπότε η (10) γίνεται

$$Z(x_3) = \tilde{A} \frac{\cosh[k(x_3 + h)]}{\cosh(kh)}. \quad k > 0, \quad -h < x_3 \leq 0. \quad (11\alpha)$$

Σχόλιο: Στην περίπτωση απείρου βάθους ($h = \infty$), η αντίστοιχη κατακόρυφη δομή του πεδίου είναι

$$Z(x_3) = A e^{kx_3}, \quad k > 0, \quad -\infty < x_3 \leq 0. \quad \blacksquare \quad (11\beta)$$

Άσκηση: Να αποδείξετε τη σχέση (11β) με δύο τρόπους: i) Ως όριο της (11α) για $h \rightarrow \infty$, και ii) Επιλύοντας την (8) με $h = \infty$.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την οριζόντια εξίσωση

$$\Delta_2 \mathcal{H}(x_1, x_2) + k^2 \mathcal{H}(x_1, x_2) = 0, \quad (12)$$

(εξίσωση Helmholtz στις δύο διαστάσεις), η οποία προκύπτει επίσης από τη σχέση χωρισμού μεταβλητών (7).

Δεδομένου ότι αναζητούμε λύση της μορφής απλού αρμονικού κυματισμού, και άρα **η χωρική εξάρτηση κατά την οριζόντια έννοια αναμένεται αρμονική**, στο σημείο αυτό θα περιορίσουμε την αναζήτησή μας σε (πιθανές) λύσεις της μορφής

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = e^{-j(a_1 x_1 + a_2 x_2 + b)} \equiv e^{-j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} + b)}, \quad (13)$$

όπου $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$ και b είναι σταθερές που πρέπει να προσδιορισθούν. Εισάγοντας τη μορφή (13) στη διαφορική εξίσωση Helmholtz (12), βρίσκουμε

$$(-a_1^2 - a_2^2 + k^2)e^{-j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} + b)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (14)$$

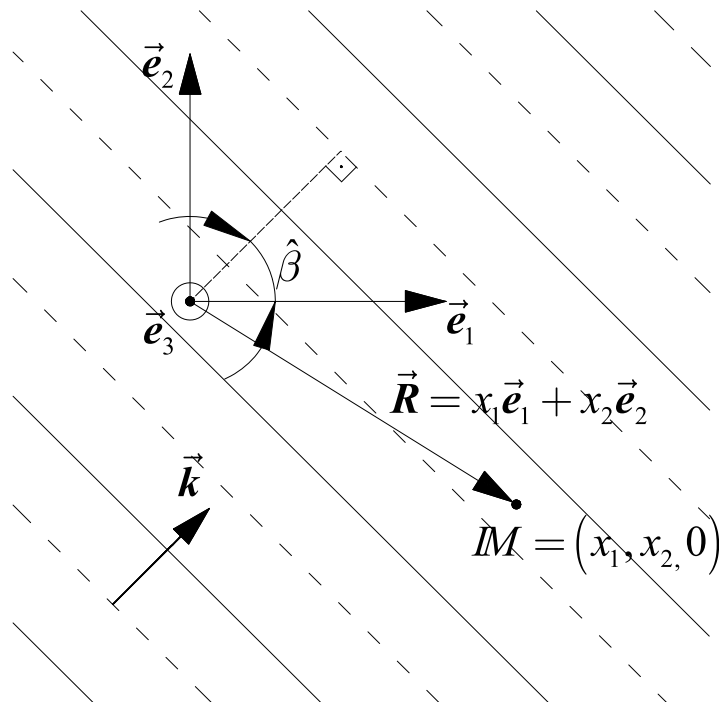
Η μέχρις εδώ διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (5), μας έχει οδηγήσει –χωρίς ακόμα να έχει χρησιμοποιηθεί η συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας– σε ένα δυναμικό ταχύτητας της μορφής:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}) = AZ(x_3)e^{-j(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} + b)}, \quad \text{με} \quad Z(x_3) = \begin{cases} A \frac{\cosh[k(x_3 + h)]}{\cosh(kh)}, & -h < x_3 \leq 0 \\ Ae^{kx_3}, & -\infty < x_3 \leq -h \end{cases} \quad (15)$$

όπου A είναι αυθαίρετη σταθερά (ανάλογη με το πλάτος της κυματικής διαταραχής), k είναι θετικός αριθμός ($k > 0$), a_1, a_2 είναι πραγματικές σταθερές, τέτοιες ώστε $k^2 = a_1^2 + a_2^2$ και, τέλος, b είναι αυθαίρετη σταθερά, η οποία όμως στη συνέχεια θα παραλείπεται, εφ' όσον η συμβολή της απορροφάται από τον όρο του πλάτους A .

Ερχόμαστε τώρα να εξετάσουμε κάτω από ποιές προϋποθέσεις το πεδίο δυναμικού (15) ικανοποιεί και τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (5a). Δεδομένου ότι ισχύει η σχέση

$$Z'(0) = \begin{cases} Ak \tanh(kh), & h \text{ πεπερασμένο} \\ Ak, & h = \infty \end{cases},$$



Σχήμα 1

έχουμε

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0)}{\partial x_3} = \mathcal{H}(x_1, x_2) \cdot Z'(0) = e^{-j\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}} \cdot Ak \begin{cases} \tanh(kh), & h < \infty \\ 1, & h = \infty \end{cases}.$$

Περαιτέρω, με απ' ευθείας διαφόριση βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0)}{\partial x_1} = A(-ja_1)e^{-j\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{R}, 0)}{\partial x_1^2} = A(-ja_1)^2 e^{-j\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}}.$$

Εισάγοντας τις ανωτέρω σχέσεις στην οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (5α), βρίσκουμε

$$A \left(-\omega^2 - a_1^2 U_1^2 - 2\omega a_1 U_1 + gk \begin{cases} \tanh(kh) \\ 1 \end{cases} \right) e^{-j\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}} = 0,$$

ή, ισοδυνάμως,

$$-(\omega + a_1 U_1)^2 + gk \begin{cases} \tanh(kh) \\ 1 \end{cases} = 0. \quad (16)$$

Η ανωτέρω σχέση –η οποία εξασφαλίζει ότι η κυματομορφή (15) ικανοποιεί και τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (5α)– αναφέρεται ως **σχέση διασποράς**.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι $k^2 = a_1^2 + a_2^2$, και άρα το διάνυσμα \mathbf{a} έχει μέτρο (μήκος) $|\mathbf{a}| = k$. Επί πλέον, από τα βασικά της αναλυτικής γεωμετρίας γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$ είναι κάθετο στην οικογένεια των παραλλήλων ευθειών $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c = \text{σταθ.}$. Η παρατήρηση αυτή εξηγεί ότι (φαινόμενη) η καθετότητα του \mathbf{a} με τις γραμμές των κορυφών και των κοιλάδων του κύματος που δείχνεται στο Σχήμα 1, δεν είναι τυχαία! Το διάνυσμα $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$, το οποίο εμφανίζεται στη λύση (15), **είναι πράγματι κάθετο** με τις γραμμές των κορυφών και των κοιλάδων του κύματος.

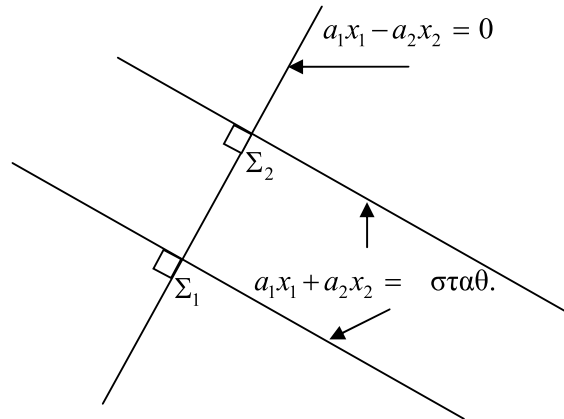
Περαιτέρω, επιθυμούμε να συνδέσουμε τις σταθερές που εμφανίζονται στη λύση (15) με ένα σημαντικό γεωμετρικό χαρακτηριστικό του κυματικού πεδίου: το **μήκος κύματος** λ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το μήκος κύματος ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών (κατά την κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος), σε συνδυασμό με την αρμονική εξάρτηση της κυματικής διαταραχής από τις οριζόντιες μεταβλητές (εξάρτηση του τύπου $\exp[-j(a_1 x_1 + a_2 x_2)]$), συμπεραίνουμε ότι το μήκος κύματος λ ισούται με την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών

$$(\varepsilon): \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = c,$$

και

$$(\varepsilon'): \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = c + 2\pi.$$

Για να βρούμε την απόσταση αυτή θεωρούμε μια (οποιαδήποτε) ευθεία κάθετη στις (ε) και (ε') , π.χ. την $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$, και βρίσκουμε τα σημεία τομής της, Σ_1 και Σ_2 , με τις δύο ανωτέρω ευθείες. Οι συντεταγμένες των σημείων Σ_1 και Σ_2 δίδονται από τις εκφράσεις



$$\Sigma_1 = \left(\frac{a_1 c}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_2 c}{a_1^2 + a_2^2} \right), \quad \Sigma_2 = \left(\frac{a_1 (c + 2\pi)}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_2 (c + 2\pi)}{a_1^2 + a_2^2} \right),$$

και άρα

$$\lambda = d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \frac{\sqrt{(2\pi a_1)^2 + (2\pi a_2)^2}}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)^2 + (a_1^2 + a_2^2)^2}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{2\pi}{k}. \quad (17)$$

Βρίσκουμε, δηλαδή, και πάλι τη γνωστή⁽¹⁾ σχέση που συνδέει τον κυματαριθμό k με το μήκος κύματος λ , ($k \cdot \lambda = 2\pi$), παρά τη διαφορετική αφετηρία που έχουμε εν προκειμένω, εφ' όσον μελετάμε το πρόβλημα με τη βοήθεια σ.σ. κινούμενου με (σταθερή) ταχύτητα U_1 .

Περαιτέρω, η σχέση $|\mathbf{a}| = k$, μας οδηγεί στο να αλλάξουμε συμβολισμό, μετονομάζοντας το διάνυσμα $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$ σε $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται ο **διανυσματικός κυματικός αριθμός** \mathbf{k} ως το διάνυσμα που έχει

- i) **Διεύθυνση** κάθετη προς το μέτωπο του κύματος,
- ii) **Φορά** αυτήν της κυματικής διάδοσης,
- iii) **Μέτρο** $|\mathbf{k}| = k$ ίσο προς $2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος.

Κατόπιν των ανωτέρω, η σχέση διασποράς (16) γράφεται στη μορφή

$$-(\omega + k_1 U_1)^2 + gk \left\{ \frac{\tanh(kh)}{1} \right\} = 0,$$

ή, ισοδυνάμως

$$-(\omega + k U_1 \cos \beta)^2 + gk \left\{ \frac{\tanh(kh)}{1} \right\} = 0, \quad (18)$$

⁽¹⁾ Η σχέση αυτή έχει ευρεθεί και πάλι στο εδάφιο 2.6, με χρήση ακίνητου συστήματος συντεταγμένων.

όπου $\beta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{U})$, είναι η γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης διάδοσης του κύματος και της κατεύθυνσης κίνησης του συστήματος συντεταγμένων.

Σχόλιο: Υπενθυμίζουμε ότι, όταν χρησιμοποιούμε ακίνητο σύστημα συντεταγμένων, η σχέση διασποράς απλού αρμονικού κυματισμού (ελεύθερης επιφάνειας), μήκους κύματος λ , είναι

$$-\omega_0^2 + gk \left\{ \frac{\tanh(kh)}{1} \right\} = 0. \quad (19)$$

(Βλ. π.χ., Κεφάλαιο 2, εδάφιο 2.6). Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις διασποράς (18) και (19), συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_0 = \omega + kU_1 \cos \beta. \quad (20)$$

Δηλαδή, η κυκλική συχνότητα του κυματισμού μεταβάλλεται όταν το σ.σ. κινείται. Αυτό είναι ένα απλό φυσικό γεγονός, που οφείλεται στο ότι ο αριθμός των κορυφών κύματος ανά μονάδα χρόνου που διέρχονται από μια θέση $M = (x_1, x_2, 0)$, σταθερή στο κινούμενο σ.σ., είναι διαφορετικός από τον αριθμό των κορυφών κύματος ανά μονάδα χρόνου που διέρχονται από μια θέση $M_0 = (x_{10}, x_{20}, 0)$, σταθερή στο κινούμενο σ.σ.. Με άλλα λόγια, η συχνότητα αυτή είναι η συχνότητα που αισθάνεται (μετράει) ένας παρατηρητής που στέκεται «ακίνητος» σε μια «σταθερή» θέση $M = (x_1, x_2, 0)$ ως προς το κινούμενο σ.σ.. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται σε κάθε περίπτωση κυματικής διάδοσης, και είναι γνωστό ως **φαινόμενο Doppler**.

Άσκηση: Να αποδείξετε τη σχέση (20) (*φαινόμενο Doppler*) αρχίζοντας από τη μορφή της κυματομορφής που παίρνουμε όταν χρησιμοποιούμε το ακίνητο σ.σ., και χρησιμοποιώντας τη σχέση αλλαγής μεταβλητών μεταξύ των δύο συστημάτων (του ακίνητου και του κινούμενου).

Άσκηση: Να αποδείξετε τη σχέση (20) με φυσικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας τον ορισμό

$$\text{συχνότητα κύματος} \equiv f = \frac{\text{Αριθμός κορυφών που διέρχονται από το σταθερό σημείο } M \text{ στο χρονικό διάστημα } [t_1, t_2]}{t_2 - t_1}.$$

Υπενθυμίζεται ότι η συχνότητα f και η κυκλική συχνότητα ω συνδέονται με τη σχέση $\omega = 2\pi f$.

- Δεύτερη γραμμικοποίηση: *Μόνιμο πεδίο και μη-μόνιμη κυματική διαταραχή μικρού πλάτους γύρω από αυτό*

Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η ανύψωση $\eta_T(\mathbf{R}; t)$ και το δυναμικό ταχύτητας $\Phi_T(\mathbf{x}; t)$ έχουν τη μορφή

$$\eta_T(\mathbf{R}; t) = \bar{\eta}(\mathbf{R}) + \eta(\mathbf{R}; t), \quad (1\alpha)$$

και

$$\Phi_T(\mathbf{x}; t) = \bar{\Phi}(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x}; t), \quad (1\beta)$$

όπου $\bar{\eta}(\mathbf{R})$ και $\bar{\Phi}(\mathbf{x})$ είναι μόνιμα πεδία στο σ.σ. που κινείται με ταχύτητα $(U_1, 0)$. Θα υποθέσουμε, προς το παρόν, ότι τα μόνιμα πεδία $\bar{\eta}(\mathbf{R})$ και $\bar{\Phi}(\mathbf{x})$ είναι γνωστά, ενώ **τα μη-μόνιμα πεδία** $\eta(\mathbf{R}; t)$ και $\Phi(\mathbf{x}; t)$, και οι παράγωγοι αυτών είναι «μικρά», έτσι ώστε τα τετράγωνα και οι ανώτερες δυνάμεις αυτών να είναι αμελητέα σε σχέση με τους πρωτοβάθμιους (γραμμικούς) όρους. Τότε, αναπτύσσοντας το συνολικό πεδίο κατά Taylor γύρω από την (υποτιθέμενη γνωστή) μόνιμη ανύψωση $\bar{\eta}(\mathbf{R})$, έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_T(\mathbf{x}|_{\mathbf{x} \in \partial D_F}; t) &= \Phi_T(\mathbf{R}, \eta_T(\mathbf{R}; t); t) = \Phi_T(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R}); t) + \eta(\mathbf{R}; t) \frac{\partial \Phi_T(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R}); t)}{\partial x_3} + \dots \\ &= \bar{\Phi}(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R})) + \Phi(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R}); t) + \\ &\quad + \eta(\mathbf{R}; t) \left(\frac{\partial \bar{\Phi}(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R}))}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{R}, \bar{\eta}(\mathbf{R}); t)}{\partial x_3} \right) + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων (1) και (2), οι μη-γραμμικές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, εξισώσεις (14) και (15) του εδαφίου 3.5, γραμμικοποιούνται ως εξής:

3.7 Θεμελιώδης λύση του γραμμικοποιημένου (U, ω) -προβλήματος

- Γενικά. Διατύπωση του προβλήματος

Η θεμελιώδης λύση (συνάρτηση Green) του γραμμικοποιημένου (U, ω) -προβλήματος αντιστοιχεί στο πεδίο που παράγει μια σημειακή πηγή (ή σημειακή ιδιομορφία, point source or point singularity) κινούμενη παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα U , με ένταση που πάλλεται με κυκλική συχνότητα ω . Το πρόβλημα θα διατυπωθεί και θα λυθεί με τη βοήθεια συστήματος συντεταγμένων που κινείται με σταθερή ταχύτητα U (=με την ταχύτητα της σημειακής ιδιομορφίας). Ιστορικά και βιβλιογραφικά σχόλια για το παρόν και άλλα συναφή προβλήματα παρουσιάζονται στην υποσημείωση (¹)

Η ανάπτυξη θα γίνει για νερό άπειρου βάθους, αλλά μπορεί να γενικευθεί κατά ανάλογο τρόπο και στην περίπτωση πεπερασμένου (σταθερού) βάθους νερού (βλ., π.χ., Wehausen & Laitone, 1960, εδάφιο 13).

Έστω $\mathbf{p} = (\xi, \eta, \zeta)$ η θέση της σημειακής ιδιομορφίας (σταθερή ως προς το χρησιμοποιούμενο σύστημα), και $\mathbf{r} = (x, y, z)$ το γενικό πεδιακό σημείο, το οποίο διατρέχει τον ημίχωρο

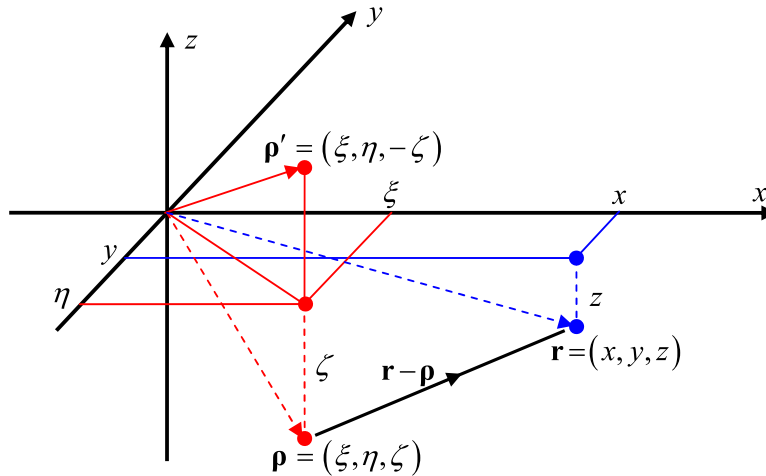
$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z \in (-\infty, 0]\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-.$$

Βλ. και Σχήμα 1. Συμβολίζουμε με $G(\mathbf{r} | \mathbf{p}, t; U, \omega)$ το κυματικό πεδίο (δυναμικό ταχύτητας) της θεμελιώδους λύσης. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε κατά κανόνα απλούστερους συμβολισμούς, π.χ., $G(\mathbf{r} | \mathbf{p}, t)$, παραλείποντας τα ορίσματα που υποδηλώνουν την παραμετρική εξάρτηση από την ταχύτητα U και την κυκλική συχνότητα ω . Δεδομένου ότι μέσα στο πεδίο ροής το δυναμικό ταχύτητας ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, και ότι στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{p}$ υπάρχει σημειακή ιδιομορφία (πηγή), η θεμελιώδης λύση $G(\mathbf{r} | \mathbf{p}, t)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} | \mathbf{p}, t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(\mathbf{r} | \mathbf{p}, t) = -4\pi a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{p}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-. \quad (1)$$

(¹) **Ιστορικό:** Τα πρώτα αποτελέσματα για το κυματικό πεδίο σημειακής πηγής (σταθερής έντασης) που κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω ή κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού [το $(U, 0)$ -πρόβλημα με την δική μας ορολογία], οφείλονται στους Άγγλους φυσικούς Kelvin (1906) και Havelock (1908, 1927). Στη δεκαετία του 30, σημαντικές συμβολές προέκυψαν από τους Ρώσους Μαθηματικούς Keldysh & Lavrentiev (1937), Kochin (1937), Sretenskii (1938). Στο τέλος της δεκαετίας του 1940, ο Ρώσος Haskind (1946) και ο Γάλλος Brard (1948), παρήγαγαν αναλυτική λύση (υπό τη μορφή γενικευμένων ολοκληρωμάτων) για το κυματικό πεδίο σημειακής πηγής μεταβλητής έντασης $a(t)$ η οποία κινείται σε γενική τροχιά $\mathbf{q}(t)$, κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια. Βλ. σχετικά Wehausen & Laitone (1960, εδάφιο 13), όπου δίδονται και ακριβείς παραπομπές για τις ανωτέρω αναφερόμενες εργασίες, και Stoker (1957).

Τα τελευταία χρόνια έχει δημοσιευθεί ένας μεγάλος αριθμός σχετικών εργασιών σε ναυπηγικά και μαθηματικά περιοδικά, με έμφαση στον αξιόπιστο και γρήγορο αριθμητικό υπολογισμό του κυματικού πεδίου της $(U, 0)$ και της (U, ω) πηγής. Εξ αυτών αναφέρουμε ιδιαιτέρως τις εργασίες των Noblesse (1977), Inglis & Price (1980), Wu & Eatok Taylor (1987), Newman (1987), καθώς και τη Διδακτορική Διατριβή του Ian Roger Hoff (1990, Norwegian University of Technology, NTNU, Trondheim).



Σχήμα 1: Γεωμετρία του πεδίου της σημειακής πηγής. Πεδιακό σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$, θέση πηγής $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, θέση κατοπτρικής πηγής $\boldsymbol{\rho}' = (\xi, \eta, -\zeta)$.

Η παραμετρική εξάρτηση της $G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t)$ από την κυκλική συχνότητα ω εισάγεται θέτοντας $a(t) = \cos(\omega t) = \text{Re}\{\exp(j\omega t)\}$ (παλλόμενη ένταση πηγής). Αναπαριστώντας την $G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t)$ με τη βοήθεια του παραστατικού μιγάδα (μιγαδικού πλάτους) $\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = \overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}; U, \omega)$, γράφουμε:

$$G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t) = \text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})e^{j\omega t}\right\} \equiv \text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}; U, \omega)e^{j\omega t}\right\}. \quad (2\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})e^{-j\omega t}\right\}$, όπου $\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ ο μιγαδικός συζυγής της $\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$, θα προχωρήσουμε παρακάτω στη κατασκευή της συναρτήσεως $\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}; U, \omega)$, που αποδίδει το ίδιο αποτέλεσμα όπως η Εξ(2α) ως ακολούθως

$$G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t) = \text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})e^{-j\omega t}\right\} \equiv \text{Re}\left\{\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}; U, \omega)e^{-j\omega t}\right\}, \quad (2\beta)$$

και η οποία είναι πιο βολική στην φυσική διερεύνηση και κατανόηση των αποτελεσμάτων, ιδιαίτερα σε ότι αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης σε μακρινές αποστάσεις από τη πηγή.

Εισάγοντας την αναπαράσταση (2) στην πεδιακή εξίσωση (1), ανωτέρω, και στη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (3α) του εδαφίου 3.6, βλέπουμε αμέσως ότι η συνάρτηση πλάτους $\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$, θα πρέπει να ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\nabla^2 \overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = -4\pi \delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-, \quad (3\alpha)$$

$$\left(j\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \overset{\circ}{G}^*(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho}) + g \frac{\partial \overset{\circ}{G}^*(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho})}{\partial z} = 0, \quad \text{και} \quad \mathbf{R} = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad (3\beta)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη έκφραση του τελεστή $\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)$ στο πεδίο της συχνότητας

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) = - \left(j\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα (3α,β) επιδέχεται πολλές (απείρου πλήθους) λύσεις, οι οποίες διαφέρουν –εκτός των άλλων– και ως προς την «επ’ άπειρον» συμπεριφορά, δηλαδή τη συμπεριφορά όταν $|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}| \rightarrow \infty$. Προσεκτική μαθηματική διερεύνηση του συνόλου των λύσεων του προβλήματος (3α,β) καταδεικνύει ότι υπάρχει μία μοναδική λύση με την ακόλουθη επ’ άπειρον συμπεριφορά του πεδίου $G^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t)$:

Μακριά από το σημείο ιδιομορφίας $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, δηλαδή όταν $|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}| \rightarrow \infty$, με $\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-$, το πεδίο $G^(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}, t)$ που παράγεται από τη συνάρτηση $\overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ μέσω της σχέσης (2α), αντιστοιχεί σε σύστημα κυματισμών απομακρυνόμενων από την πηγή (συνθήκη ακτινοβολίας), και, επί πλέον, το πεδίο ταχύτητας*

$$\nabla \overset{\circ}{G}^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \text{ παραμένει φραγμένο.} \quad (3\gamma)$$

Οι συνθήκες (3α,β,γ) από κοινού, ορίζουν το πρόβλημα της (U, ω) -συνάρτησης Green (translating and pulsating free-surface Green function).

Σχόλιο: Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης διαθέτει κάποια εξοικείωση με τη γενικευμένη συνάρτηση Dirac $\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})$ που εμφανίζεται σε δεξί μέλος των εξισώσεων (1) και (3α). Η «συνάρτηση» αυτή έχει την ιδιότητα

$$\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 0, & \text{για } \mathbf{r} \neq \boldsymbol{\rho}, \\ \infty, & \text{για } \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}, \end{cases} \quad (4\alpha)$$

(η οποία, βέβαια, δεν είναι ιδιαιτέρως διαφωτιστική!). Κατ’ ουσίαν, η συνάρτηση $\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})$, αποκτά έννοια μέσα από τη «δράση» της πάνω σε συνεχείς συναρτήσεις $f(\mathbf{r})$:

$$\int_D \delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(\boldsymbol{\rho}), \quad (4\beta)$$

όπου D είναι (οποιοδήποτε) χωρίο του \mathbb{R}^3 που περιέχει το σημείο $\boldsymbol{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$ στο εσωτερικό του. Η σχέση (4β) προσδίδει στη «συνάρτηση» $\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho})$ το χαρακτήρα μιας απεικόνισης (συναρτησιακού), η οποία σε κάθε συνάρτηση $f(\cdot)|_D$ ⁽²⁾, αντιστοιχίζει τη συγκεκριμένη τιμή $f(\boldsymbol{\rho})$, όπου $\boldsymbol{\rho}$ είναι δεδομένο σημείο του D . Αυτό ακριβώς είναι και το μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο η συνάρτηση $\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho})$, καθώς και πολλές «παρόμοιες» γενικευμένες συναρτήσεις, ορίζονται με σαφήνεια και «νομιμοποιούνται» ως μαθηματικά αντικείμενα, με σαφείς ιδιότητες, λογισμό, έννοιες σύγκλισης και μετασχηματισμών κττ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία των Lighthill (1960) ή Hoskins (1979), για μια παύει εισαγωγή στις γενικευμένες συναρτήσεις (generalized functions), ή στο πεντάτομο έργο των Gelfand & Shilov et al. (Vol. 1, 2, 3, 4, 5; 1964-1966), για μια διεξοδική παρουσίαση της μαθηματικής θεμελίωσης και των εφαρμογών των γενικευμένων συναρτήσεων. ■

Δύο είναι οι βασικοί λόγοι για τους οποίους μελετάμε τη θεμελιώδη λύση $G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho},t)$. Ο **πρώτος λόγος** είναι ότι *έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία* και, μάλιστα *περιγράφει ποιοτικά την επ' άπειρον μορφή του πεδίου ροής* που παράγεται από σώμα κινούμενο με μέση σταθερή ταχύτητα U και ταλαντευόμενο με κυκλική συχνότητα ω .

Ο **δεύτερος**, και ίσως περισσότερο σημαντικός, **λόγος** είναι η δυνατότητα που προσφέρεται, σε συνδυασμό με τα κατάλληλα ολοκληρωτικά θεωρήματα (Green, Gauss, κττ), να αξιοποιήσουμε το πεδίο $\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho};U,\omega)$ για την κατασκευή *ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων του κυματικού πεδίου που αναπτύσσεται σε άλλα, περισσότερο περίπλοκα και σημαντικά, προβλήματα*, όπως, π.χ., το πρόβλημα του **πλοίου που κινείται με σταθερή μέση ταχύτητα δια μέσω αρμονικών κυματισμών**. Οι αναπαραστάσεις αυτές αποτελούν τη βάση της αναγωγής των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών σε **συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις**, οι οποίες μελετώνται και επιλύονται (θεωρητικά και αριθμητικά) πολύ ευκολότερα από το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών.

- Κατασκευή της συνάρτησης Green. Αποσύνθεση σε ιδιόμορφο και ομαλό μέρος

[**Σχόλιο συμβολισμού**: Στο υποεδάφιο αυτό, καθώς και σε όλη τη διάρκεια της κατασκευής της (U,ω) -συνάρτησης Green $\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = \overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho};U,\omega)$, θα χρησιμοποιήσουμε για αυτήν τον ακόμη απλούστερο συμβολισμό $G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$].

Είναι γνωστόν ότι η συνάρτηση Green της εξίσωσης Laplace στον ελεύθερο τρισδιάστατο χώρο, δηλαδή η συνάρτηση που επιλύει το πρόβλημα

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (5\alpha)$$

(²) Το σύμβολο $f(\cdot)|_D$ υποδηλώνει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D .

$$\nabla G(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \text{ παραμένει φραγμένο όταν } |\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}| \rightarrow \infty, \quad (5\beta)$$

είναι η

$$G_{3D}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv G_{3D}(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} = \left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \right)^{-1/2}. \quad (5\gamma)$$

Στην περίπτωση του (U, ω) -προβλήματος ενδιαφερόμεθα για μια διαμορφωμένη συνάρτηση Green που (περι)ορίζεται στον ημίχωρο $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-$, και ικανοποιεί τις εξισώσεις (3α,β,γ). Η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης Green, βολεύει να ξεκινήσει από την

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv \mathcal{S}(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}'|}, \quad (6\alpha)$$

όπου $\boldsymbol{\rho}' = (\xi, \eta, -\zeta)$ είναι το κατοπτρικό σημείο της πηγής $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ ως προς την αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια. Βλ. Σχήμα 1, ανωτέρω. Σημειώστε ότι η συνάρτηση $\mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ για σημεία \mathbf{r} του πεδίου στο οριζόντιο επίπεδο $z=0$ ικανοποιεί την πρόσθετη συνθήκη

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{S}(x,y,z=0|\xi,\eta,\zeta) = 0. \quad (6\beta)$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της $\mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$, διαχωρίζουμε την αναζητούμενη θεμελιώδη λύση $G^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ σε **ιδιόμορφο** και **ομαλό μέρος**, ως ακολούθως:

$$G^*(x,y,z|\xi,\eta,\zeta) = \underbrace{\mathcal{S}(x,y,z|\xi,\eta,\zeta)}_{\text{ιδιόμορφο μέρος}} + \underbrace{H(x,y,z|\xi,\eta,\zeta)}_{\text{ομαλό μέρος}}. \quad (7)$$

Με βάση την αναπαράσταση (7), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την ιδιότητα (6β), το πρόβλημα (3α,β,γ), αναδιατυπώνεται ως προς την ομαλή (στο πεδίο ροής) συνάρτηση $H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = H(x,y,z|\xi,\eta,\zeta)$, ως ακολούθως:

$$\nabla^2 H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-, \quad (8\alpha)$$

$$\begin{aligned} \left(j\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 H(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho}) + g \frac{\partial H(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho})}{\partial z} &= - \left(j\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathcal{S}(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho}) - g \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho})}{\partial z} = \\ &= -g \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{R}|\boldsymbol{\rho})}{\partial z}, \quad (3) \end{aligned} \quad (8\beta)$$

Μακριά από το σημείο ιδιομορφίας $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, δηλαδή όταν $|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}| \rightarrow \infty$,

με $\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-$, η συνάρτηση $H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ πρέπει να αντιστοιχεί σε σύστημα κυματισμών απομακρυνόμενων από την πηγή, και το πεδίο ταχύτητας $\nabla H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ πρέπει να παραμένει φραγμένο. (8γ)

(³) Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον προτιμάται να πραγματοποιήσουμε το διαχωρισμό (7) με τη βοήθεια της $\mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ και όχι της $G_{3D}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$.

Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα του προσδιορισμού της (U, ω) -συνάρτησης Green, εξισώσεις $(3\alpha, \beta, \gamma)$, ανάγεται στο πρόβλημα του προσδιορισμού της αρμονικής συνάρτησης $H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv H(x, y, z|\xi, \eta, \zeta)$, που ικανοποιεί μια μη-ομογενή συνθήκη πάνω στην αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια, καθώς και μια αντίστοιχη συνθήκη ακτινοβολίας [εξισώσεις $(8\alpha, \beta, \gamma)$].

Στη συνέχεια επιλύουμε το πρόβλημα $(8\alpha, \beta, \gamma)$ με τη βοήθεια του **μετασχηματισμού Fourier** στο οριζόντιο επίπεδο.

- **Μετασχηματισμός Fourier**

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε το (διδιάστατο) μετασχηματισμό Fourier αυτής $\hat{f}(k_x, k_y) = \mathcal{F}_{\substack{x \rightarrow k_x \\ y \rightarrow k_y}} [f(x, y)]$ από τη σχέση:

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy f(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)}. \quad (9\alpha)$$

Ο μετασχηματισμός (9α) αντιστρέφεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \hat{f}(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k dk \hat{f}(k, \theta) e^{jk(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (9\beta)$$

όπου

$$k_x = k \cos \theta, \quad k_y = k \sin \theta. \quad (9\gamma)$$

(Βλ., π.χ., Sneddon (1951/1995) ή Churchill (1972). Εδώ θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier ως προς x και y σε συναρτήσεις περισσότερων ορισμάτων, όπως π.χ. η συνάρτηση $H(x, y, z|\xi, \eta, \zeta)$):

$$\hat{H}(k_x, k_y, z|\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{F}_{\substack{x \rightarrow k_x \\ y \rightarrow k_y}} [H(x, y, z|\xi, \eta, \zeta)].$$

Η μετασχηματισμένη $\hat{H}(k_x, k_y, z|\xi, \eta, \zeta)$ θα γράφεται επίσης και ως $\hat{H}(k_x, k_y, z)$ ή - λόγω των (9γ) - $\hat{H}(k, \theta, z)$. Τα υπόλοιπα ορίσματα, εκτός των x και y , μένουν αναλλοίωτα από το μετασχηματισμό και λειτουργούν ως παράμετροι.

Εφαρμόζοντας τον (ευθύ) μετασχηματισμό Fourier (9α) στην εξίσωση Laplace (8α) και στην συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (8β) , και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη ακτινοβολίας (8γ) , οδηγούμεθα στο ακόλουθο μετασχηματισμένο πρόβλημα:

$$\frac{d^2 \hat{H}(k, \theta, z)}{dz^2} - k^2 \hat{H}(k, \theta, z) = 0, \quad z \leq 0, \quad (10\alpha)$$

$$-(\omega + kU \cos \theta) \hat{H}(k, \theta, 0) + g \frac{\partial \hat{H}(k, \theta, 0)}{\partial z} = -g \frac{\partial \hat{G}_*(k, \theta, 0)}{\partial z}, \quad (10\beta)$$

$$\partial \hat{H}(k, \theta, z) / \partial z \quad \text{παραμένει φραγμένη όταν} \quad z \rightarrow -\infty, \quad (10\gamma)$$

όπου $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\hat{\mathcal{S}}(k, \theta, z) = \mathcal{S}(k, \theta, z | \xi, \eta, \zeta)$ και $\hat{H}(k, \theta, z) = \hat{H}(k, \theta, z | \xi, \eta, \zeta)$. Η γενική λύση της (10α) είναι της μορφής

$$\hat{H}(k, \theta, z) = A(k, \theta) e^{kz} + B(k, \theta) e^{-kz}, \quad z \leq 0. \quad (11\alpha)$$

Ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της ανωτέρω, για $B(k, \theta) \neq 0$, παραβιάζει την απαίτηση του φραγμένου, συνθήκη (10γ), όταν $z \rightarrow -\infty$. Επομένως επιλέγουμε $B(k, \theta) = 0$, οπότε καταλήγουμε στη λύση

$$\hat{H}(k, \theta, z) = A(k, \theta) e^{kz}, \quad z \leq 0. \quad (11\beta)$$

Η συνάρτηση $A(k, \theta)$ θα υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνθήκης (10β). Προς τούτο χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το δεξιό μέλος της (10β), δηλαδή το μετασχηματισμό Fourier $\hat{G}_*(k, \theta, z) = \hat{G}_*(k, \theta, z | \xi, \eta, \zeta)$ της συνάρτησης $G_*(\mathbf{r} | \mathbf{p})$. Εφαρμόζοντας το γνωστό αποτέλεσμα

$$\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk e^{-k|z-c|} e^{jk((x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta)}, \quad (12\alpha)$$

(βλ. π.χ., Wehausen & Laitone, 1960, Εξ. 13.12), εύκολα βρίσκουμε

$$\hat{\mathcal{S}}(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk \left(e^{-k|z-\zeta|} - e^{-k|z+\zeta|} \right) e^{jk[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}. \quad (12\beta)$$

Εφ' όσον μας ενδιαφέρει η z -παράγωγος της $\hat{G}_*(k, \theta, z)$ για $z=0$, αρκεί να εξειδικεύσουμε την (12β) στην περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας. Στο εσωτερικό της λωρίδας $z \in (\zeta, -\zeta) = (-|\zeta|, |\zeta|)$, η (12β) γράφεται

$$\hat{\mathcal{S}}(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk \left(e^{-k(z-\zeta)} - e^{k(z+\zeta)} \right) e^{jk[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}, \quad (12\gamma)$$

απ' όπου, με τη βοήθεια της (9β), συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{\mathcal{S}}(k, \theta, z) \equiv \hat{\mathcal{S}}(k, \theta, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi k} \left(e^{-k(z-\zeta)} - e^{k(z+\zeta)} \right) e^{-jk(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)}, \quad (12\delta)$$

και άρα

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}(k, \theta, 0)}{\partial z} = -\frac{1}{\pi} e^{k\zeta} e^{-jk(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)}. \quad (12\epsilon)$$

Εισάγοντας την ανωτέρω στο δεξιό μέλος της (10β), σε συνδυασμό με τις σχέσεις $H(k, \theta, 0) = A(k, \theta)$ και $\partial \hat{H}(k, \theta, 0) / \partial z = k A(k, \theta)$ (προφανείς συνέπειες της (11β)), παίρνουμε

$$\left[-(\omega + kU \cos\theta)^2 + kg \right] A(k, \theta) = \frac{1}{\pi} g e^{k\zeta} e^{-jk(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)}, \quad (13\alpha)$$

εκ της οποίας προκύπτουν οι σχέσεις

$$A(k, \theta) = \frac{\pi^{-1} g e^{k\zeta} \left(e^{-jk(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} \right)}{kg - (\omega + kU \cos \theta)^2}, \quad (13\beta)$$

και, λόγω της (11β),

$$\hat{H}(k, \theta, z) = \frac{\pi^{-1} g e^{k(z+\zeta)} e^{-jk(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)}}{kg - (\omega + kU \cos \theta)^2}. \quad (13\gamma)$$

Πριν προχωρήσουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή των δεξιά μελών των σχέσεων (13β,γ), δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της ποσότητας

$$\varpi(k; \theta) = -(\omega + kU \cos \theta)^2 + kg = -(U^2 \cos^2 \theta) k^2 - (2\omega U \cos \theta - g)k - \omega^2, \quad (14\alpha)$$

στο (k, θ) -επίπεδο. Η διακρίνουσα Δ_ϖ του δευτεροβάθμιου τριωνύμου (14α) γράφεται στη μορφή

$$\Delta_\varpi = g^2 \left(1 - 4 \frac{\omega U}{g} \cos \theta \right) \equiv g^2 (1 - 4\tau \cos \theta), \quad (14\beta)$$

όπου $\tau = \omega U / g$, είναι θετική αδιάστατη παράμετρος (η οποία αντιστοιχεί προς το αντίστροφο του αριθμού Strouhal).

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι η αδιάστατη παράμετρος τ ισούται με το λόγο της ταχύτητας U της σημειακής πηγής προς τη φασική ταχύτητα c του κύματος, δηλαδή ότι $\tau \equiv \frac{\omega U}{g} = \frac{U}{c}$. ■

Λόγω της μορφής της διακρίνουσας Δ_ϖ , σχέση (14β), καθοριστικό ρόλο για τη συμπεριφορά του $\varpi(k; \theta)$ παίζει η ποσότητα $1 - 4\tau \cos \theta$. Προφανώς, πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\tau < 1/4$ (**υποκριτική ροή**, subcritical flow) και $\tau > 1/4$ (**υπερκριτική ροή**, supercritical flow). Εύκολα βλέπουμε ότι

$$4\tau < 1 \Rightarrow \Delta_\varpi > 0, \quad (15)$$

οπότε έχουμε πάντοτε δύο σημεία μηδενισμού του $\varpi(k; \theta)$, $k_{1,2} \equiv k_{1,2}(\theta)$, τα οποία δίδονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} k_{1,2} \equiv k_{1,2}(\theta; \tau) &= \frac{g - 2\omega U \cos \theta \pm \sqrt{\Delta_\varpi}}{2U^2 \cos^2 \theta} = \frac{\omega^2}{g} \frac{1 - 2\tau \cos \theta \pm \sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{2\tau^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{\omega^2}{g} \frac{1 + (1 - 4\tau \cos \theta) \pm 2\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{4\tau^2 \cos^2 \theta}, \end{aligned}$$

απ' όπου αμέσως λαμβάνουμε $\frac{U^2 k_{1,2}(\theta; \tau)}{g} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{2 \cos \theta} \right)^2$,

ή

$$\tilde{\kappa}_{1,2}(\theta; \tau) = \nu^{-1} k_{1,2}(\theta) = \frac{1 - 2\tau \cos \theta \pm \sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{2 \cos^2 \theta}, \quad (16)$$

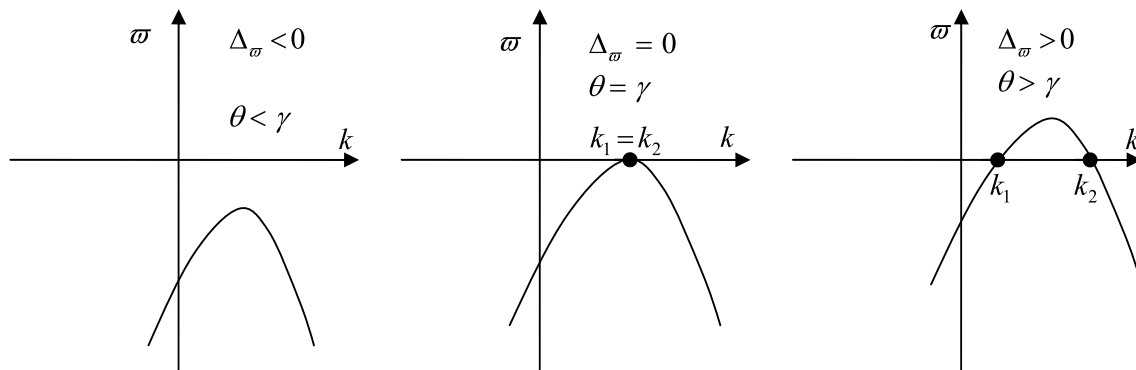
όπου $\nu = g/U^2$ η χαρακτηριστική παράμετρος του προβλήματος Neumann-Kelvin που αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα και αντιπροσωπεύει τον κυματαριθμό των εγκάρσιων κυματισμών πίσω από κινούμενη με σταθερή ταχύτητα αλλά μη ταλαντευόμενη πηγή. Εξ άλλου,

$$4\tau > 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_{\varpi} > 0, & \text{εάν } \cos \theta < 0 \text{ είτε } 0 < \cos \theta < 1/4\tau, \\ \Delta_{\varpi} < 0, & \text{εάν } \cos \theta > 1/4\tau \Leftrightarrow 0 < \theta < \arccos(1/4\tau) = \gamma. \end{cases} \quad (17)$$

Στην περίπτωση αυτή ($4\tau > 1$), η γραφική παράσταση του τριωνύμου $\varpi(k; \theta)$ (δηλαδή του παρονομαστή των σχέσεων (13β,γ)) δείχνεται σκαριφηματικά στο Σχήμα 2. Εν προκειμένω, καθοριστικό ρόλο παίζει η ποσότητα (γωνία στο Fourier επίπεδο (k, θ))

$$\gamma = \arccos(1/4\tau), \quad (18)$$

η οποία ορίζεται και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, εφ' όσον $1/4\tau < 1$. Σύμφωνα με τη (17), σημεία μηδενισμού του παρονομαστή $\varpi(k; \theta)$ υπάρχουν μόνον όταν $\gamma < \theta < \pi$. Τα σημεία αυτά δίδονται από την ίδια σχέση (16), ως ανωτέρω.



Σχήμα 2: Σημεία μηδενισμού του τριωνύμου $\varpi(k; \theta)$, για τις διάφορες τιμές της γωνίας θ , όταν $4\tau > 1$. Η παράμετρος (γωνία) γ δίδεται από τη σχέση (18).

Οι οριακές τιμές (limiting values) των αδιάστατων ποσοτήτων $\tilde{\kappa}_{1,2}(\theta)$, για $\theta \rightarrow 0$ ή γ , $\theta \rightarrow \pi/2$ και $\theta \rightarrow \pi$, δίδονται από τις σχέσεις:

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - 2\tau \cos \theta \pm \sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}}{2 \cos^2 \theta} = \begin{cases} (+) & +\infty \\ (-) & \tau^2 \end{cases} \quad (18\alpha)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \gamma > 0} \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta) = 4\tau^2, \quad (\text{για } 4\tau > 1), \quad (18\beta)$$

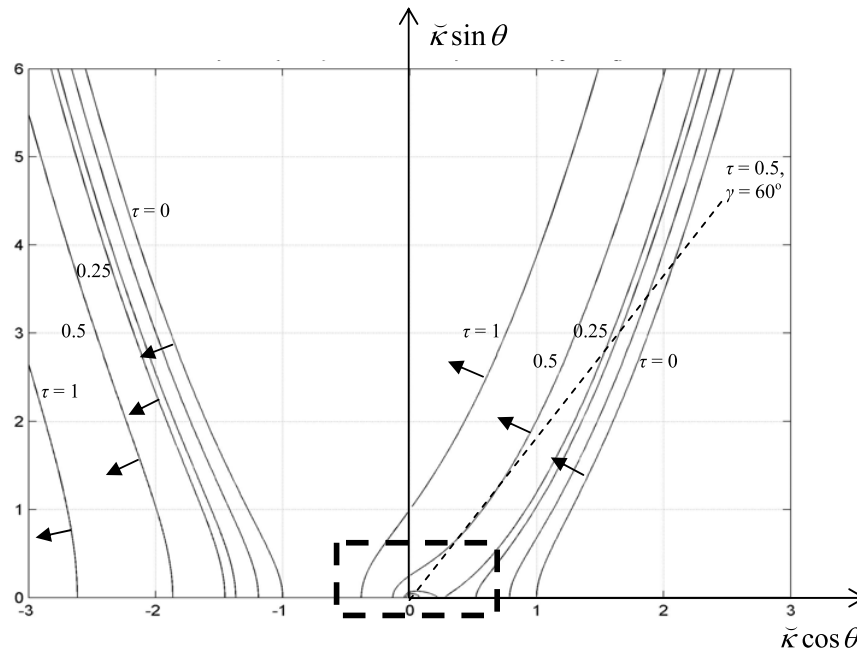
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta) = \frac{1 - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau}}{2}, \quad (\text{για } 4\tau < 1), \quad (18\gamma)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta) = \frac{1 + 2\tau \pm \sqrt{1 + 4\tau}}{2}, \quad (\text{για κάθε τιμή του } \tau) \quad (18\delta)$$

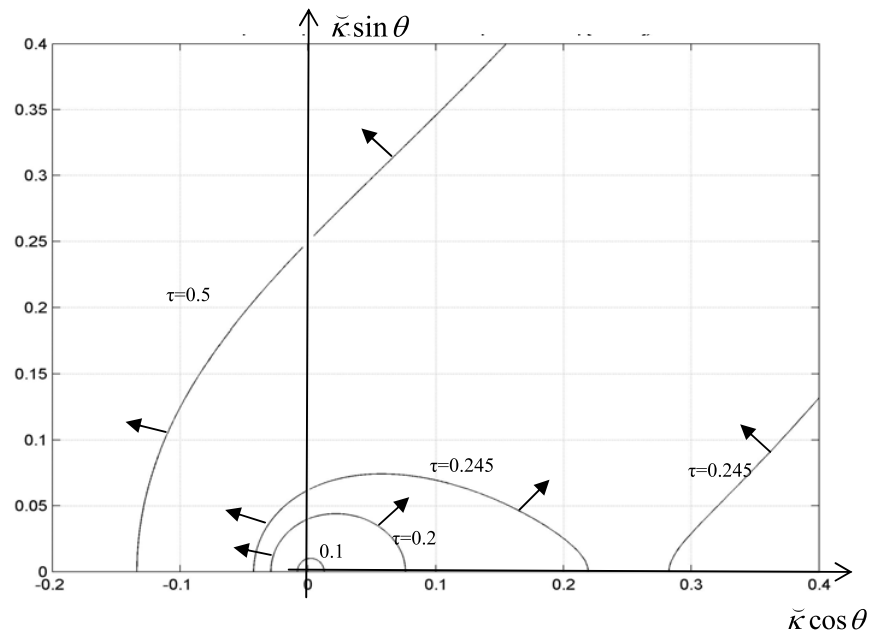
Οι σχέσεις (16), σε συνδυασμό με τις οριακές τιμές (18), μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε και να κατασκευάσουμε το γεωμετρικό τόπο των (αδιάστατων) ριζών $\tilde{\kappa}_{1,2}(\theta)$ του δευτεροβαθμίου τριωνύμου $\varpi(k; \theta)$ (παρονομαστή των δεξιά μελών των σχέσεων (13β,γ), στο πολικό επίπεδο. Στο Σχήμα 3 παρουσιάζονται οι καμπύλες $\tilde{\kappa}_{1,2} = \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta) = \tilde{\kappa}_{1,2}(\theta; \tau)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου τ . Ειδικότερα, εξετάζονται οι υποκριτικές περιπτώσεις ($\tau = 0.1, 0.2, 0.249 < 1/4$) και οι υπερκριτικές περιπτώσεις ($\tau = 0.5, 1 > 1/4$). Όταν $\tau > 1/4$ παρατηρούμε ότι οι καμπύλες $\tilde{\kappa}_1(\theta; \tau)$ και $\tilde{\kappa}_2(\theta; \tau)$ έχουν κοινή αρχή το σημείο $(\tilde{\kappa}, \theta) = (4\tau^2, \gamma)$, επί της πολικής ευθείας $\theta = \gamma$, που εικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή (στη περίπτωση $\tau = 0.5, \gamma = 60^\circ$). Στη συνέχεια, καθώς το θ αυξάνεται, τείνοντας προς την τιμή $\pi/2$, εξελίσσονται ως δύο ανεξάρτητοι κλάδοι, από τους οποίους ο ένας τείνει στο άπειρο ενώ ο άλλος τείνει στο σημείο $(\tilde{\kappa}, \theta) = (\tau^2, \pi/2)$. Στο δεύτερο τεταρτημόριο, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, οι κλάδοι εμφανίζονται ως εξής: ο ένας «επιστρέφει» από το άπειρο ($\theta = \pi/2$) και τέμνει τον άξονα $\theta = \pi$ στο σημείο $(\tilde{\kappa}, \theta) = \left((1 + \sqrt{1 + 4\tau})/2\tau, \pi \right)$, ενώ ο άλλος συνεχίζει να εξελίσσεται ομαλά από το σημείο $(\tilde{\kappa}, \theta) = (\tau^2, \pi/2)$ ως το σημείο $(\tilde{\kappa}, \theta) = \left((1 + 2\tau - \sqrt{1 + 4\tau})/2, \pi \right)$.

Όταν $\tau < 1/4$ δεν ορίζεται η γωνία γ , και οι κλάδοι δεν έχουν κοινή αρχή. Ξεκινούν από τα σημεία $(\tilde{\kappa}, \theta) = \left((1 - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau})/2, 0 \right)$ του άξονα $\theta = 0$, και εξελίσσονται αντίστοιχα, όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Με τη βοήθεια και του Σχ. 4 που αποτελεί μια μεγέθυνση του προηγούμενου στην αρχή των αξόνων, παρατηρούμε στην υποκριτική περίπτωση ($\tau < 1/4$) ότι, καθώς $\tau \rightarrow 0$, ο εξωτερικός κλάδος τείνει να αποκτήσει συμμετρική μορφή στα δύο τεταρτημόρια ενώ ο εσωτερικός κλάδος τείνει σε κυκλική μορφή, η οποία εκφυλίζεται στο σημείο $(0,0)$ όταν $\tau = 0$. Ετσι, στη περίπτωση της πηγής σε μόνιμη μεταφορική κίνηση χωρίς ταλάντωση ($U > 0, \omega = 0$), που αντιστοιχεί στη τιμή $\tau = 0$, έχουμε μόνο τους δύο εξωτερικούς συμμετρικούς κλάδους που, όπως θα δούμε στη συνέχεια, αποδίδουν το κυματικό πεδίο της διαταραχής σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, και

αντιπροσωπεύουν την εικόνα του συστήματος εγκαρσίων και αποκλινόντων κυματισμών του πλοίου (Neumann-Kelvin) σε ήρεμο νερό και σε μακρινή απόσταση από το πλοίο.



Σχήμα 3: Γεωμετρία των ριζών $\tilde{\kappa}_{1,2}(\theta; \tau)$ του δευτεροβάθμιου τριωνύμου $\omega(k; \theta)$ στο πολικό επίπεδο, για διάφορες τιμές της παραμέτρου τ . Οι εικονιζόμενες μορφές επεκτείνονται συμμετρικά (ως προς τον οριζόντιο άξονα) στο κάτω ημιεπίπεδο.



Σχήμα 4: Μεγέθυνση κοντά στη αρχή των αξόνων της περιοχής του Σχημ. 3 που εικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή

Περαιτέρω, καθώς η συχνότητα αρχίζει να αποκτά τιμές, ώστε η παράμετρος τ να λαμβάνει μικρές θετικές τιμές, έχουμε την εμφάνιση ενός περίπου κυκλικού κλάδου στην αρχή των αξόνων, ο οποίος σταδιακά μεγαλώνει σε ακτίνα και παραμορφώνεται, όπως φαίνεται στο

Σχ.4. Θα δούμε στην συνέχεια ότι ο κλάδος αυτός (ολόκληρος για $\tau < 0.25$ η μόνο το μέρος του δεύτερο τεταρτημόριο) αντιπροσωπεύει ένα πρόσθετο πεδίο δακτυλιοειδών κυματισμών εξερχόμενων από το σημείο της διαταραχής (πηγής) που υπερτίθενται στο προαναφερθέν Neumann-Kelvin κυματικό πεδίο.

Κλείνουμε το μέρος αυτό με την παρατήρηση ότι ο γεωμετρικός τόπος των ριζών $k_{1,2}(\theta; \tau) = \nu \tilde{k}_{1,2}(\theta; \tau)$ προκύπτει εύκολα με την διαστατοποίηση των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στα ανωτέρω Σχήματα 3 και 4 (για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου τ), και ισοδύναμα **αποτελεί τη λύση της εξισώσεως διασποράς** του εξεταζόμενου προβλήματος

$$\mathcal{P}(k_x, k_y; \omega) = \frac{\varpi(k_x, k_y; \omega)}{g} = -\frac{\omega^2}{g} - 2\frac{2\omega U}{g}k_x - \frac{U^2}{g}k_x^2 + \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0, \\ (k_x, k_y) = k(\cos \theta, \sin \theta), \quad (19\alpha)$$

η οποία, για δεδομένη συχνότητα ω και ταχύτητα U , καθορίζει το μέγεθος και την διεύθυνση του κυματαριθμού των ελευθέρων διαδιδόμενων κυμάτων σε κάθε σημείο του φυσικού χώρου. Έτσι η σχέση (19α) ισοδύναμα εννοείται ως σχέση που συνδέει τη συχνότητα με το διάλυσμα του κυματαριθμού

$$\omega = \omega(k_x, k_y; U) \quad (\text{ή} \quad \mathbf{k} \equiv (k_x, k_y) = \mathbf{k}(\omega; U)), \quad (19\beta)$$

παραμετρικά εξαρτώμενη από την ταχύτητα U . Μεγάλη σημασία για την περαιτέρω μελέτη του προβλήματος και ιδιαίτερα τη παραγωγή αποτελεσμάτων που αφορούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου σε μακρινές οριζόντιες αποστάσεις από τη πηγή έχει η διεύθυνση

της κλίσης (gradient) $\nabla_k \mathcal{P} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial k_x}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial k_y} \right)$, όταν οι εξαρτημένες μεταβλητές $(k_x, k_y; \omega)$

ικανοποιούν τη σχέση διασποράς (19β). Η κλίση $\nabla_k \mathcal{P}$ είναι εξ'ορισμού κάθετη στο γεωμετρικό τόπο των ριζών, και η διεύθυνση της παρουσιάζεται ενδεικτικά στα Σχήματα 4 και 5, σε διάφορα σημεία πάνω στις εικονιζόμενες καμπύλες (που αντιπροσωπεύουν διάφορες τιμές της παραμέτρου τ), με μικρό βέλος.

Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, σχέση (9β), στην ποσότητα $\hat{H}(k, \theta, z)$ που δίνεται από την σχέση (13γ), παίρνουμε

$$H(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k dk \hat{H}(k, \theta) e^{jk(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{H}(k, \theta, z) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k dk \frac{\pi^{-1} g e^{k(z+\zeta)} e^{jk((x-\xi) \cos \theta + (y-\eta) \sin \theta)}}{kg - (\omega + kU \cos \theta)^2}. \quad (20)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συμμετρία ως προς θ του τμήματος της ολοκληρωτέας ποσότητας που εμπλέκει το $\cos \theta$, και την αντισυμμετρία του τμήματος που εμπλέκει το $\sin \theta$, οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
H(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) &= \frac{2g}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dk \frac{k e^{k(z+\zeta) + jk((x-\xi)\cos\theta)} \cos(k(y-\eta)\sin\theta)}{kg - (\omega + kU \cos\theta)^2} = \\
&= \frac{2g}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dk f(k, \theta), \tag{21\alpha}
\end{aligned}$$

όπου

$$f(k, \theta) = \frac{h(k, \theta)}{\varpi(k, \theta)} \quad \text{και} \quad h(k, \theta) = k e^{k(z+\zeta) + jk((x-\xi)\cos\theta)} \cos(k(y-\eta)\sin\theta). \tag{21\beta}$$

(Πρβλ. Wehausen & Laitone, 1960, Εξ. 13.52). Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία του μετασχηματισμού Fourier, τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή της ολοκληρωτέας ποσότητας $f(k, \theta)$ (που δεν είναι άλλα από τα σημεία μηδενισμού του δευτεροβαθμίου τριωνύμου $\varpi(k; \theta)$, τα οποία μελετήθηκαν διεξοδικά ανωτέρω), ορίζουν τους πόλους της ολοκληρωτέας στον τύπο της αντιστροφής, εξίσωση (20), και είναι θεμελιώδους σημασίας για το σωστό (από αναλυτική και αριθμητική άποψη) υπολογισμό.

Η σχέση (21), σε συνδυασμό με την (7), μας παρέχει την κλειστή, αναλυτική λύση του προβλήματος (3α,β,γ), δίδοντας μια ακριβή μαθηματική έκφραση για τη συνάρτηση Green του γραμμικοποιημένου (U, ω) -προβλήματος. Εν τούτοις, η λύση αυτή παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Δίδεται στη μορφή ενός διπλού ολοκληρώματος, και μάλιστα με τη μία ολοκλήρωση να εκτείνεται σε άπειρο διάστημα. Είναι, λοιπόν, σημαντικό να μελετήσουμε προσεκτικά αυτό το διπλό ολοκλήρωμα με κύριο στόχο να το εξαπλουστεύσουμε, εκτελώντας αναλυτικά τουλάχιστον τη μια ολοκλήρωση, όπου αυτό είναι εφικτό. Περαιτέρω, και εφ' όσον παραμένει το ζήτημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ως προς k , είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της ολοκληρωτέας συνάρτησης ως προς k , και ενδεχομένως να μετασχηματίσουμε καταλλήλως αυτήν, ώστε να μπορούν να εκτελεστούν αποδοτικά οι αριθμητικές ολοκληρώσεις.

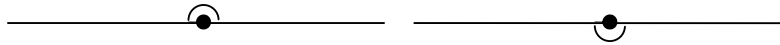
Θα εξετάσουμε, κατ' αρχήν, την υπερκριτική περίπτωση $\tau > 1/4 \Leftrightarrow \gamma = \arccos(1/4\tau)$.

Διαχωρίζοντας το διάστημα ολοκλήρωσης ως προς την (πολική) γωνία θ στις υποπεριοχές $0 < \theta < \gamma$, $\gamma < \theta < \pi/2$, $\pi/2 < \theta < \pi$, η σχέση (21) γράφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$H(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{2g}{\pi} \int_0^\gamma d\theta \int_0^\infty dk f(\theta, k) + \underbrace{\frac{2g}{\pi} \int_\gamma^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty dk f(k, \theta)}_{J_1} + \underbrace{\frac{2g}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi d\theta \int_0^\infty dk f(k, \theta)}_{J_2}. \tag{22}$$

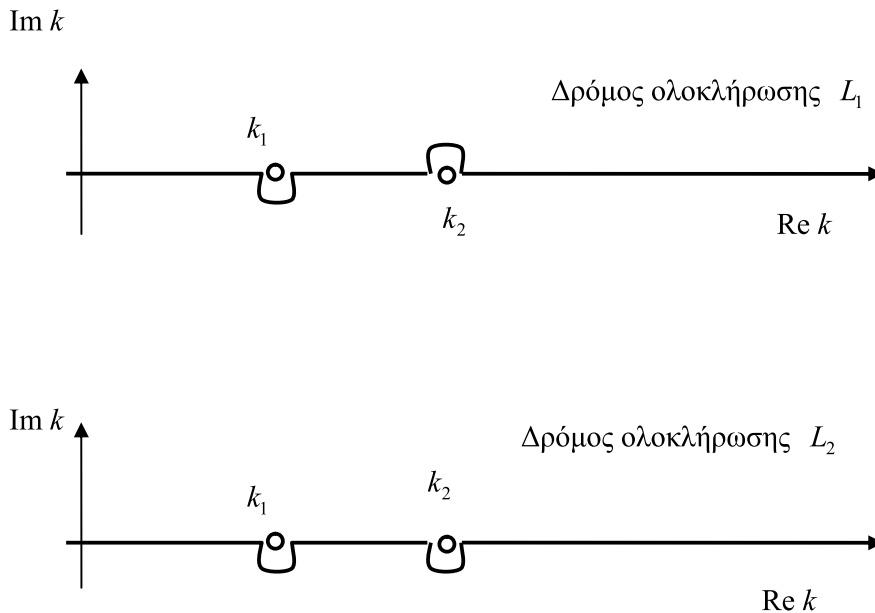
Στο δεύτερο και στο τρίτο από τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο δεξιά μέλος της ανωτέρω σχέσεως (22), η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(k, \theta)$ εμφανίζει, για κάθε τιμή της γωνίας θ στα αντίστοιχα διαστήματα, δύο πόλους στις θέσεις $k_{1,2}(\theta)$, που δίδονται από τις σχέσεις (16). Δηλαδή, η k -ολοκλήρωση όχι μόνο εκτείνεται σε άπειρο διάστημα, αλλά «διέρχεται» πάνω από πόλους και άρα δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Αυτό συμβαίνει

διότι ο πόλος πρέπει να παρακαμφθεί και υπάρχουν δύο δυνατότητες παράκαμψης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Τρόποι παράκαμψης ενός πόλου

Οι κατάλληλοι δρόμοι ολοκλήρωσης L_1 και L_2 , στο μιγαδικό k -επίπεδο, που πρέπει να ακολουθηθούν για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, εικονίζονται στο Σχήμα 5 με έντονη γραμμή. Σημειώνεται ότι ο τρόπος παράκαμψης κάθε ενός πόλου (ισοδυνάμως, ο τρόπος με τον οποίον θα πρέπει να λαμβάνεται η συνεισφορά εκάστου πόλου στον υπολογισμό του ολοκληρώματος) επιλέγεται έτσι ώστε το τελικό αποτέλεσμα της αντιστροφής, εξίσωση (22), να είναι συμβατό με την αρχή της αιτιότητας και τη συνθήκη στο άπειρο. (Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σχετικά στην εργασία των Peters & Stoker 1957).



Σχήμα 5: Οι δρόμοι ολοκλήρωσης L_1 και L_2 και οι πόλοι k_1, k_2 στο μιγαδικό k -επίπεδο, για $\gamma < \theta < \pi/2$ και για $\pi/2 < \theta < \pi$.

Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό των συνεισφορών των πόλων στην k -ολοκλήρωση, στα ολοκληρώματα J_1, J_2 . Το τριώνυμο $\varpi(k; \theta)$, που εμφανίζεται στον παρανομαστή της ολοκληρωτέας ποσότητας $f(k, \theta)$, γράφεται ισοδύναμα στη μορφή.

$$\varpi(k, \theta) = -U^2 \cos^2 \theta (k - k_1)(k - k_2), \quad (23)$$

όπου $k_{1,2} \equiv k_{1,2}(\theta)$ οι ρίζες του τριωνύμου $\varpi(k; \theta)$, σχέσεις (16). Με την βοήθεια της ανωτέρω εκφράσεως, εξ. (23), μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την συνεισφορά των πόλων στο ολοκλήρωμα J_1 πάνω στο δρόμο L_1 (όταν $\gamma < \theta < \pi/2$), και πάνω στο δρόμο L_2

στο ολοκλήρωμα J_2 (όταν $\pi/2 < \theta < \pi$). Στην πρώτη περίπτωση ($\gamma < \theta < \pi/2$), το ολοκλήρωμα πάνω στο δρόμο L_1 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$J_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2g}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi/2} d\theta \left\{ \int_0^{k_1-\delta} + \oint_{k_1} + \int_{k_1+\delta}^{k_2-\delta} + \oint_{k_2} + \int_{k_2+\delta}^{\infty} \right\} f(k, \theta) dk. \quad (24)$$

Η συνεισφορά του ολοκληρώματος στο ημικύκλιο που παρακάμπτει («από κάτω») τον πόλο k_1 (Σχήμα 5α) υπολογίζεται θέτοντας $k = k_1 + \delta e^{j\psi}$, $\pi < \psi < 2\pi$, ανάγοντας την k -ολοκλήρωση σε ολοκλήρωση ως προς ψ και, τέλος, αναζητώντας το όριο του αποτελέσματος όταν $\delta \rightarrow 0$:

$$\oint_{k_1} f(k, \theta) dk = - \oint_{k_1} \frac{h(k, \theta) dk}{U^2 \cos^2 \theta (k - k_1)(k - k_2)} = j\pi \frac{h(k_1, \theta)}{U^2 \cos^2 \theta (k_2 - k_1)}. \quad (25)$$

Αντίστοιχα, η συνεισφορά του ολοκληρώματος στο ημικύκλιο που παρακάμπτει τον πόλο k_2 υπολογίζεται θέτοντας $k = k_2 + \delta e^{j\psi}$, $0 < \psi < \pi$, και στη συνέχεια αναζητώντας το όριο του αποτελέσματος όταν $\delta \rightarrow 0$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ως ακολούθως

$$\oint_{k_2} f(k, \theta) dk = - \oint_{k_2} \frac{h(k, \theta) dk}{U^2 \cos^2 \theta (k - k_1)(k - k_2)} = j\pi \frac{h(k_2, \theta)}{U^2 \cos^2 \theta (k_2 - k_1)}. \quad (26)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τα ανωτέρω το ολοκλήρωμα πάνω στο δρόμο L_1 γράφεται στην μορφή

$$\frac{2g}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi/2} d\theta \int_{L_1} f(k, \theta) = \frac{2g}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi/2} d\theta PV \int_{k=0}^{\infty} f(k, \theta) dk + 2jg \int_{\gamma}^{\pi/2} \frac{h(k_1, \theta) + h(k_2, \theta) dk}{U^2 \cos^2 \theta (k_2 - k_1)} d\theta. \quad (27)$$

όπου PV δηλώνει τη κύρια κατά Cauchy τιμή του ιδιομόρφου ολοκληρώματος $\int_{k=0}^{\infty} f(k, \theta) dk$.

Αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνουμε για το ολοκλήρωμα πάνω στο δρόμο L_2 :

$$\frac{2g}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_{L_2} f(k, \theta) = \frac{2g}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta PV \int_{k=0}^{\infty} f(k, \theta) dk + 2jg \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{h(k_1, \theta) - h(k_2, \theta) dk}{U^2 \cos^2 \theta (k_2 - k_1)} d\theta. \quad (28)$$

Παρατηρώντας (πρβλ. σχέση 16) ότι: $k_2 - k_1 = \frac{g\sqrt{1-4\tau \cos \theta}}{U^2 \cos^2 \theta}$, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (26) και (27) στην Εξίσωση (21) παίρνουμε τελικά

$$H(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{2g}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \right\} PV \int_{k=0}^{\infty} f(k, \theta) dk d\theta +$$

$$+ 2j \int_{\gamma}^{\pi/2} \frac{h(k_1, \theta) + h(k_2, \theta) dk}{\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}} d\theta + 2j \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{h(k_1, \theta) - h(k_2, \theta) dk}{\sqrt{1 - 4\tau \cos \theta}} d\theta . \quad (29)$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις (π.χ. σχέση ορισμού της συνάρτησης f , Εξ. (20β)), είναι προφανές ότι το πεδίο της πηγής είναι συμμετρικό για $y > \eta$ και $y < \eta$, δηλαδή εκατέρωθεν του άξονα (x) κίνησης της πηγής, όπως είναι αναμενόμενο από την φυσική του προβλήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) \equiv \mathcal{S}(x, y, z | \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'|}$ είναι πραγματική συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε το τελικό αποτέλεσμα και για τη συνάρτηση $\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$, η οποία χρησιμοποιείται στην Εξ.(2α) σε συνδυασμό με την $\exp(j\omega t)$ αρμονική εξάρτηση από το χρόνο, ως ακολούθως

$$\overset{\circ}{G}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{S}(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}) + H^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho}). \quad (30)$$

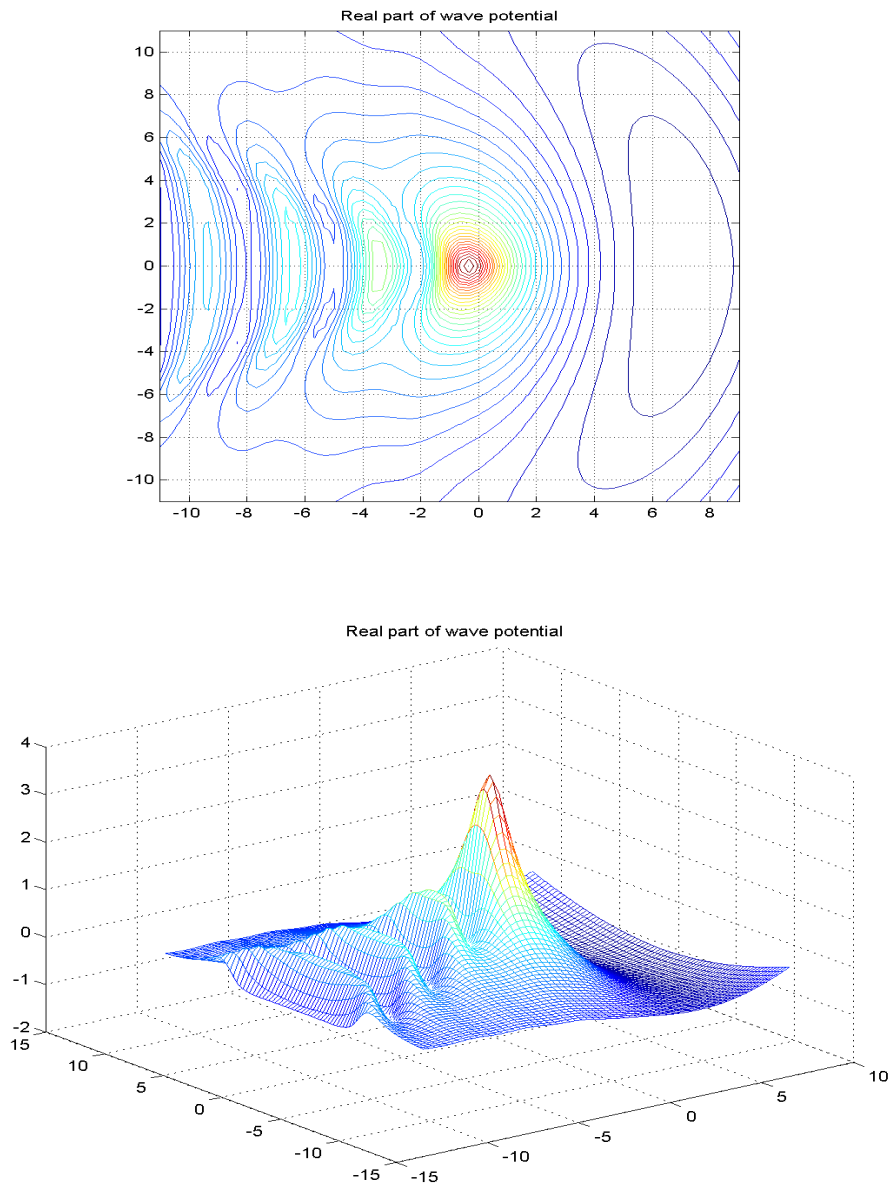
όπου $H^*(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$ είναι η μιγαδική συζυγής της $H(\mathbf{r}|\boldsymbol{\rho})$, όπως παρέχεται από την Εξ.(29).

Αριθμητικά αποτελέσματα

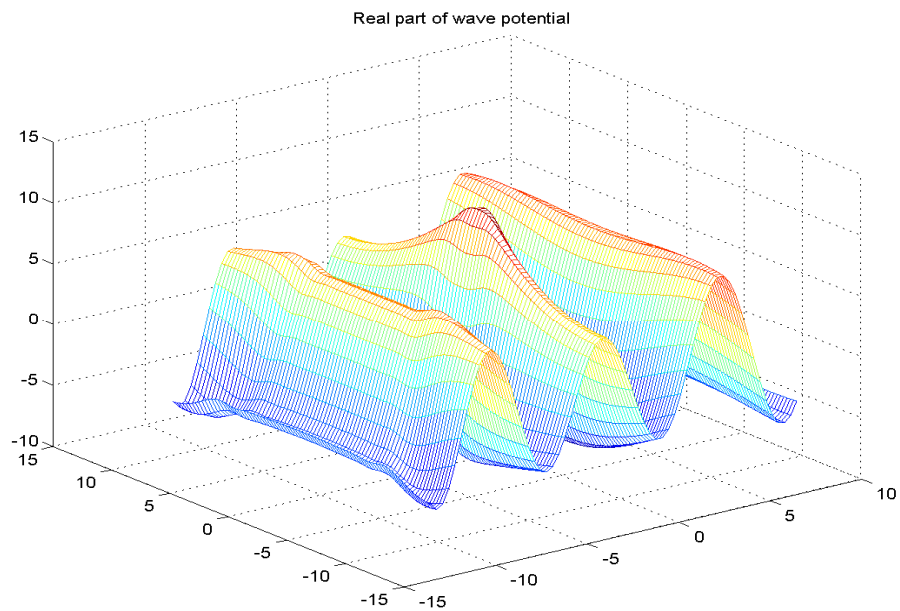
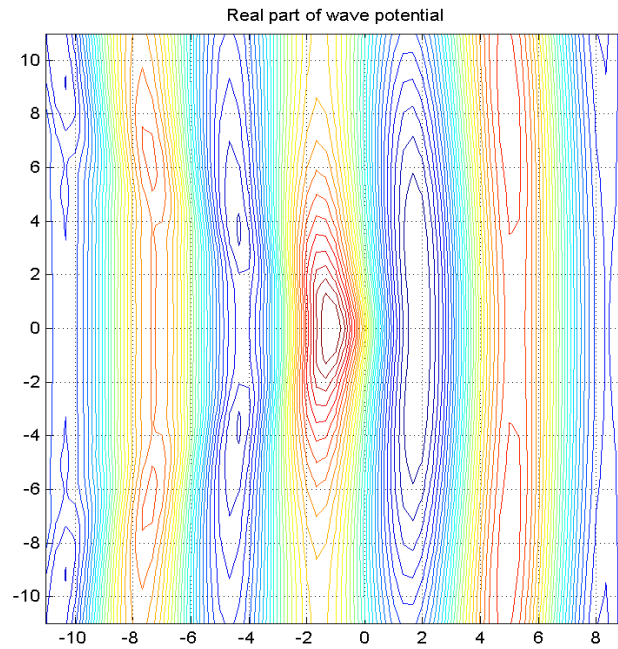
Τα ολοκλήρωμα για το ομαλό μέρος της συνάρτησης Green, Εξ. (18), έχει μετασχηματιστεί από διάφορους ερευνητές σε ισοδύναμες μορφές, έτσι ώστε ο αριθμητικός του υπολογισμός να είναι γρήγορος και ακριβής. Στην συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα σε διάφορες ενδεικτικές περιπτώσεις, όπως έχουν υπολογιστεί με βάση την μέθοδο που προτείνεται στην εργασία των English & Price (1980).

Στα Σχήματα 3.6.3, 3.6.4 και 3.6.5, απεικονίζεται το πραγματικό μέρος του κυματικού πεδίου που παράγεται από κινούμενη-παλλόμενη πηγή στο οριζόντιο επίπεδο $z=0$, στην **υποκριτική περίπτωση** $\tau=1/5$, στην **κριτική περίπτωση** $\tau=1/4$, και στην **υπερκριτική περίπτωση** $\tau=1/2$, αντίστοιχα. Η απεικόνιση επιτυγχάνεται μέσω ισοϋψών καμπυλών του κυματικού πεδίου στο οριζόντιο επίπεδο ($z=0$), που παρουσιάζονται στο πάνω μέρος των σχημάτων αυτών, και τρισδιάστατων όψεων στο κάτω μέρος των σχημάτων.

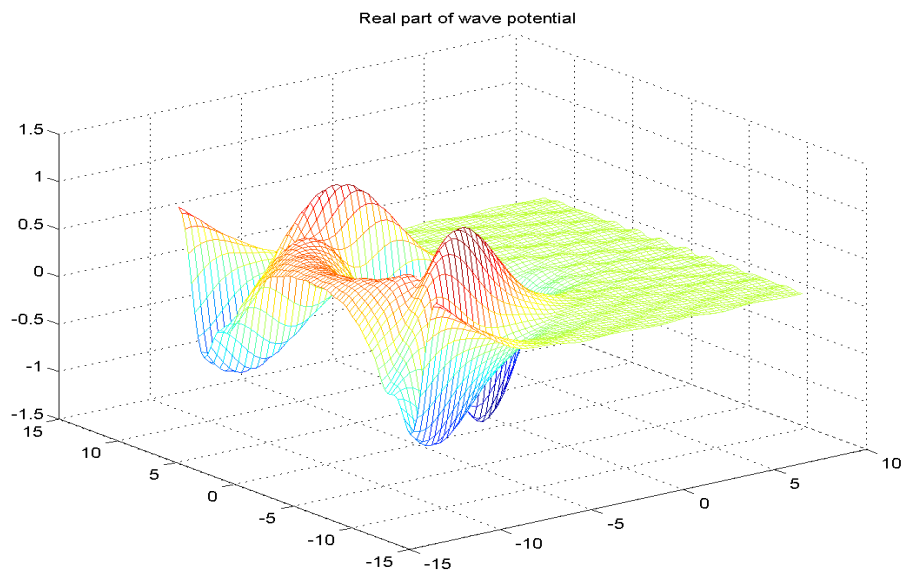
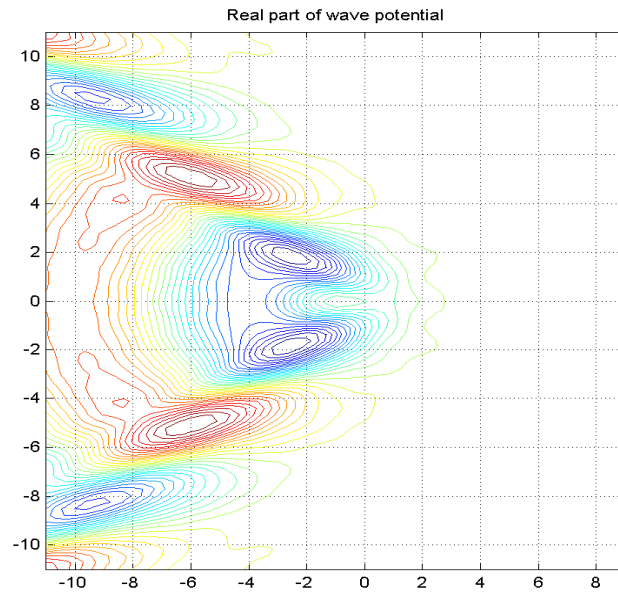
Σημειώνεται ότι σύμφωνα με την Εξ. (3.δ) του Εδαφ.3.6, από την κατασκευή της γραμμικοποιημένης συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας (Ο.Σ.Ε.Ε.), η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας που παράγεται από την κινούμενη-παλλόμενη πηγή προκύπτει ως συνδυασμός των τιμών και των οριζοντίων x -παραγώγων του κυματικού πεδίου στην θέση $z=0$, που αντιστοιχεί στην στάθμη ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας. Με βάση την παρατήρηση αυτή, ο αναγνώστης μπορεί να αντιληφθεί σε πρώτο βαθμό (και με την βοήθεια των Σχημάτων 6.1, 6.2 και 6.3) τις αντίστοιχες εικόνες του πεδίου ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας που δημιουργεί η κινούμενη-παλλόμενη πηγή.



Σχήμα 6.1: Απεικόνιση του πραγματικού μέρους του κυματικού πεδίου που παράγεται από κινούμενη-παλλόμενη πηγή στο οριζόντιο επίπεδο $z=0$, στην υποκριτική περίπτωση $\tau=1/5$.



Σχήμα 6.2: Απεικόνιση του πραγματικού μέρους του κυματικού πεδίου που παράγεται από κινούμενη-παλλόμενη πηγή στο οριζόντιο επίπεδο $z=0$, στην *κριτική περίπτωση* $\tau \rightarrow 1/4$.



Σχήμα 6.3: Απεικόνιση του πραγματικού μέρους του κυματικού πεδίου που παράγεται από κινούμενη-παλλόμενη πηγή στο οριζόντιο επίπεδο $z=0$, στην υπερκριτική περίπτωση $\tau=1/2$.

Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της συνάρτησης Green σε μακρινές αποστάσεις από τη πηγή

Το ιδιόμορφο μέρος της συνάρτησης Green, Εξ.(6α), έχει μονότονη συμπεριφορά και εξασθενεί γρήγορα σε μακρινές αποστάσεις από την πηγή $|\mathbf{r} - \mathbf{p}| \rightarrow \infty$, με ρυθμό ανάλογο $O(|\mathbf{r} - \mathbf{p}|^{-2})$. Η κυματική συμπεριφορά του πεδίου περιγράφεται αποκλειστικά από το ομαλό μέρος της συνάρτησης Green, το οποίο παρέχεται από την Εξ. (20). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι η πηγή να βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα ($\xi = 0, \eta = 0$)

$$\begin{aligned} H(x, y, z | \xi = 0, \eta = 0, \zeta) &= \frac{2g}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dk \frac{k e^{k(z+\zeta) + jkx \cos \theta} \cos(ky \sin \theta)}{kg - (\omega + kU \cos \theta)^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{k(z+\zeta)} \frac{e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}}}{\mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega)} dk_x dk_y, \end{aligned} \quad (31)$$

όπου $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$, $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\mathbf{R} = (x, y)$. Για την παραγωγή της τελευταίας έκφρασης το ολοκλήρωμα Fourier στο πεδίο του κυματαριθμού ξαναγράφεται από πολικό σε καρτεσιανό σύστημα (βλ. Εξ.9) και χρησιμοποιείται και η Εξ. (19α), από όπου παρήχθη η σχέση διασποράς. Από τη δομή της ολοκληρωτέας ποσότητας παρατηρούμε την εκθετική εξασθένηση του πεδίου (31) με το βάθος ($z < 0$). Επομένως αξίζει να εστιασθούμε στη διερεύνηση της ασυμπτωτικής του συμπεριφοράς για σημεία $\mathbf{R} = (x, y)$ πάνω στην επιφάνεια $z=0$, σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις $R = |\mathbf{R}| \rightarrow \infty$.

Ένα σημαντικό θεώρημα από τον Lighthill (1960b) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων Fourier όπως το ανωτέρω, Εξ.(31), με τη μέθοδο της στάσιμης φάσης (βλ. π.χ. Sidorov & Fedoryuk 1985) ως ακολούθως

$$H(R \cos \phi, R \sin \phi, z = 0) \approx \sum_s \frac{e^{j\mathbf{k}\mathbf{R}}}{\sqrt{|K|} R} \frac{f}{\nabla_k \mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (32)$$

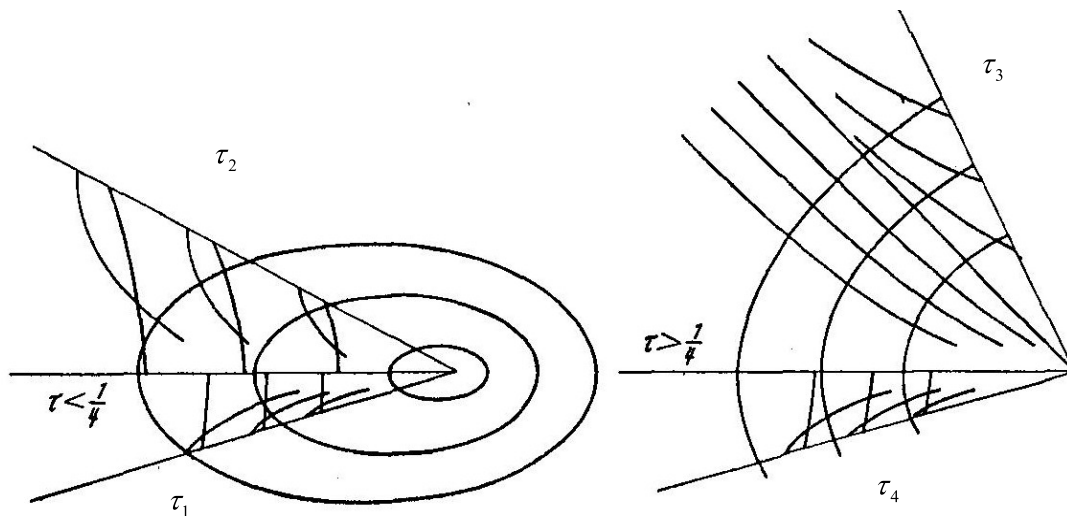
όπου ϕ η πολική γωνία (διεύθυνση στο οριζόντιο επίπεδο) ως προς την οποία εξετάζουμε τη συμπεριφορά του κυματικού πεδίου σε μακρινή απόσταση από την αρχή (θέση πηγής) και το άθροισμα αναφέρεται σε όλα τα σημεία (s) πάνω στην καμπύλη $\mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ (ή ισοδύναμα $\omega = \omega(\mathbf{k})$) όπου η κάθετος είναι παράλληλη προς την διεύθυνση ϕ . Επίσης, $|K|$ στην Εξ.(32) είναι το μέτρο της καμπυλότητας στα σημεία (s) πάνω στη καμπύλη $\mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ που αποτελούν σημεία στασιμότητας της φάσης ($\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial k_x} \sin \phi - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial k_y} \cos \phi = 0$), και f είναι

κατάλληλος συντελεστής πλάτους. Η μέθοδος της στάσιμης φάσης μας επιτρέπει να λάβουμε αποτελέσματα σε πρώτης τάξεως προσέγγιση, όπως εκφράζονται από την Εξ. (32), από όπου παρατηρούμε ότι όπου προκύπτουν σημεία στασιμότητας της φάσης (s) η ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου είναι $O(R^{-1/2})$. Όπως θα δούμε πιο αναλυτικά στη συνέχεια,

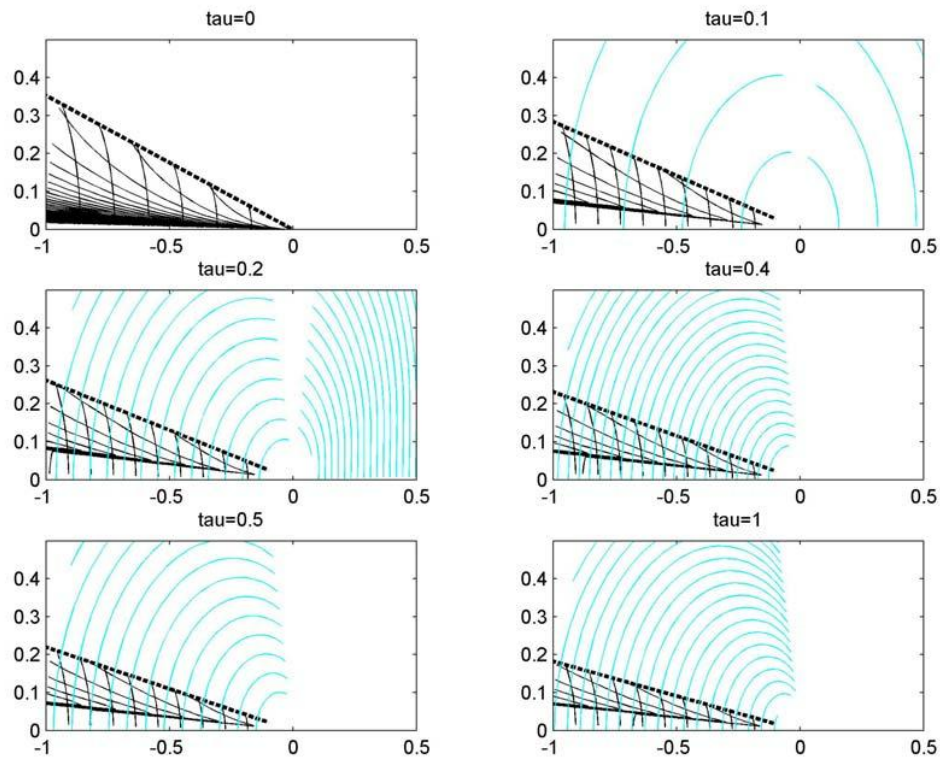
σημεία στασιμότητας της φάσης δεν υπάρχουν σε κάθε περίπτωση (δηλ. για κάθε τιμή του τ) και για όλες τις δυνατές διευθύνσεις. Σε αυτές τις καταστάσεις (όταν δεν υπάρχει σημείο στασιμότητας) το πεδίο εξασθενεί πολύ γρηγορότερα σε μεγάλες αποστάσεις από τη πηγή. Αρκετά πιο ισχυρά αποτελέσματα σε ότι αφορά τη τάξη της προσέγγισης μπορεί να ληφθούν χρησιμοποιώντας τεχνικές εκτίμησης των εμπλεκόμενων Fourier ολοκληρωμάτων με ιδιομορφίες στο μιγαδικό επίπεδο (βλ. π.χ. Lighthill 1960, Wehause & Laitone 1960, Sec.13). Σχετικά αποτελέσματα που ελήφθησαν με τη τεχνική αυτή για το εξεταζόμενο πρόβλημα παρουσιάζονται στην πρόσφατη εργασία Noblesse & Yang (2004).

Η εξέταση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της συνάρτησης Green του γραμμικοποιημένου (U, ω) -προβλήματος, για μακρινές αποστάσεις από την πηγή, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που αντιστοιχεί στην θέση ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας, δείχνει ότι το μακρινό πεδίο συνίσταται ουσιαστικά από την υπέρθεση τριών συστημάτων κυματισμών, όπως εικονίζεται στα Σχήματα 7 και 8, μέσω των ισοφασικών επιφανειών (π.χ. των επιφανειών που αντιστοιχούν στις κορυφές του κάθε συστήματος κυματισμών). Το αριστερό σχήμα αντιστοιχεί στην **υποκριτική περίπτωση**, $\tau < 1/4$, και εμφανίζονται δύο περιπτώσεις $\tau_1 < \tau_2 < 1/4$, όπου σε κάθε περίπτωση εικονίζεται μόνο το συμμετρικό τμήμα του πεδίου ως προς τον άξονα κίνησης της πηγής. Το δεξιό σχήμα αντιστοιχεί στην **υπερκριτική περίπτωση**, $\tau > 1/4$, όπου και πάλι εμφανίζονται τα συμμετρικά τμήματα του πεδίου σε δύο περιπτώσεις $\tau_4 > \tau_3 > 1/4$.

Παρατηρούμε ότι στην υποκριτική περίπτωση εκτός από συστήματα τύπου εγκαρσίων και αποκλινόντων κυματισμών, τα οποία περιορίζονται σε γωνιακούς τομείς πίσω από την κινούμενη πηγή (δηλαδή στα κατάντη της ροής), υπάρχει και σύστημα κυματισμών που διαδίδεται με φασική ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας της πηγής, και επομένως υπάρχει και μπροστά από την κινούμενη πηγή (δηλαδή στα ανάντη της ροής). Με την σχετική αύξηση της ταχύτητας της πηγής, δηλαδή αύξηση της παραμέτρου τ έως του ορίου $\tau = 1/4$, ο γωνιακός τομέας μέσα στον οποίο περιορίζονται τα συστήματα τύπου εγκαρσίων και αποκλινόντων κυματισμών πίσω από την πηγή διευρύνεται συνεχώς, έως του ορίου να καταστεί κάθετος στον άξονα κίνησης της πηγής.



Σχήμα 7: Ισοφασικές επιφάνειες των συστημάτων κυματισμών της κινούμενης-παλλόμενης πηγής στην υποκριτική (αριστερά) και υπερκριτική (δεξιά) περίπτωση.



Σχήμα 8: Ισοφασικές επιφάνειες των συστημάτων κυματισμών της κινούμενης-παλλόμενης πηγής σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις από τη πηγή, σε διάφορες (υποκριτικές/υπερκριτικές) περιπτώσεις, όπως υπολογίζονται με τη μέθοδο της στάσιμης φάσης.

Στην υπερκριτική περίπτωση ($\tau > 1/4$) κανένα από τα συστήματα κυματισμών δεν διαθέτει μεγαλύτερη ταχύτητα διάδοσης από την ταχύτητα κίνησης της πηγής, και ως εκ τούτου, οι παραγόμενοι κυματισμοί περιορίζονται σε γωνιακό τομέα πίσω από την πηγή, ο οποίος στενεύει με σχετική αύξηση της ταχύτητας της πηγής, δηλαδή με αύξηση της παραμέτρου τ .

Βιβλιογραφία Εδαφίου 3.7

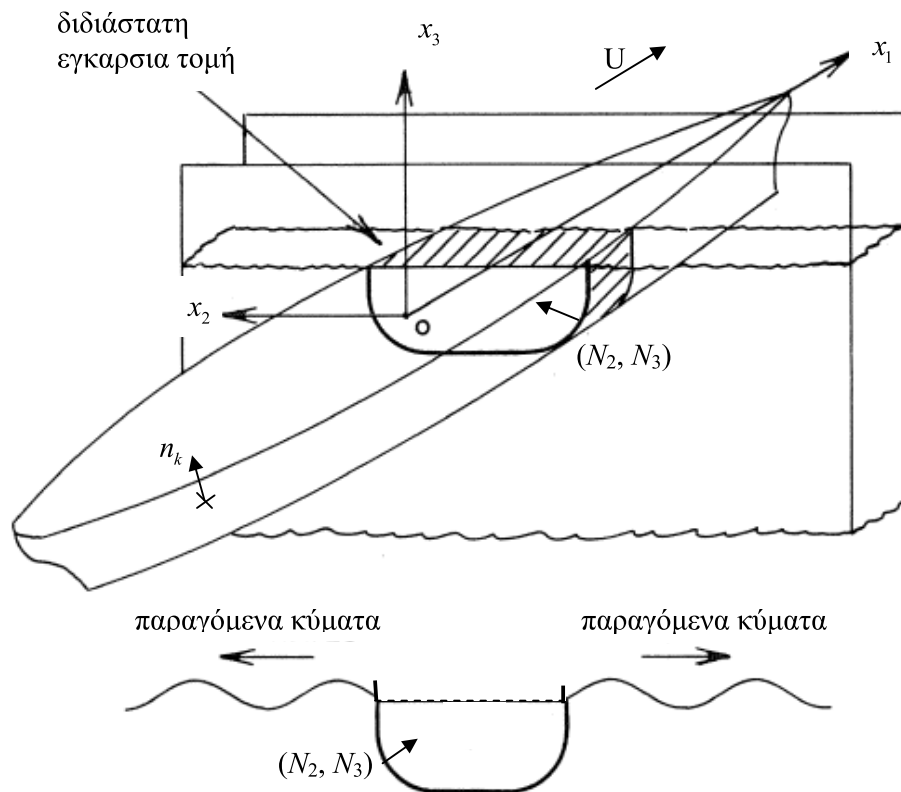
- **Churchill, R.V.**, “*Operational Mathematics*”, McGraw-Hill, Inc., Third Edition **1972**
- **Gelfand, I.M., Shilov, G.E., et al.**, “*Generalised Functions*”, Vol. 1-5, Academic Press, **1964-1966**
- **Hoff, J.R.**, “*Three-Dimensional Green Function of a Vessel with Forward Speed in Waves*”, PhD Thesis, Universitetet I Trondheim, Norway, **1990**
- **Hoskins, R.F.**, “*Generalised Functions*”, Ellis Horwood Limited, **1979**
- **Inglis, R.B., Price, W.G.**, “*Calculation of the Velocity Potential of a Translating, Pulsating Source*”, The Royal Institution of Naval Architects, **1980**
- **Kostyukov, A.A.**, “*Theory of Ship Waves and Wave Resistance*”, Transl. from Russian by Max Oppenheimer, Jr., Transl. edited by L. Landweber and J.N. Newman, Effective Communications Inc., Iowa City, **1968**. (Orig. Russian edition published in 1959)

- **Lighthill, M.**, “*Fourier Analysis and Generalised Functions*”, Cambridge University Press, **1960**
- **Lighthill, M.**, “*Studies on Magneto-Hydrodynamic Waves and other Anisotropic Waves*” Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 252, pp. 397-430, **1960**
- **Newman, J.N.**, “*Evaluation of the Wave-Resistance Green Function. Part 1: The Double Integral, Part 2: The single Integral on the Centerplane*”, J. Ship Research, Vol. 31, pp. 79-90 and 145-150, **1987**
- **Noblesse, F.**, “*The Fundamental Solution on the Theory of Steady Motion of a Ship*”, J. of Ship Res. Vol. 21, pp. 82-88, **1977**
- **Noblesse F., Yang C.**, “*A Simple Green Function for Diffraction-Radiation of Time-Harmonic Waves with Forward Speed*”, Ship Technology Research Vol. 51, pp. 35-52, **2004**
- **Peters S, Stoker J.J.**, “*The Motion of a Ship, as a Floating Rigid Body, in a Seaway*” Communications Pure and Applied Mathematics, Vol.. X, 399-490, **1957**
- **Sidorov Y.V., Fedoryuk M.V, Shabunin M.I.**, *Lectures on the Theory of Complex Functions*, MIR, Moscow, **1985**.
- **Sneddon, I.N.**, “*Fourier Transforms*”, McGraw-Hill, Inc., **1951**, Dover Editions, **1995**
- **Stoker, J.J.**, “*Water Waves. The Mathematical Theory and Applications*”, Interscience **1957**
- **Wehausen, J.V., Laitone, E.V.**, “*Surface Waves*”, Handbuch der Physik, Vol. 9, Springer Verlag, Berlin, **1960**
- **Wu, G.X., Taylor, R.E.**, “*A Green’s Function Form for Ship Motions at Forward Speed*”, Int. Shipbuilding Progress, Vol. 34, No. 384, pp. 189-196, **1987**

Παράρτημα: Πρόσθετες μάζες, αποσβέσεις και φορτίσεις επιμήκων σωμάτων κινουμένων με σταθερή ταχύτητα. Θεωρία λωρίδων

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη θεωρία λωρίδων (strip theory) για τον υπολογισμό των προσθέτων μαζών, αποσβέσεων και φορτίσεων πλωτών επιμήκων σωμάτων που διαθέτουν κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας, τα οποία κινούνται με σταθερή πρόσω ταχύτητα U . Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε σε διάφορες παραλλαγές από την δεκαετία του 60, και για μια σύντομη βιβλιογραφική και ιστορική επισκόπηση παραπέμπουμε στο σύγγραμμα *Principles of Naval Architecture* (Lewis, Ed., 1989, vol.III, sec.3.4). Όπως και στο προηγούμενο Κεφάλαιο, θα κινηθούμε στα βήματα της εργασίας των Salvesen, Tuck & Faltinsen (1970).

Το πλοίο (βλ. Σχ.1) δεν παρουσιάζει εγκάρσια κλίση (στη μέση κατάσταση ισορροπίας) και δέχεται την επίδραση κυματισμών ταλαντούμενο στην επιφάνεια του νερού. Ειδικά για τη περίπτωση του πλοίου στο εδάφιο αυτό θα θεωρήσουμε βαθύ νερό. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι το πλάτος (B) και το βύθισμα (T) του πλοίου είναι πολύ μικρότερα από το μήκος του (L), δηλαδή ότι το σώμα είναι μακρύ και λεπτόγραμμο (slender body). Σημειώνουμε εδώ ότι οι συνηθισμένες γάστρες των πλοίων ικανοποιούν τις ανωτέρω υποθέσεις (π.χ. $5.5 < L/B < 9$, $2 < B/T < 4$), φυσικά με εξαιρέσεις που αφορούν ειδικούς τύπους κατασκευών.



Σχήμα 1. Εγκάρσιες τομές πλοίου που ταλαντώνεται λόγω προσπίπτοντος κυματισμού στην επιφάνεια του νερού, ενώ κινείται με σταθερή πρόσω ταχύτητα U .

Στα πλαίσια του γραμμικού προβλήματος, το οποίο αναπτύχθηκε λεπτομερώς στα προηγούμενα εδάφια του παρόντος Κεφαλαίου, το συνολικό δυναμικό της ροής $\Phi(x_1, x_2, x_3; t)$ στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων που κινείται με τη μέση ταχύτητα U του πλοίου διαχωρίζεται σε δύο μέρη: ένα χρονικά ανεξάρτητο $\Phi_S(x_1, x_2, x_3)$, το οποίο σχετίζεται με τη ροή εξ' αιτίας της μέσης κίνησης του πλοίου, και ένα αρμονικά εξαρτώμενο $\Phi_T(x_1, x_2, x_3; t)$ από το χρόνο, εξ' αιτίας των ταλαντώσεων του πλοίου από τη δράση του προσπίπτοντος κυματισμού, ως ακολούθως

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \left(-Ux_1 + \Phi_S(x_1, x_2, x_3)\right) + \text{Re}\left(\Phi_U(x_1, x_2, x_3)e^{j\omega t}\right), \quad (1)$$

Ακολουθώντας παραπλήσια προσέγγιση με αυτή του Κεφαλαίου 2 για τις ταλαντώσεις πλωτού σώματος, το αρμονικά εξαρτώμενο δυναμικό αναλύεται στο δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού, στο δυναμικό περίθλασης και στα δυναμικά ακτινοβολίας που σχετίζονται με τις δυνατές ταλαντωτικές κινήσεις ($\xi_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, 6$) ως

$$\Phi_T(\mathbf{x}) = \Phi_I(\mathbf{x}) + \Phi_D(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^6 j\omega\xi_k\Phi_k(\mathbf{x}), \quad (2a)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $\Phi_I(\mathbf{x}) + \Phi_D(\mathbf{x}) = j\omega A(\Phi_0(\mathbf{x}) + \Phi_d(\mathbf{x}))$, και A το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας του προσπίπτοντος κυματισμού (βλ. Εδαφ.2.2). Στην παραπάνω σχέση ω είναι η συχνότητα συναντήσεως

$$\omega = \left| \omega_0 - Uk_0 \cos\beta \right|, \quad (2b)$$

όπου $k_0 = \omega_0^2 / g$ ο κυματαριθμός, β η γωνία που δηλώνει τη διεύθυνση διάδοσης του κυματισμού, και ω_0 είναι η απόλυτη συχνότητα.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω Εξ.(1) και (2) στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει ότι το χρονικά ανεξάρτητο δυναμικό Φ_S ικανοποιεί στη μέση θέση της ελεύθερης επιφάνειας (∂D_F) τη γραμμικοποιημένη συνθήκη

$$\frac{U^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (3a)$$

και για σημεία επάνω στη μέση θέση του βρεχόμενου τμήματος της γάστρας του πλοίου (∂D_B)

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = Un_1, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad (3b)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ το κάθετο διάνυσμα, με διεύθυνση προς το εσωτερικό της γάστρας (βλ. Σχ.1). Αντίστοιχα, το δυναμικό περίθλασης Φ_D ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi_D + g \frac{\partial \Phi_D}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad (4\alpha)$$

και

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_I}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B. \quad (4\beta)$$

Τέλος, τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi_k + g \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (5\alpha)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = n_k + \frac{U}{j\omega} m_k, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (5\beta)$$

Οι ποσότητες m_k που εμφανίζονται στην ανωτέρω συνθήκη ορίζονται επίσης συναρτήσει των παραγώγων της σχετικής ταχύτητας ροής \mathbf{w} του χρονικά ανεξάρτητου προβλήματος, λόγω της μέσης κίνησης του πλοίου (με σταθερή πρόσω ταχύτητα U), για σημεία πάνω στη μέση θέση του βρεχόμενου τμήματος της γάστρας του πλοίου (∂D_F)

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \left(-U + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_1} \right), \quad \mathbf{x} \in \partial D_F, \quad (6)$$

και παρέχονται από τις σχέσεις

$$Um_k = -\sum_{\ell=1}^3 n_\ell \frac{\partial w_k}{\partial x_\ell}, \quad \text{για } k = 1, 2, 3, \quad \text{και } Um_k = -\sum_{\ell=1}^3 n_\ell \frac{\partial (\mathbf{r} \times \mathbf{w})_{k-3}}{\partial x_\ell}, \quad \text{για } k = 4, 5, 6, \quad (7)$$

(βλ., π.χ. Ohkusu 1996). Υπολογίζοντας αναλυτικά τους ανωτέρω όρους έχουμε για $k = 1, 2, 3$,

$$Um_1 = -\left(n_1 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1^2} + n_2 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1 \partial x_2} + n_3 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \quad (8\alpha)$$

$$Um_2 = -\left(n_1 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1 \partial x_2} + n_2 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_2^2} + n_3 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (8\beta)$$

$$Um_3 = -\left(n_1 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_1 \partial x_3} + n_2 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_2 \partial x_3} + n_3 \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_3^2} \right), \quad (8\gamma)$$

και για $k = 4, 5, 6$

$$Um_4 = -\sum_{\ell=1}^3 n_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_2} \right), \quad (9\alpha)$$

$$Um_5 = -\sum_{\ell=1}^3 n_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(-x_1 \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_3} + x_3 \left(-U + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_1} \right) \right), \quad (9\beta)$$

$$Um_6 = -\sum_{\ell=1}^3 n_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(x_1 \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_2} - x_2 \left(-U + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_1} \right) \right). \quad (9\gamma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι, εκτός των m_5 και m_6 , περιλαμβάνουν αποκλειστικά ανώτερης τάξης παραγώγους του δυναμικού διαταραχής λόγω της κίνησης του πλοίου με σταθερή ταχύτητα $\Phi_S(x_1, x_2, x_3)$, και ως εκ τούτου είναι απειροστοί ανώτερης τάξης και μπορεί να παραληφθούν στα πλαίσια της γραμμικής προσέγγισης. Έτσι προκύπτει ότι μόνο οι όροι m_5 και m_6 είναι σημαντικοί,

$$m_k \approx 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad m_5 \approx n_3 \quad \text{και} \quad m_6 \approx -n_2. \quad (10)$$

Παρατηρώντας την συνοριακή συνθήκη (5β) για τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k , που είναι και η μοναδική μη ομογενής εξίσωση των αντιστοίχων προβλημάτων, μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις των προβλημάτων αυτών στη μορφή

$$\Phi_k = \Phi_k^0 + \frac{U}{j\omega} \Phi_k^U, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (11)$$

όπου τα Φ_k^0 ικανοποιούν το πρώτο μέρος της συνθήκης: $\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial n} = n_k$, και τα Φ_k^U το

δεύτερο μέρος: $\frac{\partial \Phi_k^U}{\partial n} = m_k$, $k = 1, 2, \dots, 6$, αντίστοιχα. Με βάση τη προσέγγιση που δίνεται από τη σχέση (10) καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για τα δυναμικά ακτινοβολίας Φ_k^U

$$\Phi_k^U \approx 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \Phi_5^U \approx \Phi_3^0, \quad \Phi_6^U \approx -\Phi_2^0. \quad (12)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι δυναμικά ακτινοβολίας εκφράζονται τελικά μέσω των βοηθητικών δυναμικών ακτινοβολίας Φ_k^0 (τα οποία δεν εξαρτώνται από τη ταχύτητα U του πλοίου). Οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν επάνω στη μέση θέση του βρεχόμενου τμήματος της γάστρας του πλοίου (∂D_F) την ίδια συνθήκη, όπως και στη περίπτωση του πλωτού ταλαντευόμενου σώματος χωρίς μέση ταχύτητα (βλ. Κεφ.2),

$$\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial n} = n_k, \quad \mathbf{x} \in \partial D_B, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (13\alpha)$$

και πάνω στη μέση θέση της ελεύθερης επιφάνειας (∂D_F) τη συνοριακή συνθήκη

$$\left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \Phi_k^0 + g \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (13\beta)$$

1. Υπολογισμός υδροδυναμικών συντελεστών

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι, στην εξεταζόμενη περίπτωση πλοίου κινούμενου με σταθερή μέση ταχύτητα U , η εξίσωση Bernoulli, στη γραμμικοποιημένη της εκδοχή, οδηγεί στην παρακάτω τροποποιημένη έκφραση υπολογισμού των υδροδυναμικών συντελεστών του πλοίου

$$\rho\omega^2 \iint_{\partial D_B} n_l \left(1 - \frac{U}{j\omega} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \Phi_k dS = \rho\omega^2 \iint_{\partial D_B} n_l \left(1 - \frac{U}{j\omega} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\Phi_k^0 + \frac{U}{j\omega} \Phi_k^U\right) dS, \quad l, k = 1, 6, (14)$$

όπου τα Φ_k^U δίνονται από τη σχέση (12). Για λεπτόγραμμα πλοία που δεν διαθέτουν πεπερασμένη εγκάρσια τομή στη πρύμνη (όπως π.χ. μπορεί να συμβεί στη περίπτωση πλοίου με transom stern που είναι βυθισμένο κάτω από τη ίσαλο), χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα Stokes μπορεί ναδειχθεί ισχύει η ακόλουθη χρήσιμη σχέση (βλ. και Salvesen, et al 1970)

$$\iint_{\partial D_B} n_l U \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_1} dS = U \iint_{\partial D_B} m_l \Phi_k^0 dS, \quad k = 1, 2, \dots, 6, (15)$$

με τη βοήθεια της οποίας οι δυνάμεις ακτινοβολίας (που εμπλέκουν τους υδροδυναμικούς συντελεστές) γράφονται στη παρακάτω μορφή:

$$\frac{X_{lk}}{\omega^2} = \Pi_{lk}^0 = \rho \iint_{\partial D_B} n_l \Phi_k^0 dS, \quad l, k = 1, 2, 3, 4, (16\alpha)$$

$$\frac{X_{lk}}{\omega^2} = \Pi_{lk}^0 - \frac{U}{j\omega} \rho \iint_{\partial D_B} m_l \Phi_k^0 dS = \begin{cases} \Pi_{lk}^0 - \frac{U}{j\omega} \Pi_{k3}^0, & l = 5, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ \Pi_{lk}^0 + \frac{U}{j\omega} \Pi_{k2}^0, & l = 6, \quad k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}, (16\beta)$$

$$\frac{X_{lk}}{\omega^2} = \Pi_{lk}^0 - \frac{U}{j\omega} \rho \iint_{\partial D_B} n_l \Phi_k^0 dS = \begin{cases} \Pi_{lk}^0 + \frac{U}{j\omega} \Pi_{3l}^0, & l = 1, 2, 3, 4, \quad k = 5 \\ \Pi_{lk}^0 - \frac{U}{j\omega} \Pi_{2l}^0, & l = 1, 2, 3, 4, \quad k = 6 \end{cases}, (16\gamma)$$

$$\frac{X_{lk}}{\omega^2} = \Pi_{lk}^0 + \frac{U^2}{\omega^2} \rho \iint_{\partial D_B} m_l \Phi_k^0 dS = \begin{cases} \Pi_{lk}^0 + \frac{U^2}{\omega^2} \Pi_{33}^0, & l = k = 5 \\ \Pi_{lk}^0 + \frac{U^2}{\omega^2} \Pi_{22}^0, & l = k = 6 \end{cases}. (16\delta)$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί και οι προσεγγίσεις (10), (12). Στις σχέσεις (16β,γ,δ) οι εμφανιζόμενοι συντελεστές Π_{lk}^0 δίνονται από την ίδια σχέση ορισμού όπως στην Εξ. (16α). Εκ των ανωτέρω σχέσεων συνάγουμε ότι όλοι οι υδροδυναμικοί συντελεστές

εκφράζονται συναρτήσεις των αντιστοίχων ποσοτήτων Π_{lk}^0 που εμπλέκουν μόνο τα δυναμικά Φ_k^0 ,

$$\Pi_{lk}^0 = \rho \iint_{\partial D_B} n_l \Phi_k^0 dS, \quad l, k = 1, 2, \dots, 6 \quad . \quad (17)$$

Για πλοία με λεπτόγραμμη γάστρα τα επιφανειακά ολοκληρώματα στην ανωτέρω σχέση γράφονται επίσης στη μορφή

$$\rho \iint_{\partial D_B} n_l \Phi_k^0 dS = \rho \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} n_l \Phi_k^0 ds, \quad k, l = 1, 2, \dots, 6, \quad (18)$$

όπου με $C(x_1)$ συμβολίζουμε την βρεχόμενη περίμετρο της εγκάρσιας τομής σε κάθε θέση x_1 κατά το μήκος του σώματος (η οποία διαφοροποιείται από θέση σε θέση), και το διάμηκες ολοκλήρωμα στο τελευταίο δεξιά μέλος της σχέσης (18) διατρέχει όλο το μήκος του πλοίου. Στην ανωτέρω εξίσωση dS είναι το επιφανειακό διαφορικό στη γάστρα και ds το επικαμπύλιο διαφορικό κατά μήκος της περιμέτρου της κάθε εγκάρσιας τομής. Λόγω της υποθέσεως του λεπτόγραμμου σχήματος του πλοίου, μπορούμε να δεχθούμε προσεγγιστικά ότι στη γειτονιά της βρεχόμενης επιφάνειας της γάστρας οι μεταβολές της γεωμετρίας της, αλλά και οι παράγωγοι των κυματικών πεδίων ακτινοβολίας ως προς την x_1 -διεύθυνση (δηλαδή η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας), είναι πολύ μικρότερες από τα αντίστοιχα μεγέθη (μεταβολές γεωμετρίας και συνιστώσες ταχύτητας) ως προς τις άλλες διευθύνσεις, και επομένως, θα μπορούσαν προσεγγιστικά να παραληφθούν.

Κατά την ανωτέρω έννοια, ισχύει η ακόλουθη σχέση όσον αφορά τις συνιστώσες του καθέτου διανύσματος στη βρεχόμενη επιφάνεια του θεωρούμενου επιμήκους, λεπτόγραμμου σώματος

$$n_1 \ll n_2 \text{ και } n_3, \quad (19)$$

και επομένως μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά

$$n_k(x_1, x_2, x_3) \approx N_k(x_2, x_3; x_1), \quad k = 2, 3, 4, \quad (20\alpha)$$

$$n_5(x_1, x_2, x_3) \approx -x_1 N_3(x_2, x_3; x_1) \quad \text{και} \quad (20\beta)$$

$$n_6(x_1, x_2, x_3) \approx x_1 N_2(x_2, x_3; x_1), \quad (20\gamma)$$

όπου $N_k(x_2, x_3; x_1)$, $k = 2, 3$, είναι οι συνιστώσες του αντίστοιχου καθέτου διανύσματος στο βρεχόμενο τμήμα της κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής, που εξαρτώνται κατά συνέπεια από τη μορφή της και επομένως εξαρτώνται παραμετρικά από την x_1 -μεταβλητή (βλ. Σχήμα 1). Επιπροσθέτως, έχουμε

$$N_4(x_2, x_3; x_1) = x_3 N_2(x_2, x_3; x_1) - x_2 N_3(x_2, x_3; x_1) \quad . \quad (21)$$

Επίσης, κατ'αντιστοιχία, μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά για τα δυναμικά

$$\Phi_l^0(x_1, x_2, x_3) \approx \varphi_l(x_2, x_3; x_1), \quad l = 2, 3, 4, \quad (22)$$

δηλώνοντας και εδώ την παραμετρική τους εξάρτηση από την x_1 -μεταβλητή. Τέλος, από τις προσεγγίσεις των n_5 και n_6 (βλ. Εξ. 20) που αποτελούν και τους μη ομογενείς όρους των προβλημάτων που αφορούν τα δυναμικά $\Phi_l^0(\mathbf{x})$, $l = 5, 6$ (pitch και yaw), αντίστοιχα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\Phi_5^0(x_1, x_2, x_3) \approx -x_1 \varphi_3(x_2, x_3; x_1), \quad \Phi_6^0(x_1, x_2, x_3) \approx x_1 \varphi_2(x_2, x_3; x_1). \quad (23)$$

Επιπροσθέτως, θα θεωρήσουμε ότι λόγω του λεπτόγραμμου σχήματος της γάστρας του πλοίου όλα τα ανωτέρω διδιάστατα δυναμικά $\varphi_l(x_2, x_3; x_1)$ μεταβάλλονται πολύ αργά κατά την έννοια του μήκους του πλοίου $\partial \varphi_l / \partial x_1 \approx 0$, πράγμα που μας επιτρέπει να απλουστεύσουμε την συνθήκη (13β) στην ελεύθερη επιφάνεια που αυτά ικανοποιούν, αμελώντας τις x_1 -παραγώγους, και γράφοντας την προσεγγιστικά στην ακόλουθη μορφή

$$-\omega^2 \varphi_k + g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_3} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D_F: x_3 = 0, \quad k = 2, 3, 4. \quad (24)$$

Με βάση όλα τα ανωτέρω, οι υδροδυναμικοί συντελεστές του πλωτού επιμήκους σώματος για $k, l = 2, 3, 4$, προσεγγίζονται ως

$$\Pi_{lk}^0 \equiv \rho \iint_{\partial D_B} n_l \Phi_k^0 dS \quad \rho \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \varphi_k N_l ds \equiv \int_L \varpi_{kl}(x_1) dx_1, \quad k, l = 2, 3, 4, \quad (25\alpha)$$

όπου $\varpi_{kl}(x_1)$ οι υδροδυναμικοί συντελεστές κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής

$$\varpi_{kl}(x_1) = \int_{C(x_1)} \varphi_k N_l ds = \alpha_{kl}(x_1) + \frac{\beta_{kl}(x_1)}{j\omega}, \quad (25\beta)$$

και α_{kl} , β_{kl} οι συντελεστές πρόσθετης μάζας και απόσβεσης της, αντίστοιχα.

Λόγω της συμμετρίας του πλοίου ως προς το κατακόρυφο επίπεδο το N_3 είναι συμμετρικό, ενώ τα N_2 , N_4 είναι αντισυμμετρικά. Επομένως, το δυναμικό φ_3 είναι επίσης συμμετρικό, ενώ τα δυναμικά φ_2 , φ_4 είναι αντισυμμετρικά. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με την ανωτέρω σχέση συνεπάγεται ότι $a_{32} = a_{34} = 0$ και $b_{32} = b_{34} = 0$ (καθώς και $a_{23} = a_{43} = 0$ και $b_{23} = b_{43} = 0$).

Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (23) στην Εξ.(18) λαμβάνουμε

$$\Pi_{26}^0 \approx \int_L x_1 \varpi_{22}(x_1) dx_1, \quad \Pi_{66}^0 \approx - \int_L (x_1)^2 \varpi_{22}(x_1) dx_1, \quad (26\alpha)$$

$$\Pi_{35}^0 \approx - \int_L x_1 \varpi_{33}(x_1) dx_1, \quad \Pi_{55}^0 \approx \int_L (x_1)^2 \varpi_{33}(x_1) dx_1, \quad (26\beta)$$

$$\Pi_{46}^0 \approx \int_L x_1 \varpi_{24}(x_1) dx_1 \quad . \quad (26\gamma)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε, στα πλαίσια της ακολουθούμενης προσέγγισης, τους (πρακτικά μη μηδενικούς) υδροδυναμικούς συντελεστές του τριδιάστατου λεπτόγραμμου πλοίου, οι οποίοι συμμετέχουν στις εξισώσεις κίνησης, από ολοκλήρωση των αντιστοίχων διδιάστατων κατά μήκος του σώματος. Οι τελευταίοι συντελεστές καθορίζονται από την επίλυση διδιάστατων προβλημάτων για τα δυναμικά $\varphi_l(x_2, x_3; x_1)$, $l=2,3,4$, που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace, στο κατακόρυφο επίπεδο κάθε εγκάρσιας τομής

$$\frac{\partial^2 \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_3^2} = 0, \quad (27)$$

την απλουστευμένη συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (βλ. Εξ.24)

$$\frac{\partial \varphi_l(x_2, x_3; x_1)}{\partial x_3} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_l(x_2, x_3; x_1) = 0, \quad (28)$$

όπου υπευθυμίζουμε ότι ω είναι η συχνότητα συνάντησης, τη συνθήκη στη βρεχόμενη περίμετρο της κάθε εγκάρσιας τομής $\partial D_B(x_1)$,

$$\frac{\partial \varphi_l(x_2, x_3 = -h; x_1)}{\partial N} = N_l(x_2, x_3), \quad (x_2, x_3) \in \partial D_B(x_1) \quad (29)$$

καθώς και κατάλληλες συνθήκες στο άπειρο, οι οποίες απαιτούν σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις από το σώμα ($|x_2| \rightarrow \infty$) τα δυναμικά $\varphi_l(x_2, x_3)$ να συμπεριφέρονται ως απομακρυνόμενα κύματα συχνότητας ω , και να εξασθενούν εκθετικά με το βάθος ($x_3 \rightarrow -\infty$). Η επίλυση των ανωτέρω διδιάστατων προβλημάτων είναι πολύ ευκολότερη από τα αντίστοιχα τριδιάστατα προβλήματα. Η ευρεία ανάπτυξη των υπολογιστών έχει οδηγήσει σήμερα στην αποτελεσματική εφαρμογή μεθόδων συνοριακών στοιχείων (BEM) για το σκοπό αυτό, που έχουν το πλεονέκτημα να χειρίζονται με ακρίβεια τις γεωμετρικές λεπτομέρειες των εγκαρσίων τομών του πλοίου. Οι διάφορες παραλλαγές των μεθόδων αυτών, όπως εξειδικεύονται για βαθύ νερό, συνίστανται στη μορφή της συνάρτησης Green που χρησιμοποιείται, η οποία μπορεί να ικανοποιεί καμιά ή κάποιες από συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, και οδηγεί σε συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις με φορέα όλο σύνορο ή μέρος του συνόρου αντίστοιχα, όπως αναλύθηκε διεξοδικά στο αντίστοιχο εδάφιο του Κεφ.2; βλ. σχετ. και Vughts (1968), Lewandowski (2004). Στην πρώτη περίπτωση η μέθοδος εφαρμόζεται σε συνδυασμό με διαχωρισμό του

χωρίου και τη χρήση των γενικών αναπαραστάσεων της λύσης στο μη φραγμένο τμήμα του χωρίου, όπως παρουσιάστηκε αντίστοιχα στο εδάφιο 2.10 για το διδιάστατο πλωτό σώμα.

Αξίζει περαιτέρω να αναφέρουμε εδώ και τη κατηγορία των μεθόδων που βασίζονται στη τεχνική της σύμμορφης απεικόνισης, η οποία ήταν ευρέως διαδεδομένη τεχνική στο παρελθόν, λόγω της απλούστευσης και ταχύτητας που προσφέρει στον υπολογισμό των αποτελεσμάτων. Στη κατηγορία αυτή εντάσσονται οι μορφές Lewis (βλ. *Principles of Naval Architecture*, vol.III, sec.3.5), όπου στη γενική μορφή του αναπτύγματος Laurent της μορφής: $\zeta = f(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell} z^{2-\ell}$, για τον ορισμό της

απεικόνισης της εγκάρσιας τομής (μαζί με το συμμετρικό της τμήμα πάνω από την ίσαλο) σε κύκλο, διατηρούνται οι τρεις μόνο πρώτοι, περιττής τάξεως όροι

$$\zeta = f(z) = c_1 z^1 + c_3 z^{-1} + c_5 z^{-3}. \quad (30\alpha)$$

Οι συντελεστές στην Εξ.(30) συνδέονται απευθείας με τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της (κάθε) εγκάρσιας τομής, ως ακολούθως

$$c_1 = 0.5(\lambda + 1)T - c_5 T, \quad c_3 = 0.5(\lambda - 1)T, \quad (30\beta)$$

$$c_5 = -0.25(\lambda + 1)T + 0.25\{(\lambda + 1)^2 + 8\lambda(1 - 4\sigma/\pi)\}^{1/2}, \quad (30\gamma)$$

όπου $\lambda = 0.5B(x_1)/T$, $\sigma = S_x(x_1)/(B(x_1)T)$, $B(x_1)$ και $S_x(x_1)$ το πλάτος και το εμβαδόν της κάθε εγκάρσιας τομής, αντίστοιχα, και T είναι το βύθισμα του πλοίου. Ενδεικτικά, στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται διάφορες παραλλαγές της οικογένειας μορφών Lewis, για διάφορες τιμές του λόγου B/T και $\sigma = S_x/BT$.

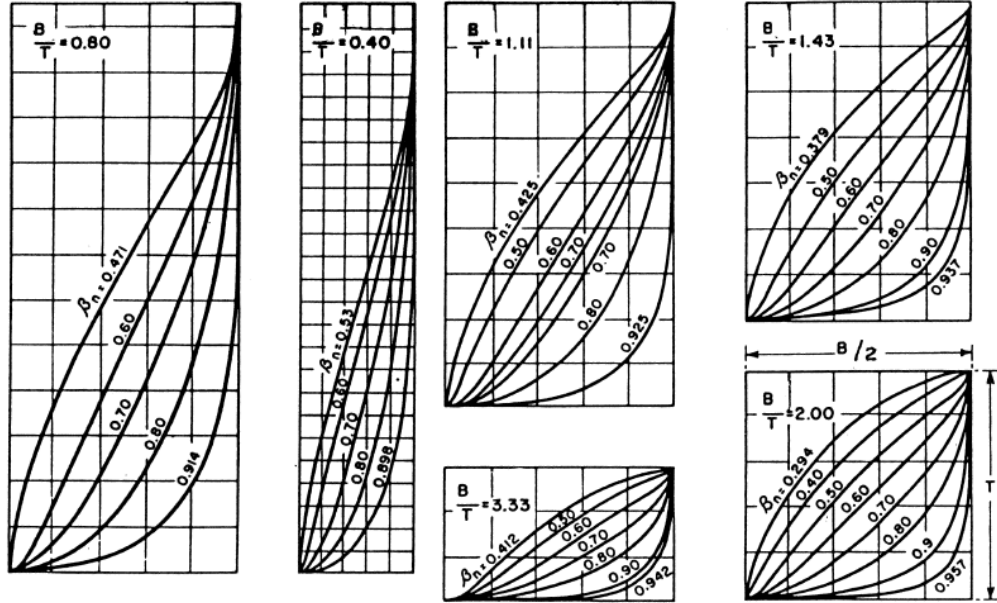
Η ανωτέρω τεχνική παρέχει απευθείας τις εκφράσεις των υδροδυναμικών συντελεστών α_{kl} , β_{kl} συναρτήσει των συντελεστών c_{ℓ} της απεικόνισης και, άρα, των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κάθε εγκάρσιας τομής. Μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι στην ουσία προσεγγίζει την γεωμετρία του σχήματος και επομένως, δεν αποδίδει ικανοποιητικά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά εγκαρσίων τομών που παρουσιάζουν περίπλοκη μεταβολή (όπως, π.χ. συμβαίνει, στη περίπτωση των εγκαρσίων τομών στη πλώρη πλοίου με βολβό). Παρ'όλα αυτά έχουν αναπτυχθεί τεχνικές οι οποίες βελτιώνουν τη συμπεριφορά αυτή και οδηγούν σε επεκτεταμένες οικογένειες μορφών Lewis; βλ. σχετικά την εργασία Athanassoulis & Loukakis (1985).

2. Υπολογισμός υδροδυναμικών δυνάμεων

Οι συνολικές υδροδυναμικές δυνάμεις παρέχονται από τη σχέση

$$X_k = -\rho \iint_{\partial D_B} n_k \left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (\Phi_I + \Phi_D) dS_B, \quad (31)$$

όπου και $\Phi_0(\mathbf{x})$, $\Phi_d(\mathbf{x})$ το δυναμικά προσπίπροντος κυματισμού και περίθλασης, αντίστοιχα.



Σχήμα 2. Μορφές Lewis εγκαρσίων τομών πλοίου, για διάφορες τιμές του λόγου B/T και $\sigma = S_x / BT$

Το δυναμικό του προσπίπτοντος κυματισμού δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \frac{jgA}{\omega_0} \cdot \exp(k_0 x_3) \exp[-jk_0(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)], \quad (32)$$

όπου A το πλάτος ανύψωσης του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια, ω_0 είναι η απόλυτη συχνότητα και β είναι η γωνία διεύθυνσης του προσπίπτοντος κυματισμού. Για βαθύ νερό ο κυματαριθμός k_0 δίδεται από τη σχέση διασποράς: $k_0 = \omega_0^2 / g$.

Δυνάμεις Froude-Krylov: Αξιοποιώντας τις υποθέσεις περί λεπτόγραμμου σχήματος για το επίμηκες πλοίο, η δύναμη X_1 κατά τη x_1 -διεύθυνση αμελείται ($X_1 \ll X_k$, $k = 2, \dots, 6$; βλ. και Εξ.19). Περαιτέρω, οι δυνάμεις Froude-Krylov μπορούν να υπολογισθούν με διαμήκη ολοκλήρωση ως ακολούθως

$$\begin{aligned} X_{0k} &= -\rho \iint_{\partial D_B} n_k \left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Phi_I dS_B = -\rho j \iint_{\partial D_B} n_k (\omega + Uk_0 \cos \beta) \Phi_I dS_B = \\ &= -\rho j \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} n_k (\omega + Uk_0 \cos \beta) \Phi_I ds = -\rho j \omega_0 \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_I n_k ds. \end{aligned} \quad (33)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και η σχέση ορισμού της συχνότητας συναντήσεως

$$\omega_0 = \omega + Uk_0 \cos \beta \quad . \quad (34)$$

Οι δυνάμεις Froude-Krylon (33) προσεγγίζονται με την βοήθεια των σχέσεων (20) ως ακολούθως

$$X_{0k} \approx -\rho j\omega_0 \int_L dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_I N_k ds, \quad k=2,3,4, \quad X_{0k} \approx -\rho j\omega_0 \int_L x_1 dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_I N_3 ds, \quad k=5$$

$$X_{0k} \approx \rho j\omega_0 \int_L x_1 dx_1 \int_{C(x_1)} \Phi_I N_2 ds, \quad k=6. \quad (35)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την έκφραση του δυναμικού (32) στη παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε για $k=2,3,4$

$$X_{0k} = \rho A \int_L f_k(x_1) dx_1, \quad (36)$$

όπου $f_k(x_1), k=2,3,4$ ορίζονται οι δυνάμεις Froude-Krylon της κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής του σώματος

$$f_k(x_1) = g \exp[-jk_0(x_1 \cos \beta)] \int_{C(x_1)} N_k \exp(k_0 x_3) \exp[-jk_0(x_2 \sin \beta)] ds. \quad (37)$$

Παρόμοια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3β), (3γ) στην Εξ. (35) παίρνουμε για $k=5,6$

$$X_{05} = -\rho A \int_L x_1 f_k(x_1) dx_1, \quad X_{06} = \rho A \int_L x_1 f_k(x_1) dx_1. \quad (38)$$

Δυνάμεις περίθλασης: Για τον υπολογισμό των δυνάμεων περίθλασης θα χρησιμοποιήσουμε τη παρακάτω σχέση

$$X_{dk} = -\rho \iint_{\partial D_B} n_k \left(j\omega - U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \Phi_D dS_B = -\rho \iint_{\partial D_B} (j\omega n_k - U m_k) \Phi_D dS_B =$$

$$= -\rho j\omega \iint_{\partial D_B} \left(\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial n} - \frac{U}{j\omega} \frac{\partial \Phi_k^U}{\partial n} \right) \Phi_D dS_B = \rho j\omega \iint_{\partial D_B} \left(\Phi_k^0 - \frac{U}{j\omega} \Phi_k^U \right) \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B, \quad (39)$$

όπου για τη μετάβαση στη τελευταία μορφή εφαρμόστηκε το θεώρημα Green σε συνδυασμό με τη συνοριακή συνθήκη στη βρεχομενη επιφάνεια της γάστρας του πλοίου που ικανοποιεί το δυναμικό περίθλασης. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την Εξ. (12) για τα δυναμικά Φ_k^U και η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή

$$X_{dk} = j\omega \rho \iint_{\partial D_B} \Phi_k^0 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B, \quad k=1,2,3,4, \quad (40\alpha)$$

$$X_{dk} = j\omega\rho \iint_{\partial D_B} \Phi_k^0 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B - \rho U \iint_{\partial D_B} \Phi_3^0 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B, \quad k=5, \quad (40\beta)$$

$$X_{dk} = j\omega\rho \iint_{\partial D_B} \Phi_k^0 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B + \rho U \iint_{\partial D_B} \Phi_2^0 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS_B, \quad k=6. \quad (40\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη Εξισ. (32) για το δυναμικό προσπίπτοντος κύματος Φ_I στις ανωτέρω σχέσεις, και αναλύοντας τα ολοκληρώματα στην επιφάνεια σε επαναληπτική μορφή, λαμβάνουμε τελικά

$$X_{dk} = j\omega\rho A \int_L h_k(x_1) dx_1, \quad k=2,3,4, \quad (41)$$

όπου $h_k(x_1)$, οι αντίστοιχες δυνάμεις περίθλασης της κάθε διδιάστατης εγκάρσιας τομής του σώματος,

$$h_k(x_1) = \omega_0 \exp[-jk_0(x_1 \cos \beta)] \times \int_{C(x_1)} (jN_3 + N_2 \sin \beta) \exp(k_0 x_3) \exp[-jk_0(x_2 \sin \beta)] \varphi_k ds, \quad k=2,3,4, \quad (42)$$

όπου $\varphi_k(x_2, x_3; x_1)$, $k=2,3,4$, τα διδιάστατα δυναμικά στο κατακόρυφο επίπεδο (x_2, x_3) που αντιστοιχούν στις ταλαντωτικές κινήσεις ξ_k , $k=2,3,4$, της κάθε εγκάρσιας τομής, και τα οποία εξαρτώνται παραμετρικά από τη διαμήκη θέση x_1 . Τα δυναμικά αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις (27),(28),(29). Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (20β,γ) στην Εξ. (40β,γ) λαμβάνουμε για $k=5,6$

$$X_{d5} = -j\omega\rho A \int_L \left(x_1 + \frac{U}{j\omega}\right) h_3(x_1) dx_1, \quad X_{d6} = j\omega\rho A \int_L \left(x_1 + \frac{U}{j\omega}\right) h_2(x_1) dx_1. \quad (43)$$

Έχοντας διαθέσιμα τα ανωτέρω αποτελέσματα, οι εξισώσεις κίνησης του πλοίου μπορούν να επιλυθούν ως προς τα άγνωστα ταλαντωτικά πλάτη ξ_k , $k=2,3,\dots,6$, και να υπολογισθούν οι αντίστοιχοι συντελεστές απόκρισης και άλλα χρησιμα μεγέθη.

Πρόσθετη αντίσταση πλοίου λόγω κύματος: Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με ένα ειδικό θέμα που συνδέεται με τις αποκρίσεις του πλοίου και αφορά την ανάπτυξη πρόσθετης αντίστασης ως συνέπεια της δράσης των κυματισμών και των επαγόμενων ταλαντωτικών κινήσεων του πλοίου. Σε κατάσταση πλεύσης του πλοίου σε κυματισμένη θάλασσα η προωστήρια εγκατάσταση αντιμετωπίζει την αντίσταση του πλοίου σε ήρεμο νερό και τη πρόσθετη αντίσταση. Υπερβολική αύξηση της πρόσθετης αντίστασης μπορεί να οδηγήσει σε μη επιθυμητή μείωση της ταχύτητας του πλοίου. Χάριν απλότητας θα περιοριστούμε εδώ στη περίπτωση των μετωπικών κυματισμών ($\beta = 180^\circ$), που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια και στη περιοχή αυτή (των προωραίων – πλαγίων κυματισμών) μεγιστοποιείται η πρόσθετη αντίσταση.

Εχουν προταθεί διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις και αντίστοιχες μέθοδοι υπολογισμού για τη πρόσθετη αντίσταση πλοίου λόγω κυματισμών, και για μια συγκριτική παρουσίαση παραπέμπουμε στην πρόσφατη εργασία Arribas (2007). Από προηγούμενη εμπειρία έχειδειχθεί ότι η ενεργειακή μέθοδος που προτάθηκε αρχικά από τους Gerritsma & Beukelman (1972), την οποία θα περιγράψουμε συνοπτικά παρακάτω, πέραν της σχετικής απλότητας της, παρέχει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές.

Σύμφωνα με την ανωτέρω θεώρηση, στην απλή περίπτωση των μετωπικών αρμονικών κυματισμών ($\beta = 180^\circ$), η ενέργεια $E_{AW} = R_{AW}(U + c)T = R_{AW}\lambda$ που συνδέεται με την εμφάνιση της πρόσθετης αντίστασης R_{AW} στη διάρκεια μιάς περιόδου T , συσχετίζεται με την κυματική ενέργεια που ακτινοβολείται μακριά από το πλοίο λόγω της κατακόρυφης ταλαντωτικής του ταχύτητας σχετικά ως προς τη ταλάντωση της ανύψωσης του νερού στην επιφάνεια εξ' αιτίας του προσπίπτοντος κυματισμού. Με την έννοια αυτή η σχετική κατακόρυφη ταχύτητα σε κάθε εγκάρσια τομή κατά μήκος του πλοίου δίνεται από τη σχέση

$$V_R(x_1, t) = \frac{d\xi_R(x_1, t)}{dt}, \quad \text{όπου} \quad \xi_R(x_1, t) = (\xi_3 - x\xi_5 - \eta(x_1, t)) \exp(j\omega t), \quad (44\alpha)$$

όπου ξ_3, ξ_5 τα (μιγαδικά) πλάτη της κατακόρυφης ταλάντωσης (heave) και του προνευτασμού (pitch), αντίστοιχα, και $\eta(x_1, t) = A \exp[j(k_0 x_1 + \omega t)] \exp[-jk_0 U t]$, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας λόγω του προσπίπτοντος κυματισμού στο πλοίο, όπως αυτή εκφράζεται στο Κ.Α.Σ. Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι, στην εξεταζόμενη περίπτωση, $\omega = \omega_0 + k_0 U$ είναι η συχνότητα συναντήσεως και $k_0 = \omega_0^2 / g$ ο κυματαριθμός. Για την υλοποίηση της χρονικής παραγώγου στη σχέση (44α) ορισμού της $V_R(x_1, t)$ θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι η σχετική κίνηση $\xi_R(x_1, t)$ έχει εκφραστεί πλήρως στο Κ.Α.Σ. και επομένως

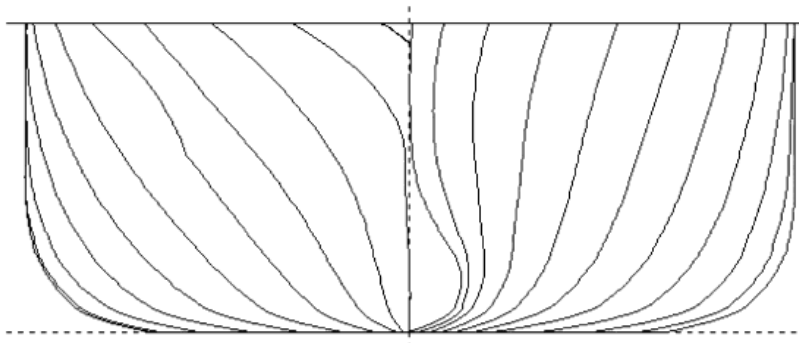
$$\begin{aligned} V_R(x_1, t) &= \frac{\partial \xi_R(x_1, t)}{\partial t} - U \frac{\partial \xi_R(x_1, t)}{\partial x_1} = \\ &= j\omega(\xi_3 - x\xi_5 + U\xi_5) \exp(j\omega t) - j\omega_0 A \exp[j(k_0 x_1 + \omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (44\beta)$$

Η ενέργεια που ακτινοβολείται κατά τη διάρκεια μιάς περιόδου T λόγω των κατακόρυφων ταλαντώσεων των εγκαρσίων τομών του πλοίου δίνεται από τη σχέση

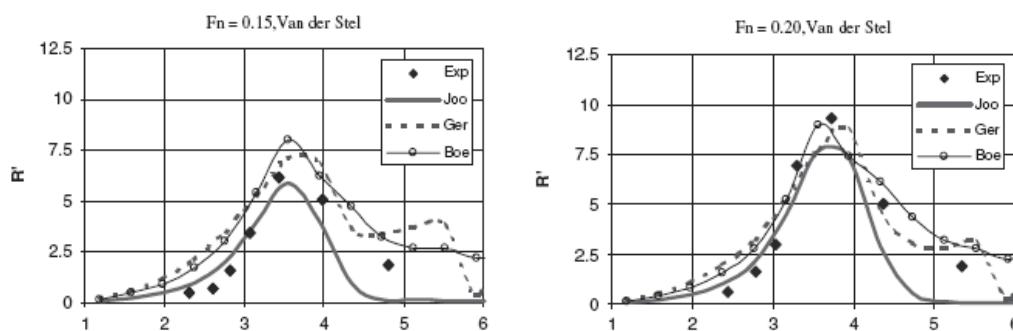
$$E = \frac{\pi}{\omega} \int_L \beta_{33}(x_1) \overline{V_R^2} dx_1, \quad (45)$$

όπου $\beta_{33}(x_1)$ είναι ο συντελεστής απόσβεσης της κάθε εγκάρσιας τομής σε κατακόρυφη ταλάντωση (όπως παρέχεται από την επίλυση των διδιαστάτων προβλημάτων, βλ. Εξ.25.β), και $\overline{V_R^2}$ η μέση τετραγωνική τιμή της σχετικής κατάκόρυφης ταχύτητας από την Εξ. (44β). Εξισώνοντας την ενέργεια αυτή με την αντίστοιχη από την θεώρηση της πρόσθετης αντίστασης E_{AW} , καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για τη πρόσθετη αντίσταση R_{AW} πλοίου σε κυματισμό

$$R_{AW} = \frac{\pi}{\lambda\omega} \int_L \beta_{33}(x_1) \overline{V_R^2} dx_1, \quad (46)$$



Σχήμα 3.α Εγκάρσιες τομές πλοίου (van der Stel, από Arribas 2007)



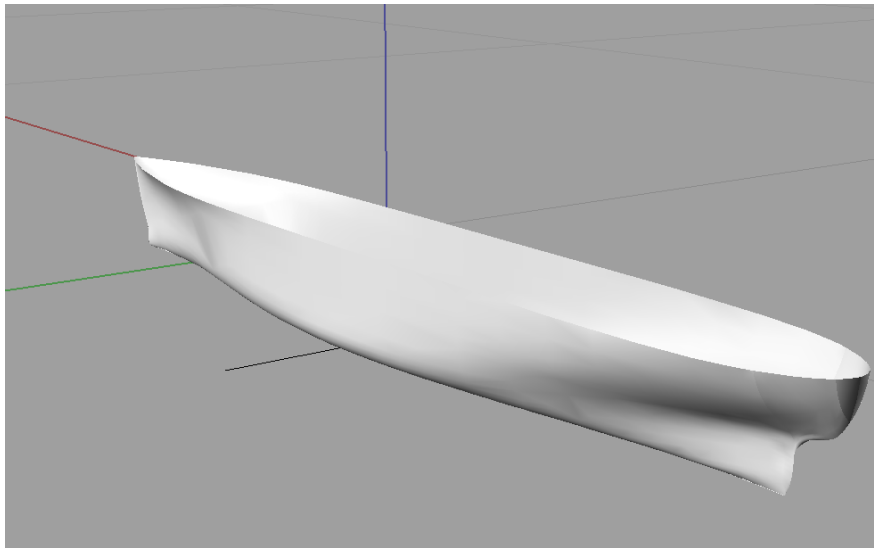
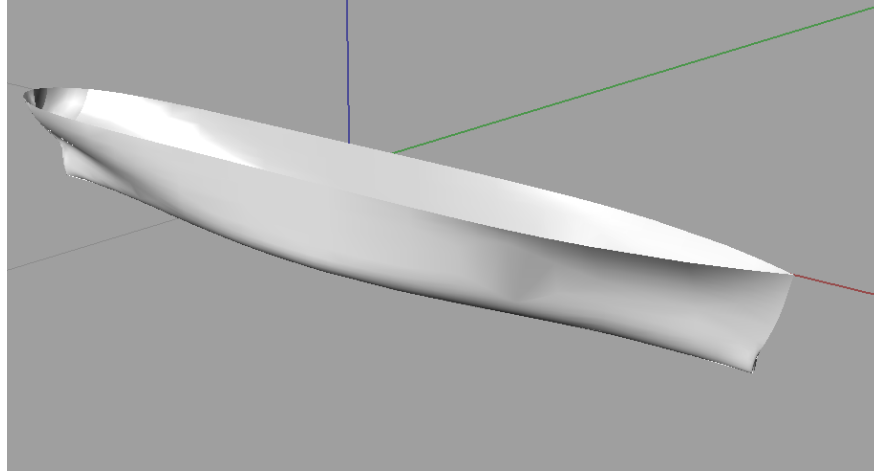
Σχήμα 3.β Συγκρίσεις υπολογισμών πρόσθετης αντίστασης για το πλοίο του Σχ.3α με πειραματικές μετρήσεις, συναρτήσει της παραμέτρου αδιάστατης συχνότητας ($\omega\sqrt{L}/\lambda$) και για δύο τιμές του αριθμού Froude ($F_n=0.15, 0.20$).

όπου $\lambda = 2\pi/k_0 = 2\pi g/\omega_0^2$. Ενδεικτικά αποτελέσματα για το πλοίο με τις εγκάρσιες τομές που εικονίζεται στο Σχ.3.α παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.β. Σημειώνεται ότι η πρόσθετη αντίσταση για κύματα με μεγάλος ύψος μπορεί να γίνει (σε κατάσταση συντονισμού) συγκρίσιμη με την αντίσταση του πλοίου σε ήρεμο νερό. Η διαπίστωση αυτή καταδεικνύει τη σημασία του υπολογισμού και σωστής θεώρησης της πρόσθετης αντίστασης ιδιαίτερα σε ότι αφορά το σχεδιασμό και την εκτίμηση των επιχειρησιακών χαρακτηριστικών ενός πλοίου.

3. Παράδειγμα εφαρμογής

Ως παράδειγμα εφαρμογής εξετάζουμε στη συνέχεια μια γάστρα της σειράς 60 με συντελεστή γάστρας $C_B = 55\%$ το οποίο διαθέτει κλασική γεωμετρία πλήρης (χωρίς βολβό) και πρύμνης (καμπύλη πρύμνη). Η γάστρα αυτή εικονίζεται σχηματικά στο Σχήμα 4 και είναι πολύ παραπλήσια με τη γάστρα του μοντέλου του πειράματος που διεξάγεται στο Εργαστήριο του παρόντος μαθήματος.

Οι ονομαστικές διαστάσεις του μοντέλου είναι $L=3.04\text{m}$, $B=0.40\text{m}$, $D=0.30\text{m}$. Στο βύθισμα $T=0.17\text{m}$ η εξεταζόμενη γάστρα έχει μήκος ισάλου $L=3\text{m}$ πλοίο. Παραθέτουμε στη συνέχεια τα βασικά αποτελέσματα υδροστατικών υπολογισμών για το συγκεκριμένο πλοίο:



Σχήμα 4. Διάφορες όψεις της εξεταζόμενης γάστρας μοντέλου πλοίου μήκους 3m

 ***** EXAMPLE: 3m-model LBP=3m (L=3.04), B=0.400m, D=0.30m *****

***** HYDROSTATICS *****

| DRAFT | AREA | LCF | IMM.VOL. | DISPL. | I TRANS. | I LONG. | LCB | BM | KB | W.S. | BML |
|-------|-------|----------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 0.060 | 0.615 | -0.00402 | 0.03018 | 0.03097 | 0.005 | 0.1935 | -0.01030 | 0.16394 | 0.03339 | 0.78505 | 6.41053 |
| 0.080 | 0.645 | -0.00009 | 0.04278 | 0.04368 | 0.005 | 0.2105 | -0.00763 | 0.12811 | 0.04420 | 0.90150 | 4.92009 |
| 0.100 | 0.675 | -0.00051 | 0.05599 | 0.05701 | 0.006 | 0.2306 | -0.00584 | 0.10591 | 0.05502 | 1.01772 | 4.11778 |
| 0.120 | 0.702 | -0.00707 | 0.06977 | 0.07090 | 0.006 | 0.2525 | -0.00519 | 0.09037 | 0.06589 | 1.13423 | 3.61927 |
| 0.140 | 0.743 | -0.03004 | 0.08420 | 0.08546 | 0.007 | 0.2929 | -0.00724 | 0.08014 | 0.07690 | 1.25961 | 3.47804 |
| 0.160 | 0.788 | -0.05841 | 0.09950 | 0.10089 | 0.007 | 0.3470 | -0.01296 | 0.07242 | 0.08815 | 1.39427 | 3.48783 |
| 0.170 | 0.809 | -0.06910 | 0.10748 | 0.10894 | 0.007 | 0.3730 | -0.01674 | 0.06916 | 0.09386 | 1.46104 | 3.47021 |

| DRAFT | TP1 | MCT1 | CH.DISPL. | CB | CWP | CM | CP | CB* | CWP* | CM* | CP* |
|-------|-------|-------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.060 | 0.307 | 0.001 | -0.045 | 0.46248 | 0.56507 | 0.86378 | 0.53541 | 0.41917 | 0.51216 | 0.85082 | 0.49267 |
| 0.080 | 0.323 | 0.001 | -0.001 | 0.48482 | 0.58519 | 0.89216 | 0.54342 | 0.44565 | 0.53791 | 0.88547 | 0.50329 |
| 0.100 | 0.337 | 0.001 | -0.006 | 0.50184 | 0.60489 | 0.90965 | 0.55168 | 0.46661 | 0.56244 | 0.90737 | 0.51424 |
| 0.120 | 0.351 | 0.001 | -0.088 | 0.51646 | 0.62400 | 0.92270 | 0.55973 | 0.48451 | 0.58538 | 0.92270 | 0.52510 |
| 0.140 | 0.371 | 0.001 | -0.389 | 0.52392 | 0.64692 | 0.93374 | 0.56110 | 0.50122 | 0.61888 | 0.93374 | 0.53679 |
| 0.160 | 0.394 | 0.001 | -0.779 | 0.52627 | 0.66679 | 0.94202 | 0.55866 | 0.51821 | 0.65657 | 0.94203 | 0.55010 |
| 0.170 | 0.404 | 0.001 | -0.939 | 0.53110 | 0.67937 | 0.94543 | 0.56176 | 0.52686 | 0.67394 | 0.94544 | 0.55726 |

CB*,CWP*,CM*,CP* (IN CALCULATIONS LENGTH=L.P.P. AND BREADTH=BREADTH AT LOAD W.L.)

CB,CWP,CM,CP (IN CALCULATIONS LENGTH AND BREADTH = LENGTH AND BREADTH OF W.L.)

Με βάση τα ανωτέρω στοιχεία καταρτίστηκαν τα δεδομένα εισόδου του προγράμματος που υλοποιεί τη θεωρία λωρίδων, και το οποίο είναι διαθέσιμο στο Εργαστήριο Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής:

| STATION I | XI(I) | YM(I) | ZM(I) | SIGMA(I) | ZCB(I) |
|-----------|---------|--------|--------|----------|---------|
| 1 | 1.4200 | 0.0360 | 0.1500 | 0.5370 | -0.0551 |
| 2 | 1.2000 | 0.1080 | 0.1700 | 0.6581 | -0.0662 |
| 3 | 1.0000 | 0.1860 | 0.1700 | 0.7608 | -0.0705 |
| 4 | 0.8000 | 0.2600 | 0.1700 | 0.8332 | -0.0705 |
| 5 | 0.6000 | 0.3200 | 0.1700 | 0.9205 | -0.0760 |
| 6 | 0.3200 | 0.3600 | 0.1700 | 1.0214 | -0.0800 |
| 7 | 0.0000 | 0.4000 | 0.1700 | 1.0505 | -0.0810 |
| 8 | -0.2800 | 0.3880 | 0.1700 | 1.0272 | -0.0800 |
| 9 | -0.6000 | 0.3660 | 0.1700 | 0.9029 | -0.0762 |
| 10 | -0.8000 | 0.3280 | 0.1700 | 0.7712 | -0.0713 |
| 11 | -1.0100 | 0.2620 | 0.1700 | 0.5817 | -0.0653 |
| 12 | -1.2100 | 0.1860 | 0.1700 | 0.3660 | -0.0536 |
| 13 | -1.3800 | 0.1180 | 0.0400 | 0.6050 | -0.0140 |
| 14 | -1.4100 | 0.0600 | 0.0200 | 0.6296 | -0.0068 |
| 15 | -1.4500 | 0.0300 | 0.0100 | 0.5556 | -0.0033 |

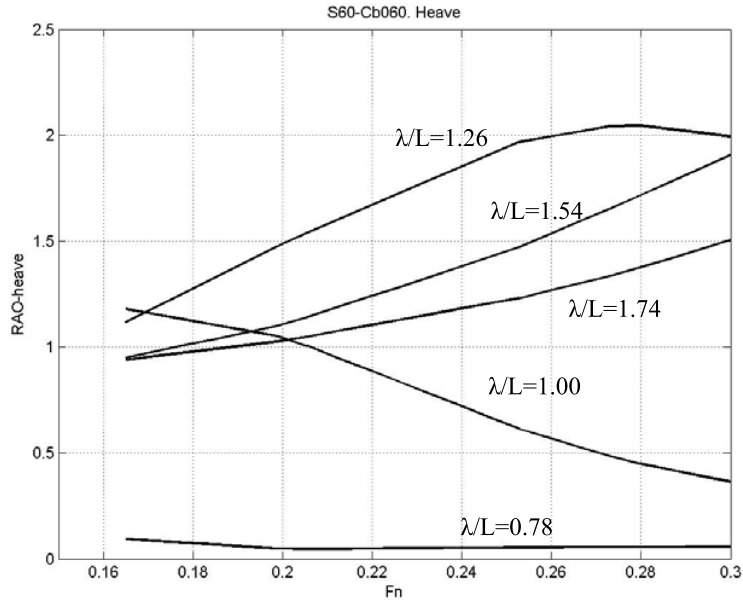
Στο εξεταζόμενο παράδειγμα και για βύθισμα $T=0.17m$ ο όγκος εκτοπίσματος είναι $\nabla = 0.1075m^3$ και, λαμβάνοντας τη θέση του κέντρου βάρους

$LCG=-0.0167m$ (πρύμνηθεν μέσου νομέα), $KG=0.07m$ (από BL),

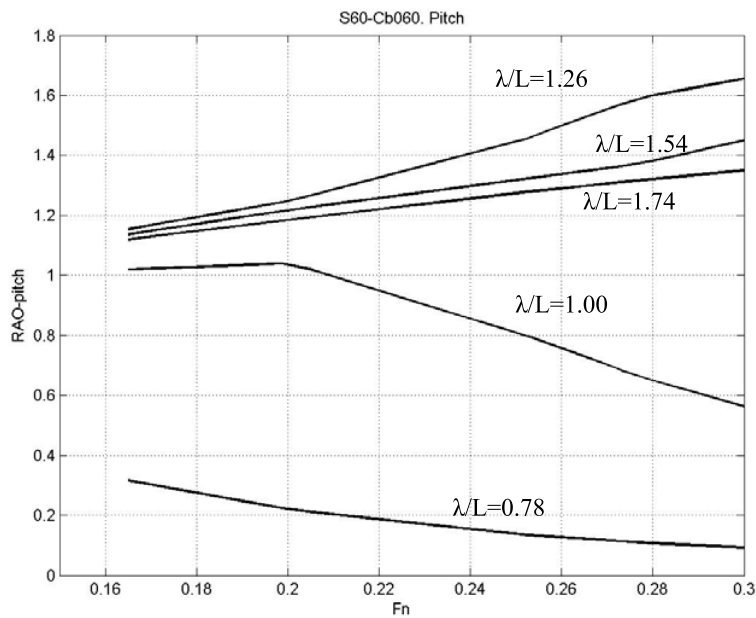
τα μετακεντρικά ύψη προκύπτουν $GM = 0.093m$ και $GM_L = 3.5m$ (για εγκάρσιες και διαμήκεις κλίσεις, αντίστοιχα). Για τον υπολογισμό των μαζικών ροπών αδράνειας για περιστροφές ως προς το x_1 και το x_2 -άξονα έχουν ληφθεί ακτίνες αδράνειας $r_{x_1x_1}=0.13m$ (για περιστροφή ως προς τον x_1 - άξονα) και $r_{x_2x_2}=0.07m$ (για περιστροφή ως προς τον x_1 - άξονα).

Τα αποτελέσματα υπολογισμού που αφορούν τις αποκρίσεις heave ($|\xi_3|/A$) και pitch ($|\xi_5|/k_0A$) του πλοίου σε μετωπικούς αρμονικούς κυματισμούς ($\beta=180^\circ$), εικονίζονται στα Σχήματα 5 και 6, αντίστοιχα, για διάφορες τιμές του αδιάστατου μήκους κύματος λ/L όπως προκύπτουν από εφαρμογή της θεωρίας λωρίδων που παρουσιάσαμε στο εδάφιο αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι στο βαθύ νερό το μήκος κύματος (λ) εξαρτάται από την απόλυτη συχνότητα (ω_0) ως $\lambda = 2\pi g/\omega_0^2$ και η απόλυτη συχνότητα συνδέεται με τη συχνότητα συνάντησης σύμφωνα με την Εξ. (2β), και επομένως υπάρχει η ακόλουθη σχέση μεταξύ της γραμμικής συχνότητας ταλάντωσης του πλοίου f (σε Hz) και του μήκους κύματος λ :

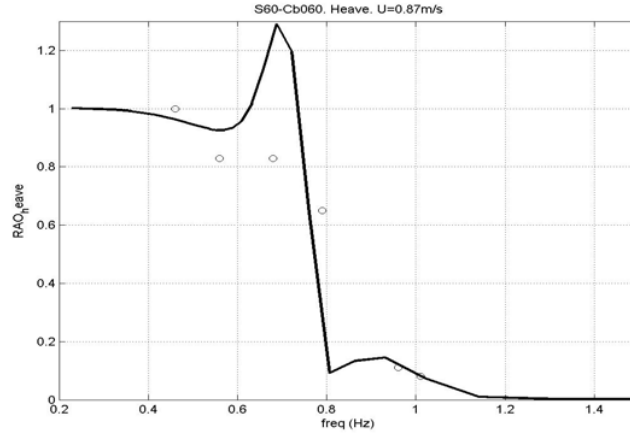
$$\omega = 2\pi f = \left| \omega_0 - \left(U\omega_0^2 / g \right) \cos \beta \right| = \left| \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} - \frac{2\pi U}{\lambda} \cos \beta \right|. \quad (47)$$



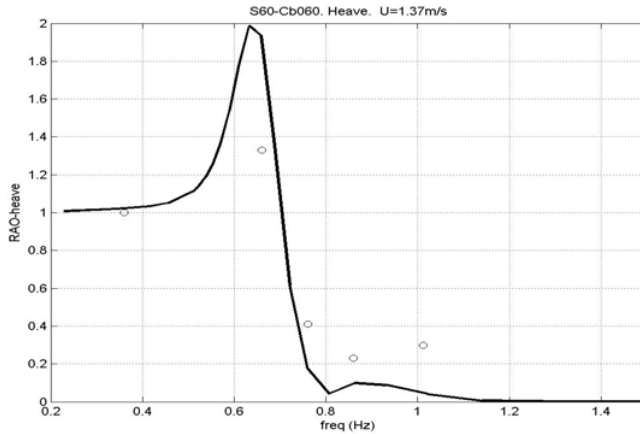
Σχήμα 5. Συντελεστής απόκρισης πλοίου σε κατακόρυφη ταλάντωση (ξ_3 / A) λόγω αρμονικών κυματισμών, για διάφορες τιμές του αριθμού Froude $Fn = V / \sqrt{gL}$ και του λόγου μήκους κύματος-μήκους πλοίου λ / L .



Σχήμα 6. Συντελεστής απόκρισης πλοίου σε προνευτασμό ($\xi_5 / k_0 A$) λόγω αρμονικών κυματισμών, για διάφορες τιμές του αριθμού Froude $Fn = V / \sqrt{gL}$ και του λόγου μήκους κύματος-μήκους πλοίου λ / L .



Σχήμα 7. Συντελεστής απόκρισης πλοίου σε κατακόρυφη ταλάντωση (ξ_3 / A) λόγω αρμονικών κυματισμών, για διάφορες τιμές της συχνότητας συνάντησης και αριθμό Froude $F_n = V / \sqrt{gL} = 0.16$ (ταχύτητα πλοίου $V=0.87\text{m/s}$).



Σχήμα 8. Συντελεστής απόκρισης πλοίου σε κατακόρυφη ταλάντωση (ξ_3 / A) λόγω αρμονικών κυματισμών, για διάφορες τιμές της συχνότητας συνάντησης και αριθμό Froude $F_n = V / \sqrt{gL} = 0.26$ (ταχύτητα πλοίου $V=1.37\text{m/s}$).

Τέλος, στα Σχήματα 7 και 8 παρουσιάζεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της θεωρίας λωρίδων που αναπτύχθηκε στο εδάφιο αυτό, όσον αφορά την απόκριση του πλοίου σε κατακόρυφη ταλάντωση (heave), λόγω αρμονικών κυματισμών. Συγκεκριμένα, εικονίζονται αποτελέσματα για δύο τιμές της ταχύτητας πλοίου $V=0.87\text{m/s}$ και $V=1.37\text{m/s}$, και για διάφορες τιμές της συχνότητας συνάντησης (f σε Hz). Με μικρούς κύκλους εικονίζονται τα αποτελέσματα που ελήφθησαν από τη διενέργεια σχετικών πειραμάτων στην δεξαμενή του ΕΝΘΥ, στα πλαίσια του εργαστηριακού μέρους του παρόντος μαθήματος.

Από τα αποτελέσματα αυτά, αλλά και πληθώρα παρόμοιων αποτελεσμάτων σε εργασίες με εκτενείς συγκρίσεις που έχουν εκπονηθεί από διάφορους ερευνητές στο παρελθόν, διαπιστώνεται η πολύ καλή απόδοση της θεωρίας λωρίδων που αναπτύξαμε εδώ, στα πλαίσια των δυνατοτήτων πρόβλεψης που προσφέρει, πάντα

υπό την προϋπόθεση πλήρωσης όλων των σχετικών περιορισμών για την εφαρμοσιμότητα της.

4. Βιβλιογραφικές αναφορές

Arribas-Perez, F, 2007, Some methods to obtain the added resistance of a ship advancing in waves, *Ocean Engineering* vol. 34, pp. 946–955.

Athanassoulis G.A., Loukakis T.A., 1985, An extended-Lewis form family of ship-sections and its application to seakeeping calculations, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 32, No 366, pp. 33-43.

Gerritsma, J., Beukelman, W., 1972, Analysis of the resistance increase in waves of a fast cargo ship, *International Shipbuilding Progress* 19, p. 217.

Lewis, E.V., (Editor), 1989, *Principles of naval architecture*, vol. 3. Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME), New Jersey.

Salvesen, N., Tuck, E.O., Faltinsen, O., 1970, Ship motions and sea loads, *Transactions SNAME*, vol. 78.

Lewandowski, E., 2004, *The dynamics of marine craft*, World Scientific.

Vughts, J., 1968, The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface, Rep.No.194, TH Delft.

Ohkusu, M., 1996, *Advances in Marine Hydrodynamics*, Computational Mechanics Publications

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΠΗΔΑΛΙΟΥΧΙΑ ΠΛΟΙΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | Σελ. |
|--|------|
| 1. Γενικά | 261 |
| 2. Εξισώσεις οριζοντίων κινήσεων πλοίου σε ήρεμη θάλασσα: I. Αδρανειακοί συντελεστές | 265 |
| 3. Μοντελοποίηση υδροδυναμικών φορτίσεων. Υδροδυναμικές παράγωγοι γάστρας και πηδαλίου | 268 |
| 4. Εξισώσεις οριζοντίων κινήσεων πλοίου σε ήρεμη θάλασσα: II. Γενική μορφή – Ευστάθεια | 276 |
| 5. Πειραματικός προσδιορισμός υδροδυναμικών παραγώγων | 280 |
| 6. Αναλυτικός προσδιορισμός υδροδυναμικών παραγώγων | 290 |
| 7. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο: I. Κίνηση κατά το διαμήκη άξονα | 302 |
| 8. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο: II. Ευστάθεια | 304 |
| 9. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο: III. Πηδαλιουχία. Εξίσωση Nomoto | 309 |
| 10. Δοκιμές πηδαλιουχίας και ελικτικές ικανότητες πλοίου | 315 |
| 11. Συστήματα αυτομάτου ελέγχου πηδαλίου | |
| 12. Ευστάθεια και πηδαλιουχία πλοίου με αυτόματο έλεγχο πηδαλίου | |
| 13. Σχεδίαση πηδαλίου | 336 |
| Βιβλιογραφία | |

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΠΗΔΑΛΙΟΥΧΙΑ ΠΛΟΙΟΥ

1. Γενικά

Η ευστάθεια κινήσεως (motion stability) και η ικανότητα πηδαλιουχίας (maneuverability) του πλοίου είναι δύο επί μέρους ιδιότητες οι οποίες ανήκουν σε μια ευρύτερη κλάση ιδιοτήτων που αναφέρεται με το όνομα ελεγχιμότητα (controlability) του πλοίου. Η ελεγχιμότητα, στη γενικότητά της, είναι έννοια της θεωρίας συστημάτων και αναφέρεται στη δυνατότητα ελέγχου των τιμών ορισμένων από τις αποκρίσεις ενός ελέγχου. Ειδικότερα, στην περίπτωση πλοίου ή υποβρυχίου, η ελεγχιμότητα περιλαμβάνει τις εξής επί μέρους ιδιότητες:

α) Διατήρηση πορείας – αλλαγή πορείας (course-keeping – course-changing or path-keeping – path-changing).

Η ιδιότητα διατήρησης πορείας (συνήθως ευθείας πορείας, οπότε αναφέρεται και ως ευστάθεια κατευθύνσεως), αναφέρεται στην ικανότητα ενός σκάφους να διατηρεί μια προκαθορισμένη (συνήθως κατά τμήματα ευθύγραμμη) τροχιά, παρά τις διάφορες εξωτερικές αιτίες (κύμα, ρεύμα, άνεμος κ.λπ.), οι οποίες επιδρούν σ' αυτό και τείνουν να διαταράζουν την πορεία του. Η ιδιότητα αλλαγής πορείας (πηδαλιουχία) αναφέρεται στην ικανότητα του πλοίου να μεταβάλλει κατεύθυνση (να στρίβει), κατά ελεγχόμενο τρόπο, υπό την επίδραση του πηδαλίου ή/και άλλων επιφανειών (συστημάτων) ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή ενδιαφέρον παρουσιάζουν διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη (μήκη και χρόνοι), όπως η διάμετρος του κύκλου στροφής (diameter of turning circle), ο χρόνος ολοκλήρωσης του κύκλου στροφής κ.λπ.. Τα θέματα που αναφέρονται στην ικανότητα του πλοίου να διατηρεί, αλλά και να αλλάζει την πορεία του, θα εξετασθούν διεξοδικά στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

β) Διατήρηση ταχύτητας – αλλαγή ταχύτητας (speed-keeping – speed-changing)

Η ικανότητα αλλαγής ταχύτητας, είτε στην ευθεία πορεία είτε κατά τη διάρκεια ελιγμών, αναφέρεται στην ευκολία και τη συντομία με την οποία πραγματοποιείται μια συγκεκριμένη αλλαγή της ταχύτητας του πλοίου. Στην περίπτωση αυτή ενδιαφέρουν επίσης διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη (μήκη και χρόνοι), όπως η απόσταση που διανύεται και ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρις ότου ολοκληρωθεί η αλλαγή ταχύτητας. Η ικανότητα διατήρησης μιας συγκεκριμένης ταχύτητας χαρακτηρίζει την ευστάθεια της μόνιμης οριζόντιας κίνησης του πλοίου έναντι διαφόρων διαταραχών που τείνουν να αλλάξουν τη μέση ταχύτητά του. Τα θέματα αυτά θα μελετηθούν συνοπτικά στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

γ) Διατήρηση θέσεως – αλλαγή θέσεως (position-keeping – position-changing)

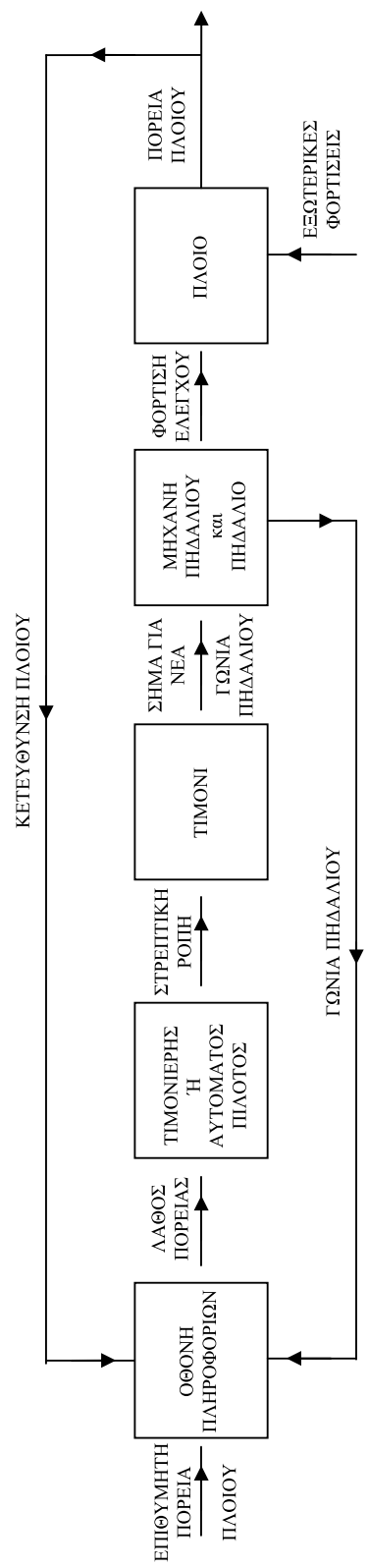
Οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ σημαντικές για διάφορες πλωτές ή βυθισμένες κατασκευές (εξέδρες, υποβρύχια, βαθυσκάφη κ.λπ.), οι οποίες εκτελούν λειτουργίες που απαιτούν διατήρηση σταθερής θέσεως ή αλλαγή (προσαρμογή) θέσεως, π.χ. προκειμένου να εξασφαλισθεί η ασφαλής λειτουργία γεωτρύπανου, ή η σωστή εκτέλεση εργασιών επισκευής βυθισμένου αντικειμένου από υποβρύχιο

(βαθυσκάφος). Οι ιδιότητες αυτές, οι οποίες δεν είναι σημαντικές για συνήθη πλοία, εξασφαλίζονται με τη βοήθεια πρόσθετων συστημάτων ελέγχου (thrusters, jets κ.λπ.) και δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

Ας σημειωθεί ότι, για ένα συγκεκριμένο σκάφος, τα ζεύγη των ιδιοτήτων που αναφέρονται ανωτέρω, στα (α), (β), (γ), συνήθως βρίσκονται σε αντίθεση μεταξύ τους. Επί παραδείγματι, ένα πλοίο με καλά χαρακτηριστικά διατήρησης ευθείας πορείας, συνήθως παρουσιάζει δυσκολία στην αλλαγή πορείας (πηδαλιουχίας) και, αντίθετα, ένα πλοίο με καλά χαρακτηριστικά πηδαλιουχίας (π.χ. μικρό κύκλο στροφής) μπορεί να έχει πρόβλημα όσον αφορά τη διατήρηση της ευθείας πορείας του. Ευτυχώς, στην πράξη, είναι δυνατόν να επιτευχθεί ένας ικανοποιητικός συμβιβασμός των ιδιοτήτων αυτών, κυρίως μέσω της χρήσης του πηδαλίου ή/και άλλων επιφανειών (ή συστημάτων) ελέγχου.

Οι ικανότητες διατήρησης/αλλαγής πορείας και ταχύτητας ενός σκάφους εξαρτώνται κυρίως από τα γεωμετρικά, αδρανειακά και υδροδυναμικά χαρακτηριστικά του σκάφους, συμπεριλαμβανομένων και των αλληλεπιδράσεων της γάστρας με το πηδάλιο και άλλες, τυχόν υπάρχουσες, επιφάνειες ελέγχου. Εν τούτοις, είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό ότι η ελεγχιμότητα ενός πλοίου εξαρτάται επίσης ουσιαστικά και από ένα μεγάλο αριθμό άλλων παραγόντων, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται: μηχανικά, ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά υποσυστήματα του πλοίου που παρεμβάλλονται στη διαδικασία της πηδαλιουχίας, περιβαλλοντικοί παράγοντες, αλλά και ο ανθρώπινος παράγων, και μάλιστα με καθοριστική σημασία. Για να αντιληφθούμε καλύτερα την πολυπλοκότητα και τη διαπλοκή των διαφόρων υποσυστημάτων του συστήματος ΠΗΔΑΛΙΟΥΧΟΥΜΕΝΟ ΠΛΟΙΟ, θα εξετάσουμε τον κλειστό βρόχο ελέγχου αυτού, ο οποίος απεικονίζεται παραστατικά στο Σχήμα 1. (Segel 1960, Lewis 1989).

Κοιτάζοντας ο ΤΙΜΟΝΙΕΡΗΣ (ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΠΙΛΟΤΟΣ) στην ΟΘΟΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ, αντιλαμβάνεται διαφορά ανάμεσα στην επιθυμητή πορεία και στην πραγματική πορεία του πλοίου. Με σκοπό να διορθώσει αυτή τη διαφορά, ο τιμονιέρης (αυτόματος πιλότος), αφού διαβάσει τη γωνία εκτροπής του πηδαλίου, στρέφει το ΤΙΜΟΝΙ, δίνοντας έτσι σήμα για να εκτραπεί το ΠΗΔΑΛΙΟ σε διαφορετική γωνία (με τη μεσολάβηση ή όχι του ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΟΣ ΠΗΔΑΛΙΟΥΧΙΑΣ). Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια νέα φόρτιση ελέγχου στο ήδη υπάρχον σύστημα φορτίσεων που επενεργεί στο ΠΛΟΙΟ, η οποία, σε συνδυασμό με τυχόν εξωτερικές δυναμικές φορτίσεις, προκαλεί μια αλλαγή στην πορεία του πλοίου. Ο βρόχος ελέγχου του συστήματος κλείνει καθώς η νέα πορεία εμφανίζεται στην ΟΘΟΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ. Στην πραγματικότητα βέβαια σπάνια είναι γνωστή η πραγματική στιγμιαία πορεία του πλοίου. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι γνωστός μόνο ο προσανατολισμός του άξονα του πλοίου, από την πυξίδα, ενώ οι συντεταγμένες της θέσεως του πλοίου λαμβάνονται μόνο σποραδικά. Παρ' όλα αυτά ο βρόχος ελέγχου εξακολουθεί να λειτουργεί όπως στο Σχήμα 1, αλλά με ατελείς πληροφορίες για την πραγματική πορεία του πλοίου.



Σχήμα 1: Βρόχος ελέγχου πορείας του πλοίου

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 1, κάθε στοιχείο (υποσύστημα) του βρόχου ελέγχου πορείας του πλοίου, διατεταγμένο καθώς είναι εν σειρά με τα υπόλοιπα, παίζει ζωτικό ρόλο στην ικανότητα πηδαλιουχίας του πλοίου. Ειδικά για το υποσύστημα του τιμονιέρη, τα κύρια χαρακτηριστικά του είναι α) Μυική δύναμη, β) Χρόνος αντιδράσεως, γ) Αντοχή στην κόπωση, δ) Ευαισθησία στην μετατόπιση των ορατών αντικειμένων (όπως ο δείκτης της πυξίδας). Πάντως, από τα στοιχεία του βρόχου ελέγχου, το Ναυπηγό αφορούν κυρίως τα δύο τελευταία, δηλαδή το ΠΗΔΑΛΙΟ και το ΠΛΟΙΟ.

Θα πρέπει εδώ να αναφερθεί, ότι, παράλληλα με το βρόχο ελέγχου πορείας, στο πλοίο λειτουργεί και ο βρόχος ελέγχου ταχύτητας, ο οποίος συνδέεται με τον πρώτο μόνο μέσω του αξιωματικού γέφυρας. Οι δύο βρόχοι ελέγχου συντονίζονται έτσι ώστε το πλοίο να λειτουργεί σύμφωνα με τις οδηγίες/διατάξεις του πλοιάρχου.

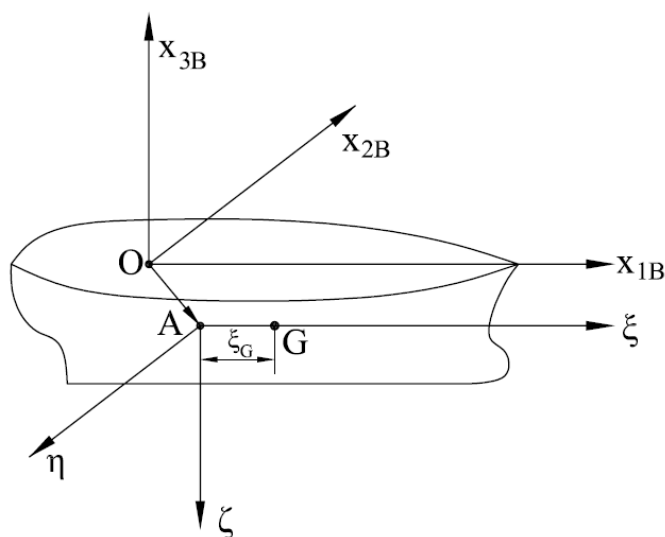
2. Εξισώσεις οριζοντίων κινήσεων πλοίου σε ήρεμη θάλασσα:

I. Αδρανειακοί συντελεστές

Στο εδάφιο αυτό θα εφαρμόσουμε τις γραμμικές εξισώσεις κίνησης του επιπλέοντος στερεού σώματος, οι οποίες αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 1, για την μελέτη της ευστάθειας και της πηδαλιουχίας πλοίου κινούμενου σε ήρεμη θάλασσα. Πρώτα όμως θα εισάγουμε την ορολογία που παραδοσιακά έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή. Στον Πίνακα 1 δίνεται η αντιστοίχιση των συμβολισμών των διαφόρων κινηματικών και δυναμικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις κίνησης.

| ΠΙΝΑΚΑΣ 1 | | | | | | |
|--|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|----------|----------|
| ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ | | | | | | |
| | Γενική περίπτωση | | | Πηδαλιουχία | | |
| Άξονες συντεταγμένων (Σωματοπαγή συστήματα) | Ox_{1B} | Ox_{2B} | Ox_{3B} | $A\xi$ | $A\eta$ | $A\zeta$ |
| Μετατοπίσεις | ξ_1 | ξ_2 | ξ_3 | ξ | η | ζ |
| Περιστροφές | $\xi_4 = \theta_1$ | $\xi_5 = \theta_2$ | $\xi_6 = \theta_3$ | φ | θ | ψ |
| Γραμμικές ταχύτητες | u_1 | u_2 | u_3 | u | v | w |
| Γωνιακές ταχύτητες | $u_4 = \omega_1$ | $u_5 = \omega_2$ | $u_6 = \omega_3$ | p | q | r |
| Δυνάμεις | F_1 | F_2 | F_3 | X | Y | Z |
| Ροπές | $K_1 = F_4$ | $K_2 = F_5$ | $K_3 = F_6$ | K | M | N |

Το σωματοπαγές σύστημα $A\xi\eta\zeta$ που χρησιμοποιείται για τη μελέτη της ευστάθειας και της πηδαλιουχίας του πλοίου, προκύπτει από το σωματοπαγές σύστημα $Ox_{1B}x_{2B}x_{3B}$ (βλ. εδάφιο 1.2) με μετατόπιση της αρχής των αξόνων \overline{OA} και περιστροφή περί τον διαμήκη άξονα Ox_1 κατά 180° , έτσι ώστε ο κατακόρυφος θετικός ημιάξονας να κατευθύνεται προς τα κάτω. Στο νέο σωματοπαγές σύστημα το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω στον άξονα $A\xi$ και άρα



Σχήμα 1: Τα σωματοπαγή συστήματα $Ox_{1B}x_{2B}x_{3B}$ και $A\xi\eta\zeta$.

$$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3) = m \cdot \vec{R}_G = (m \xi_G, 0, 0) \quad (1)$$

όπου ξ_G η τετμημένη του κέντρου βάρους G στο σύστημα $A\xi\eta\zeta$. Επιπλέον, επειδή το επίπεδο $A\xi\zeta$ (καθώς και το επίπεδο Ox_Bx_{3B}) είναι επίπεδο συμμετρίας του πλοίου, ισχύουν οι σχέσεις

$$I_{12} = I_{\xi\eta} = 0, \quad I_{23} = I_{\eta\zeta} = 0, \quad C_{34} = C_{45} = 0, \quad (2)$$

και οι υδροδυναμικοί συντελεστές (πίνακες) M και N δίνονται από τις σχέσεις 1.6(33) και 1.6(34). Έτσι, αν συμβολίσουμε με U τη (σταθερή) μέση ταχύτητα του πλοίου κατά τον άξονα $A\xi$, η κίνηση του πλοίου περιγράφεται από τις γραμμικές εξισώσεις 1.7(6). Χρησιμοποιώντας την ορολογία του Πίνακα 1, και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις εξισώσεις (1) και (2) ανωτέρω, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων κίνησης του πλοίου:

$$\begin{aligned} m \dot{u} &= X, \\ m(\dot{v} + rU + \dot{r}\xi_G) &= Y, \\ m(\dot{w} - qU - \dot{q}\xi_G) + C_{33}\zeta + C_{35}\theta &= Z, \\ I_{\xi\xi}\dot{p} - I_{\xi\zeta}\dot{r} + C_{44}\varphi &= K, \\ I_{\eta\eta}\dot{q} + m\xi_G(-\dot{w} + qU) + C_{53}\zeta + C_{55}\theta &= M, \\ I_{\zeta\zeta}\dot{p} + I_{\zeta\xi}\dot{r} + m\xi_G(\dot{v} + rU) &= N \end{aligned} \quad (3)$$

όπου C_{33} , C_{44} , C_{55} και $C_{35} = C_{53}$, είναι οι μη-μηδενικοί υδροστατικοί συντελεστές της γάστρας, οι οποίοι δίδονται από τις σχέσεις 1.7(3).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το σύστημα των εξισώσεων (3) περιγράφει ικανοποιητικά την κίνηση του πλοίου όταν οι κινήσεις ζ , φ , θ , οι ταχύτητες $u - U, v, w, p, q, r$, και οι επιταχύνσεις $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ είναι αρκετά μικρές. Ο προσδιορισμός των αποκρίσεων του πλοίου, δηλ. η επίλυση του συστήματος (3), απαιτεί επιπλέον τη γνώση των διεγερουσών φορτίσεων (δυνάμεων και ροπών) X, Y, Z, K, M, N . Για τη μελέτη της ευστάθειας κινήσεως και της πηδαλιουχίας πλοίου σε ήρεμη θάλασσα, λαμβάνονται υπ' όψιν τα εξής αίτια φόρτισης: (i) το περιρρέον νερό, από το οποίο αναπτύσσονται αδρανειακές, συνεκτικές και ανωστικές φορτίσεις, και (ii) διάφορες επιφάνειες ελέγχου, με σημαντικότερη το πηδάλιο. (πρβλ. εδάφιο 1.7). Η μαθηματική μοντελοποίηση των φορτίσεων αυτών περιγράφεται στο επόμενο εδάφιο.

Από τις έξι γραμμικές εξισώσεις κίνησης που περιέχονται στο σύστημα (3), αυτές που ενδιαφέρουν για τη μελέτη της ευστάθειας και της πηδαλιουχίας είναι αυτές που περιγράφουν τις κινήσεις του πλοίου στο οριζόντιο επίπεδο, δηλ. τις κινήσεις κατά τους οριζόντιους άξονες $A\xi$ και $A\eta$, και την περιστροφή περί κατακόρυφο άξονα $A\zeta$. Οι κινήσεις αυτές θα ονομάζονται στη συνέχεια οριζόντιες κινήσεις, χάριν συντομίας. Περαιτέρω, θεωρούμε ότι οι μόνες μη-μηδενικές διαταραχές είναι αυτές που σχετίζονται με τις οριζόντιες κινήσεις, δηλ. οι διαταραχές u, \dot{u}, v, \dot{v} και r, \dot{r} . Με βάση τα ανωτέρω, οι εξισώσεις που διέπουν τις οριζόντιες κινήσεις του πλοίου μπορούν να αποσυζευχθούν από τις υπόλοιπες, οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα τριών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συναρτήσεις $u = u(t)$, $v = v(t)$, $r = r(t)$:

$$\begin{aligned}
m\dot{u} &= X, \\
m(\dot{v} + rU + \dot{r}\xi_G) &= Y, \\
I_{\xi\xi}\dot{r} + m \cdot \xi_G (\dot{v} + rU) &= N.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τρεις ανωτέρω εξισώσεις είναι εκείνες ακριβώς από τις εξισώσεις του συστήματος (3), στις οποίες δεν υπεισέρχονται οι μετατοπίσεις της γάστρας, δεδομένου ότι από τις εξισώσεις αυτές απουσιάζουν οι υδροστατικοί όροι (όροι επαναφοράς, restoring terms). Το γεγονός αυτό έχει μεγάλη σημασία όσον αφορά την ευστάθεια και τον έλεγχο της πορείας του πλοίου κατά το οριζόντιο επίπεδο.

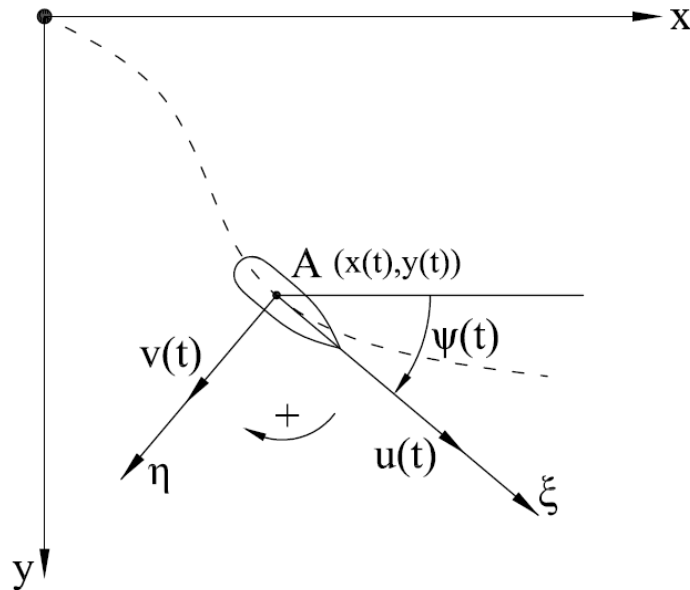
Για τη χάραξη της τροχιάς του πλοίου χρησιμοποιείται ένας γεωπαγές (σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό φλοιό της γης) σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιους άξονες Oxy . Βλ. Σχήμα 2. Εάν παραστήσουμε με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ την τροχιά του πλοίου, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t) \cos \psi(t) - v(t) \sin \psi(t), \\
\dot{y}(t) &= u(t) \sin \psi(t) + v(t) \cos \psi(t).
\end{aligned}
\tag{5}$$

Οι ανωτέρω σχέσεις, σε συνδυασμό με την

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t r(\tau) d\tau,
\tag{6}$$

μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό της τροχιάς του πλοίου, όταν έχουν βρεθεί οι συναρτήσεις των ταχυτήτων $u(t)$, $v(t)$ και $r(t)$ από τη λύση των δυναμικών εξισώσεων (4). Οι κινηματικές εξισώσεις (5) και (6) ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το πλοίο κινείται πάνω στο επίπεδο Oxy . Εάν η τροχιά εκτείνεται σε μεγάλη έκταση, τότε θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και η καμπυλότητα της επιφάνειας της θάλασσας.



Σχήμα 2: Το γεωπαγές σύστημα Oxy και η τροχιά του πλοίου

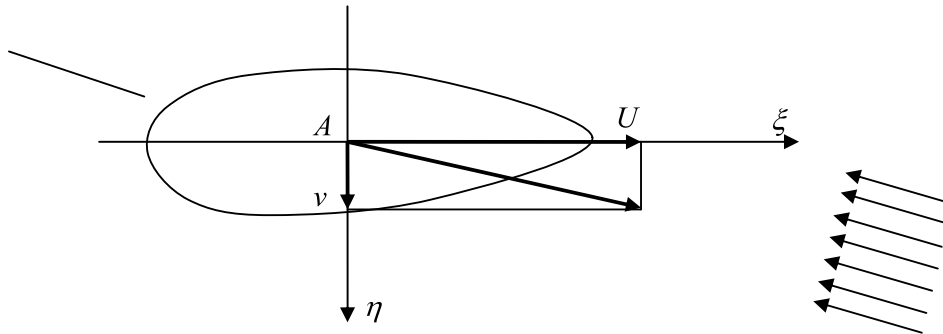
3. Μοντελοποίηση υδροδυναμικών φορτίσεων. Υδροδυναμικές παράγωγοι γάστρας και πηδαλίου

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε τις φορτίσεις X, Y και N , που εμφανίζονται στα δεξιά μέλη των εξισώσεων κίνησης 2(4), υποθέτοντας ότι αυτές προέρχονται από την αλληλεπίδραση του πλοίου (και των παρελκομένων του) με το περιρρέον ήρεμο νερό (βλ. και εδάφιο 1.7). Κατά συνέπεια, οι φορτίσεις αυτές προέρχονται, κατά κύριο λόγο, από τα εξής φαινόμενα:

- Αδρανειακή αντίδραση του περιρρέοντος υγρού,
- Συνεκτικότητα,
- Κυκλοφορία (στο οριζόντιο επίπεδο) γύρω από τη γάστρα του πλοίου, που αναπτύσσεται όταν υπάρχει εγκάρσια συνιστώσα \vec{v} της ταχύτητας του πλοίου (βλ. Σχήμα 1).

Θα ασχοληθούμε πρώτα με τη μοντελοποίηση των υδροδυναμικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω στη γυμνή γάστρα, και στη συνέχεια με τη μοντελοποίηση των υδροδυναμικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σε επιφάνειες ελέγχου (πηδάλιο), και οι οποίες μεταφέρονται στη γάστρα («στο πλοίο») ως πρόσθετες (εξωτερικές) φορτίσεις, μέσω των στοιχείων συνεργασίας με τη γάστρα.

Λόγω του ότι οι κινήσεις διαταραχής του πλοίου που σχετίζονται με την πηδαλιουχία είναι αργές, θεωρούμε ότι δεν προκαλούν σημαντικούς κυματισμούς στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Κατά συνέπεια, οι όροι που εμφανίζονται στη γενική μορφή των εξισώσεων κίνησης, και οι οποίοι μοντελοποιούν την επίδραση των κυμάτων που έχουν παραχθεί από την κίνηση του πλοίου (και που εκφράζονται ως ολοκληρώματα πάνω στη χρονική ιστορία των κινήσεων του πλοίου) συνήθως αμελούνται.



Σχήμα 1: Ανάπτυξη οριζόντιας κυκλοφορίας γύρω από τη γάστρα του πλοίου

Οι φορτίσεις X, Y και N που ασκούνται στη γάστρα του πλοίου αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 X &= F_1(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}) + X_0(t), \\
 Y &= F_2(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}) + Y_0(t), \\
 N &= F_6(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r}) + N_0(t),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

όπου $F_1(\cdot), F_2(\cdot), F_6(\cdot)$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις των έξι ορισμάτων $(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r})$, και $X_0(t), Y_0(t), N_0(t)$ είναι οι φορτίσεις που οφείλονται αφ' ενός μεν στο πηδάλιο, αφ' εταίρου δε σε διάφορους άλλους παράγοντες ανεξάρτητους από τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις του πλοίου. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η μοντελοποίηση των υδροδυναμικών φορτίσεων με τη βοήθεια συναρτήσεων της μορφής $F_k(u, v, r, \dot{u}, \dot{v}, \dot{r})$, αποτελεί μια απλουστευτική παραδοχή και όχι μια γενική αναπαράσταση των υδροδυναμικών φορτίσεων. Για παράδειγμα, η μοντελοποίηση αυτή δεν μπορεί να συμπεριλάβει «όρους μνήμης» (memory terms) οι οποίοι προέρχονται από την ανάπτυξη κυματισμών λόγω των μη-μόνιμων κινήσεων του πλοίου. Εν τούτοις, η μοντελοποίηση (1) των υδροδυναμικών φορτίσεων είναι ικανοποιητική για την μελέτη της ευστάθειας και της πηδαλιουχίας στις περισσότερες περιπτώσεις πλοίων συμβατικού τύπου.

Όσον αφορά τους όρους $X_0(t), Y_0(t)$ και $N_0(t)$ των αναπτύξεων (1) πρέπει να σημειώσουμε τα εξής: Η δύναμη $X_0(t)$ περιλαμβάνει τη μέση ώση \bar{T} της έλικας και την υδροδυναμική αντίσταση του πηδαλίου υπό μηδενική γωνία εκτροπής \bar{R}_{rud} . Περαιτέρω, οι όροι $X_0(t), Y_0(t)$ και $N_0(t)$ περιλαμβάνουν και τις μη-μόνιμες δυνάμεις που ασκούνται από το πηδάλιο στο πλοίο, οι οποίες θα συμβολίζονται $X_{rud}(t), Y_{rud}(t), N_{rud}(t)$. Δηλαδή οι δυνάμεις $X_0(t), Y_0(t)$ και $N_0(t)$ αναλύονται ως εξής:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= \bar{T} + \bar{R}_{rud} + X_{rud}(t) + X_1(t), \\ Y_0(t) &= Y_{rud}(t) + Y_1(t), \\ N_0(t) &= N_{rud}(t) + N_1(t), \end{aligned} \quad (2)$$

όπου $X_1(t), Y_1(t), N_1(t)$ είναι οι εξωτερικές (όχι υδροδυναμικές) φορτίσεις που οφείλονται σε οποιαδήποτε άλλη αιτία⁽¹⁾ (αέρας/άνεμος, φορτίσεις λόγω ρυμουλκήσεως, κ.λπ.). Για την μελέτη της ευστάθειας του πλοίου (εδάφια 7 και 8) θα θεωρήσουμε ότι οι δυνάμεις $X_1(t), Y_1(t), N_1(t)$ είναι κρουστικές, δηλ. ότι η δράση τους περιορίζεται σε μια μόνο χρονική στιγμή $t = t_0$, οπότε μια εξωτερική αιτία διαταράσσει την ομαλή κίνηση του πλοίου.

- Υδροδυναμικές παράγωγοι γάστρας

Οι (άγνωστες) συναρτήσεις F_1, F_2 και F_6 , εξισώσεις (1), μπορούν να αναπτυχθούν κατά Taylor γύρω από μια κατάσταση αναφοράς. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι οι διαταραχές του πλοίου γύρω από αυτήν την κατάσταση αναφοράς είναι αρκούντως μικρές (αργές), στα αναπτύγματα Taylor μπορεί να κρατηθούν μόνο οι πρωτοτάξιοι όροι. Ως κατάσταση αναφοράς λαμβάνουμε αυτή της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης του πλοίου με ταχύτητα U . Επομένως, στην κατάσταση αναφοράς (δείκτης 1) ισχύει:

⁽¹⁾ Ας σημειωθεί όμως ότι οι δυνάμεις $X_1(t), Y_1(t), N_1(t)$ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να μη παραβιάζονται οι υποθέσεις επί των οποίων βασίζεται η μοντελοποίηση των εξισώσεων κίνησης του πλοίου. Υπενθυμίζεται ότι η βασικότερη τέτοια υπόθεση είναι η αργή μεταβολή των κινήσεων και των ταχυτήτων του πλοίου.

$$u_1 = U \quad v_1 = r_1 = \dot{u}_1 = \dot{v}_1 = \dot{r}_1 = 0. \quad (3)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα ανωτέρω, οι δυνάμεις X , Y και η ροπή N αναπτύσσονται ως εξής:

$$\begin{aligned} X = & \bar{X}_1 + \delta u \frac{\partial F_1}{\partial u} + \delta v \frac{\partial F_1}{\partial v} + \delta r \frac{\partial F_1}{\partial r} + \\ & + \delta \dot{u} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{u}} + \delta \dot{v} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{v}} + \delta \dot{r} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{r}} + X_0(t) + \dots \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} Y = & \bar{Y}_1 + \delta u \frac{\partial F_2}{\partial u} + \delta v \frac{\partial F_2}{\partial v} + \delta r \frac{\partial F_2}{\partial r} + \\ & + \delta \dot{u} \frac{\partial F_2}{\partial \dot{u}} + \delta \dot{v} \frac{\partial F_2}{\partial \dot{v}} + \delta \dot{r} \frac{\partial F_2}{\partial \dot{r}} + Y_0(t) + \dots \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} N = & \bar{N}_1 + \delta u \frac{\partial F_6}{\partial u} + \delta v \frac{\partial F_6}{\partial v} + \delta r \frac{\partial F_6}{\partial r} + \\ & + \delta \dot{u} \frac{\partial F_6}{\partial \dot{u}} + \delta \dot{v} \frac{\partial F_6}{\partial \dot{v}} + \delta \dot{r} \frac{\partial F_6}{\partial \dot{r}} + N_0(t) + \dots, \end{aligned} \quad (4c)$$

όπου \bar{X}_1 , \bar{Y}_1 , \bar{N}_1 είναι οι υδροδυναμικές φορτίσεις που αντιστοιχούν στην κατάσταση αναφοράς (3), και το σύμβολο ... υποδηλώνει όρους ανώτερης τάξης, οι οποίοι αμελούνται στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας. Οι ποσότητες

$$X_u = \frac{\partial F_1}{\partial u}, \quad X_v = \frac{\partial F_1}{\partial v}, \quad X_r = \frac{\partial F_1}{\partial r}, \quad X_{\dot{u}} = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{u}}, \quad X_{\dot{v}} = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{v}}, \quad X_{\dot{r}} = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{r}}, \quad (5a)$$

$$Y_u = \frac{\partial F_2}{\partial u}, \quad Y_v = \frac{\partial F_2}{\partial v}, \quad Y_r = \frac{\partial F_2}{\partial r}, \quad Y_{\dot{u}} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{u}}, \quad Y_{\dot{v}} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{v}}, \quad Y_{\dot{r}} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{r}}, \quad (5b)$$

$$N_u = \frac{\partial F_6}{\partial u}, \quad N_v = \frac{\partial F_6}{\partial v}, \quad N_r = \frac{\partial F_6}{\partial r}, \quad N_{\dot{u}} = \frac{\partial F_6}{\partial \dot{u}}, \quad N_{\dot{v}} = \frac{\partial F_6}{\partial \dot{v}}, \quad N_{\dot{r}} = \frac{\partial F_6}{\partial \dot{r}}, \quad (5c)$$

που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (4) ονομάζονται υδροδυναμικές παράγωγοι της εξεταζόμενης γάστρας, και εξαρτώνται από τη γεωμετρία αυτής. Οι ποσότητες αυτές μοντελοποιούν την υδροδυναμική συμπεριφορά της εξεταζόμενης γάστρας, και μπορούν να θεωρηθούν ως η υδροδυναμική ταυτότητά της.

Το φυσικό νόημα των υδροδυναμικών παραγώγων γίνεται φανερό αν προσεγγίσουμε τις παραγωγίσεις με πεπερασμένες διαφορές. Για παράδειγμα, ο όρος X_u γράφεται

$$X_u = \frac{\partial F_1}{\partial u} \approx \frac{X - \bar{X}_1}{\delta u} = \frac{\delta X}{\delta u},$$

όπου δu μικρή ($\delta u \rightarrow 0$) διαταραχή (ως προς την κατάσταση αναφοράς $u_1 = U$) της ταχύτητας κατά τον άξονα $A\xi$, και δX η αντίστοιχη μεταβολή που προκαλείται στη δύναμη X αποκλειστικά και μόνο λόγω της μεταβολής δu . Επομένως, η υδροδυναμική παράγωγος X_u εκφράζει τον λόγο της μεταβολής δX που προκαλείται στη δύναμη X λόγω μικρής μεταβολής δu στην ταχύτητα u , δια της

μεταβολής δu . Αντίστοιχο είναι το φυσικό νόημα όλων των υδροδυναμικών παραγώγων, π.χ. η υδροδυναμική παράγωγος $N_{\dot{v}}$ εκφράζει το λόγο της μεταβολής που υφίσταται η ροπή N που ασκεί το περιρρέον υγρό στο πλοίο, λόγω μικρής μεταβολής $\delta \dot{v}$ στην εγκάρσια επιτάχυνση \dot{v} , δια της μεταβολής $\delta \dot{v}$. Με άλλα λόγια, οι υδροδυναμικές παράγωγοι αποτελούν συντελεστές αναλογίας μεταξύ κινηματικών διαταραχών και των επαγομένων μεταβολών των φορτίσεων που αναπτύσσονται από το περιρρέον υγρό στο σώμα (πλοίο).

Οι υδροδυναμικές παράγωγοι μπορούν να ταξινομηθούν στις κύριες ή διαγώνιες υδροδυναμικές παραγώγους, στις οποίες τόσο η κινηματική διαταραχή όσο και η επαγόμενη φόρτιση λαμβάνουν χώρα κατά την ίδια κατεύθυνση, και στις εκτός διαγωνίου, στις οποίες η επαγόμενη φόρτιση είναι διαφορετικής κατεύθυνσης από την κινηματική διαταραχή. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι $X_u, X_{\dot{u}}, Y_v, Y_{\dot{v}}$ και $N_r, N_{\dot{r}}$, ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι $X_v, X_{\dot{v}}, X_r, X_{\dot{r}}, Y_u, Y_{\dot{u}}, Y_r, Y_{\dot{r}}, N_u, N_{\dot{u}}, N_v, N_{\dot{v}}$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι οι κύριες υδροδυναμικές παράγωγοι είναι αρνητικοί αριθμοί, και μάλιστα έχουν, γενικά, μεγάλη απόλυτη τιμή, διότι η αδρανειακή αντίδραση του περιρρέοντος υγρού κατά την διεύθυνση της μεταβολής της κινηματικής κατάστασης του επιπλέοντος σώματος είναι μεγάλη (εκτός από τις $X_u, X_{\dot{u}}$, οι οποίες μπορεί να έχουν μικρή απόλυτη τιμή λόγω της λεπτόγραμμης μορφής του πλοίου). Αντίθετα, οι εκτός διαγωνισμού υδροδυναμικές παράγωγοι είναι είτε μηδενικές (λόγω συμμετριών⁽²⁾) είτε μικροί κατ' απόλυτη τιμή, θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί (ανάλογα με τη γεωμετρική μορφολογία του σώματος). Για την καλύτερη κατανόηση των ανωτέρω θα εξετάσουμε πιο προσεκτικά ορισμένα παραδείγματα.

- Οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_v και N_v

Θεωρούμε ότι επιβάλλουμε στο πλοίο, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα U κατά τον άξονα $A\xi$, εγκάρσιες μετατοπίσεις με διάφορες ταχύτητες v_1, v_2, v_3, \dots , και εξετάζουμε την επαγόμενη εγκάρσια δύναμη $Y = Y(v)$ και την επαγόμενη ροπή $N = N(v)$. Βλ. Σχήμα 2α. Η συνολική δύναμη $Y = Y(v)$ συντίθεται από τη δύναμη $Y_B(v)$, η οποία ασκείται επί του προωπίου τμήματος της γάστρας, και από τη δύναμη $Y_S(v)$, η οποία ασκείται επί του πρυμναίου τμήματος της γάστρας. Προφανώς, λόγω του είδους της επιβαλλόμενης διαταραχής, οι δυνάμεις $Y_B(v)$ και $Y_S(v)$ είναι μεταξύ τους ομόρροπες (και αντίρροπες ως προς την επιβαλλόμενη διαταραχή v). Άρα $Y(v) = Y_B(v) + Y_S(v)$ και $Y(v)/v < 0$. Επιπλέον, το μέτρο $|Y(v)/v|$ θα έχει σχετικά μεγάλη τιμή, δεδομένου ότι η υδροδυναμική αντίδραση Y προκύπτει ως ολοκλήρωμα υπερπίεσεων πάνω στη μια πλευρά ολόκληρης της γάστρας του πλοίου.

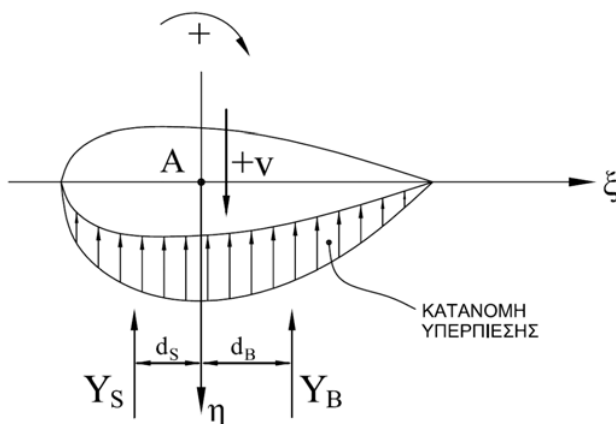
Η συνολική ροπή $N(v)$ που αναπτύσσεται επί της γάστρας προκύπτει από τη συνεισφορά $-d_B |Y_B(v)|$ του προωπίου τμήματος της γάστρας, και τη συνεισφορά

⁽²⁾ Π.χ. στην περίπτωση του πλοίου, οι υδροδυναμικές παράγωγοι $Y_u, Y_{\dot{u}}, N_u, N_{\dot{u}}, X_v, X_{\dot{v}}, X_r, X_{\dot{r}}$ είναι μηδενικές επειδή το επίπεδο $A\xi\xi'$ είναι επίπεδο συμμετρίας.

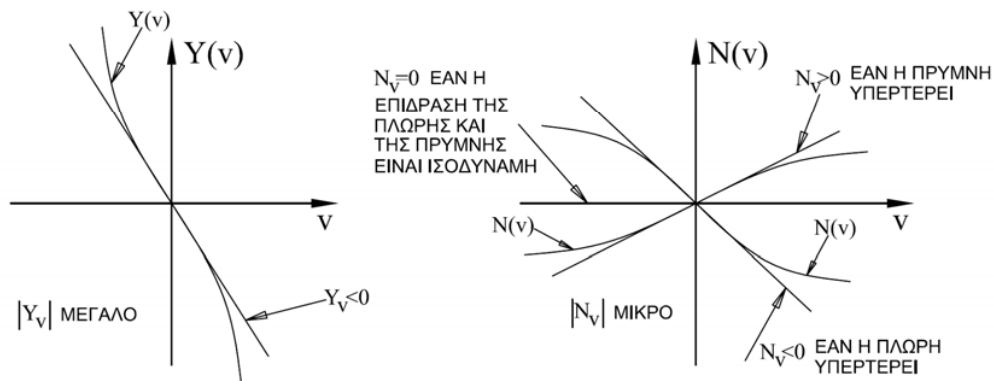
$+d_S |Y_S(v)|$ του πρυμναίου τμήματος της γάστρας. Άρα $N(v) = -d_B |Y_B(v)| + d_S |Y_S(v)|$. Κατά συνέπεια, το μέτρο $|N(v)/v|$ θα είναι γενικά μικρό, και $N(v)/v < 0$ ή $N(v)/v > 0$, ανάλογα με το αν υπερτερεί η επίδραση της πλώρης ή της πρύμνης.

Αν παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις $Y = Y(v)$ και $N = N(v)$, παίρνουμε τις καμπύλες του Σχήματος 2β. Οι υδροδυναμικές παράγωγοι $Y_v = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta v}$ και $N_v = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta N}{\delta v}$ είναι οι κλίσεις των ανωτέρω καμπυλών στη θέση $v=0$. Σύμφωνα με την ανωτέρω ανάλυση, $Y_v < 0$ ενώ $N_v < 0$ ή $N_v > 0$, ανάλογα με το εάν υπερτερεί η επίδραση της πλώρης ή της πρύμνης.

α)



β)

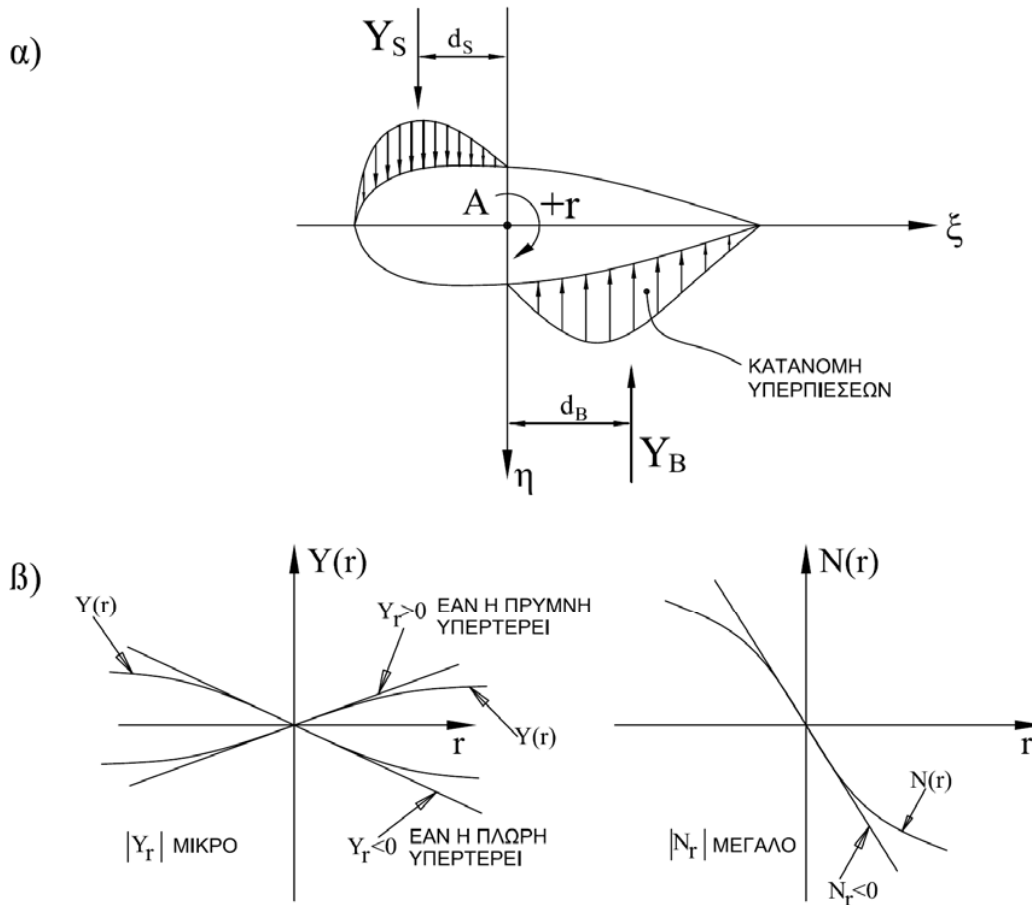


Σχήμα 2: Τυπικές μορφές των συναρτήσεων $Y(v)$ και $N(v)$

- Οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_r και N_r

Στην περίπτωση αυτή φανταζόμαστε ότι επιβάλλουμε στο πλοίο περιστροφές περί τον κατακόρυφο άξονα $A\zeta$ με διάφορες ταχύτητες περιστροφής r_1, r_2, r_3, \dots , και εξετάζουμε την επαγόμενη εγκάρσια δύναμη $Y = Y(r)$ και την επαγόμενη ροπή $N = N(r)$. Βλ. Σχήμα 3α. Και στην περίπτωση αυτή η συνολική δύναμη $Y(r)$ συντίθεται από τη δύναμη $Y_B(r)$, η οποία ασκείται επί του προωραίου τμήματος της

γάστρας, και από τη δύναμη $Y_S(r)$, η οποία ασκείται επί του πρυμναίου τμήματος της γάστρας. Τώρα όμως, λόγω του είδους της επιβαλλόμενης διαταραχής, οι δυνάμεις $Y_B(r)$ και $Y_S(r)$ είναι αντίρροπες. Άρα $Y(r) = Y_B(r) - Y_S(r)$ και $Y(r)/r < 0$ ή $Y(r)/r > 0$, ανάλογα με τη μορφολογία της γάστρας. Σε κάθε περίπτωση όμως το μέτρο $|Y(r)/r|$ θα έχει μικρή τιμή.



Σχήμα 3: Τυπικές μορφές των συναρτήσεων $Y(r)$ και $N(r)$

Όσον αφορά τη ροπή $N(r)$, παρατηρούμε ότι οι συνεισφορές του πρυμναίου και του πρυμναίου τμήματος, $d_B Y_B(r)$ και $d_S Y_S(r)$, αντιστοίχως, είναι πάντοτε ομόρροπες μεταξύ τους, αλλά αντίρροπες ως προς την επιβαλλόμενη διαταραχή r . Κατά συνέπεια, η περίπτωση της $N(r)$ είναι τελείως αντίστοιχη με την περίπτωση της $Y(r)$: $N(r) = d_B Y_B(r) + d_S Y_S(r)$, $N(r)/r < 0$ και $|N(r)/r|$ θα έχει σχετικά μεγάλη τιμή.

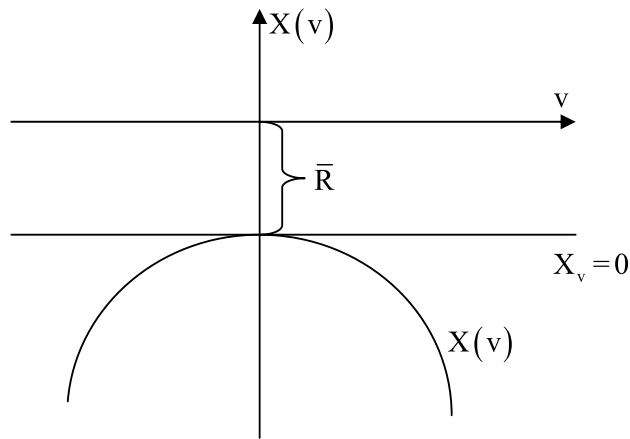
Αν παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις $Y = Y(r)$ και $N = N(r)$, παίρνουμε τις καμπύλες του Σχήματος 3β. Οι υδροδυναμικές παράγωγοι $Y_r = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta Y}{\delta r}$ και

$N_r = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta N}{\delta r}$ είναι οι κλίσεις των ανωτέρω καμπυλών στη θέση $r = 0$. Σύμφωνα με

την ανωτέρω ανάλυση, $N_r < 0$ ενώ $Y_r < 0$ ή $Y_r > 0$ ανάλογα με το εάν υπερτερεί η επίδραση της πλώρης ή της πρύμνης.

- Η υδροδυναμική παράγωγος X_v

Η υδροδυναμική παράγωγος X_v ενός πλοίου μπορεί να υπολογισθεί αν φαντασθούμε εγκάρσιες μετατοπίσεις του πλοίου (επιπροστιθέμενες στη μόνιμη κίνηση αναφοράς του πλοίου) με διάφορες ταχύτητες v_1, v_2, v_3, \dots . Λόγω της συμμετρίας του πλοίου ως προς το επίπεδο $A\xi\xi'$, η συνάρτηση X_v θα είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα (βλ. Σχήμα 4). Κατά συνέπεια εφ' όσον $X_v = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta X}{\delta v}$ είναι η κλίση της ανωτέρω καμπύλης στη θέση $v=0$, θα έχουμε $X_v = 0$.



Σχήμα 4: Τυπική μορφή της συνάρτησης $X(v)$

- Υδροδυναμικές παράγωγοι πηδαλίου

Όταν το πηδάλιο τίθεται σε γωνία εκτροπής $\gamma(t)$ ως προς το κατακόρυφο επίπεδο συμμετρίας του πλοίου, αναπτύσσεται πάνω σ' αυτό μια υδροδυναμική φόρτιση η οποία οφείλεται κυρίως σε φαινόμενα δυναμικής ανώσεως και αντιστάσεως. Η φόρτιση αυτή μεταφέρεται, μέσω του άξονος, επί του πλοίου (γάστρας). Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $X_{rud}(t)$, $Y_{rud}(t)$ και $N_{rud}(t)$ τις συνιστώσες της φόρτισης που επάγεται επί του πλοίου. Οι συνιστώσες αυτές εξαρτώνται κυρίως από τη γωνία εκτροπής $\gamma(t)$, αλλά και από τις παραγώγους αυτής. Έτσι θέτουμε

$$\begin{aligned} X_{rud}(t) &= \Pi_X(\gamma, \dot{\gamma}, \dots), \\ Y_{rud}(t) &= \Pi_Y(\gamma, \dot{\gamma}, \dots), \\ N_{rud}(t) &= \Pi_N(\gamma, \dot{\gamma}, \dots). \end{aligned} \tag{6}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $X_{rud}(t) = \Pi_X(\gamma, \dot{\gamma}, \dots)$, $Y_{rud}(t) = \Pi_Y(\gamma, \dot{\gamma}, \dots)$, $N_{rud}(t) = \Pi_N(\gamma, \dot{\gamma}, \dots)$ ως προς $\gamma, \dot{\gamma}, \dots$, και κρατώντας μόνο τους πρωτοτάξιους όρους παίρνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
X_{rud}(t) &= X_\gamma \gamma(t) + X_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) + \dots \\
Y_{rud}(t) &= Y_\gamma \gamma(t) + Y_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) + \dots \\
N_{rud}(t) &= N_\gamma \gamma(t) + N_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) + \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Οι συντελεστές $X_\gamma, X_{\dot{\gamma}}, \dots$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
X_\gamma &= \frac{\partial \Pi_X}{\partial \gamma} = \lim_{\delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_X}{\delta \gamma}, & X_{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial \Pi_X}{\partial \dot{\gamma}} = \lim_{\delta\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_X}{\delta \dot{\gamma}}, \dots \\
Y_\gamma &= \frac{\partial \Pi_Y}{\partial \gamma} = \lim_{\delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_Y}{\delta \gamma}, & Y_{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial \Pi_Y}{\partial \dot{\gamma}} = \lim_{\delta\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_Y}{\delta \dot{\gamma}}, \dots \\
N_\gamma &= \frac{\partial \Pi_N}{\partial \gamma} = \lim_{\delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_N}{\delta \gamma}, & N_{\dot{\gamma}} &= \frac{\partial \Pi_N}{\partial \dot{\gamma}} = \lim_{\delta\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi_N}{\delta \dot{\gamma}}, \dots
\end{aligned}$$

και ονομάζονται υδροδυναμικές παράγωγοι πηδαλίου.

Συνήθως υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις και οι ροπές που αναπτύσσονται λόγω του ρυθμού μεταβολής (των χρονικών παραγώγων) της γ είναι αμελητέες (γεγονός που δεν ισχύει κατά την εκτέλεση ελιγμών) οπότε οι εξισώσεις (7) απλοποιούνται στις:

$$\begin{aligned}
X_{rud}(t) &= X_\gamma \gamma(t), \\
Y_{rud}(t) &= Y_\gamma \gamma(t), \\
N_{rud}(t) &= N_\gamma \gamma(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Λόγω της συμμετρίας του πηδαλίου ως προς το διάμηκες επίπεδό του, η συνάρτηση $X(\gamma)$ είναι άρτια και επομένως η υδροδυναμική παράγωγος X_γ είναι μηδενική (πρβλ. Σχήμα 4):

$$X_{rud}(t) = 0. \tag{9}$$

4. Εξισώσεις οριζοντίων κινήσεων πλοίου σε ήρεμη θάλασσα:

II. Γενική μορφή – Ευστάθεια

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι, λόγω της συμμετρίας της γάστρας ως προς το διάμηκες κατακόρυφο επίπεδο $A\xi\xi$, οι υδροδυναμικές παράγωγοι $Y_u, Y_{\dot{u}}, N_u, N_{\dot{u}}, X_v, X_{\dot{v}}, X_r, X_{\dot{r}}$ είναι μηδενικές, καθώς και ότι στην κατάσταση αναφοράς έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &\equiv F_1(u_1, v_1, r_1, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{r}_1) = \bar{R} = \text{αντίσταση πλοίου,} \\ \bar{Y}_1 &\equiv F_2(u_1, v_1, r_1, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{r}_1) = 0, \\ \bar{N}_1 &\equiv F_6(u_1, v_1, r_1, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{r}_1) = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

οι εκφράσεις 3(4) για τις υδροδυναμικές φορτίσεις X, Y και N μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{aligned}X - \bar{R} &= X_u \delta u + X_{\dot{u}} \delta \dot{u} + X_0(t), \\ Y &= Y_v v + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_r r + Y_{\dot{r}} \dot{r} + Y_0(t), \\ N &= N_v v + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_r r + N_{\dot{r}} \dot{r} + N_0(t).\end{aligned}\quad (2)$$

Ας σημειωθεί ότι, εκτός της ταχύτητας u , η οποία αποτελεί διαταραχή της «μεγάλης» ταχύτητας U , όλες οι άλλες ταχύτητες και επιταχύνσεις (v, \dot{v}, r, \dot{r} αλλά και η \dot{u}) είναι «μικρές», ταυτίζονται δηλαδή με τις πρωτοτάξιες μεταβολές τους. Γι' αυτό το λόγο, στις σχέσεις (2) ανωτέρω έχουμε θέσει v, \dot{v}, r, \dot{r} αντί για $\delta v, \delta \dot{v}, \delta r, \delta \dot{r}$.

Η μέση αντίσταση του πλοίου \bar{R} και η μέση αντίσταση του πηδαλίου υπό μηδενική γωνία εκτροπής \bar{R}_{rud} τελικώς εξισορροπούνται από την ώση της έλικας. Δηλαδή ισχύει:

$$\bar{T} + \bar{R} + \bar{R}_{rud} = 0.$$

Επομένως, η δύναμη X μπορεί να γραφεί τελικά στη μορφή:

$$X = X_u \delta u + X_{\dot{u}} \delta \dot{u} + X_0(t), \quad (3)$$

όπου τώρα ο όρος $X_0(t)$ δεν συμπεριλαμβάνει ούτε την ώση της έλικας \bar{T} , ούτε την αντίσταση του πηδαλίου \bar{R}_{rud} , δηλαδή είναι:

$$X_0(t) = X_{rud}(t) + X_1(t). \quad (4)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (2b,c), (3), (4) και 3(2b,c), για τις υδροδυναμικές φορτίσεις που ασκούνται πάνω στη γάστρα, στις εξισώσεις κίνησης του πλοίου 2(4), παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τις οριζόντιες κινήσεις του πλοίου:

$$\begin{aligned}-X_u \delta u + (m - X_{\dot{u}}) \delta \dot{u} &= X_{rud}(t) + X_1(t), \\ -Y_v v + (m - Y_{\dot{v}}) \dot{v} + (mU - Y_r) r + (m\xi_G - Y_{\dot{r}}) \dot{r} &= Y_{rud}(t) + Y_1(t), \\ -N_v v + (m\xi_G - N_{\dot{v}}) \dot{v} + (m\xi_G U - N_r) r + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) \dot{r} &= N_{rud}(t) + N_1(t).\end{aligned}\quad (5)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως προς τις οριζόντιες ταχύτητες διαταραχής του πλοίου. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει

στο εδάφιο 2 (Βλ. σχόλια μετά την εξίσωση 2(4)), οι εξισώσεις αυτές δεν περιλαμβάνουν τις κινήσεις ξ, η, ψ , αλλά μόνο τις αντίστοιχες ταχύτητες u, v, r και τις επιταχύνσεις $\dot{u}, \dot{v}, \dot{r}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το γεγονός αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις στην ευστάθεια και τον έλεγχο των οριζόντιων κινήσεων του πλοίου.

Το σύστημα (5) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη:

- Της ευστάθειας του πλοίου στο οριζόντιο επίπεδο, καθώς και
- Της πηδαλιουχίας του πλοίου.

Όταν το σύστημα (5) χρησιμοποιείται για την μελέτη της ευστάθειας του πλοίου, θεωρούμε ότι η μοναδική φόρτιση που ασκείται επ' αυτού είναι μια κρουστική φόρτιση τη χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή

$$X_1(t) = X_{10}\delta(t), \quad Y_1(t) = Y_{10}\delta(t), \quad N_1(t) = N_{10}\delta(t), \quad (6a)$$

($\delta(t)$ είναι ένας παλμός Dirac) και

$$X_{rud}(t) = Y_{rud}(t) = N_{rud}(t) = 0. \quad (6b)$$

Στην περίπτωση αυτή ενδιαφερόμεθα για τη συμπεριφορά της προκαλούμενης ταχύτητας διαταραχής για μεγάλους χρόνους (ασυμπτωτική ευστάθεια). Αν η προκύπτουσα λύση (ταχύτητα διαταραχής) μηδενίζεται καθώς $t \rightarrow \infty$, το πλοίο θα λέγεται ευσταθές. Στην αντίθετη περίπτωση το πλοίο θα λέγεται ασταθές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ευστάθεια των εγκαρσίων κινήσεων η και ψ . Δεδομένου όμως ότι στις εξισώσεις των εγκαρσίων κινήσεων δεν περιέχονται οι μετακινήσεις η και ψ , δεν μπορούμε γενικά να εξασφαλίσουμε ότι $\eta(t) \rightarrow 0$ και $\psi(t) \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Γενικώς ισχύει

$$\psi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \int_0^\infty r(t) dt,$$

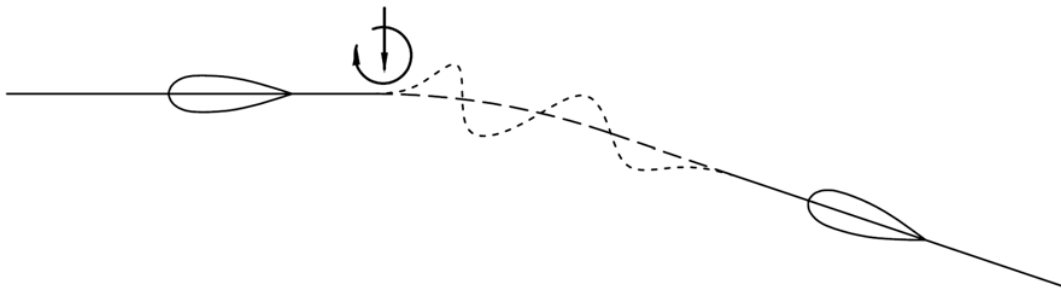
ενώ για να βρούμε την ασυμπτωτική μετατόπιση η_∞ κατά την κατεύθυνση $\eta(t=0)$ πρέπει να ολοκληρώσουμε την οριζόντια ταχύτητα κατά την κατεύθυνση αυτή από $t=0$ έως $t=\infty$. (Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2(5)). Ανάλογα με τις τιμές των η_∞ και ψ_∞ , διακρίνουμε τα ακόλουθα είδη ευστάθειας εγκαρσίων κινήσεων του πλοίου.

- α) Ευστάθεια ευθύγραμμης κίνησης ή δυναμική ευστάθεια (straight line stability or dynamic stability). Θα λέμε ότι ένα πλοίο έχει ευστάθεια ευθύγραμμης κίνησης (δυναμική ευστάθεια) όταν τόσο η αρχική όσο και η τελική τροχιά του πλοίου είναι ευθύγραμμες (αλλά πιθανώς διαφορετικής κατευθύνσεως). Βλ. Σχήμα 1, περίπτωση I. Αυτή είναι η γενική περίπτωση, στην οποία $\eta_\infty \neq 0$, $\psi_\infty \neq 0$.
- β) Ευστάθεια κατευθύνσεως (directional stability). Θα λέμε ότι ένα πλοίο έχει ευστάθεια κατευθύνσεως όταν η αρχική και η τελική τροχιά είναι ευθύγραμμες και παράλληλες μεταξύ τους (αλλά πιθανώς διαφορετικές). Βλ. Σχήμα 1, περίπτωση II. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\eta_\infty \neq 0$ αλλά $\psi_\infty = 0$.

γ) Ευστάθεια τροχιάς (path stability or positional motion stability). Θα λέμε ότι ένα πλοίο έχει ευστάθεια τροχιάς όταν η αρχική και η τελική τροχιά είναι ευθύγραμμες και αποτελούν η μια προέκταση της άλλης. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δηλαδή $\eta_{\infty} = 0$, $\psi_{\infty} = 0$. Βλ. Σχήμα 1, περίπτωση III.

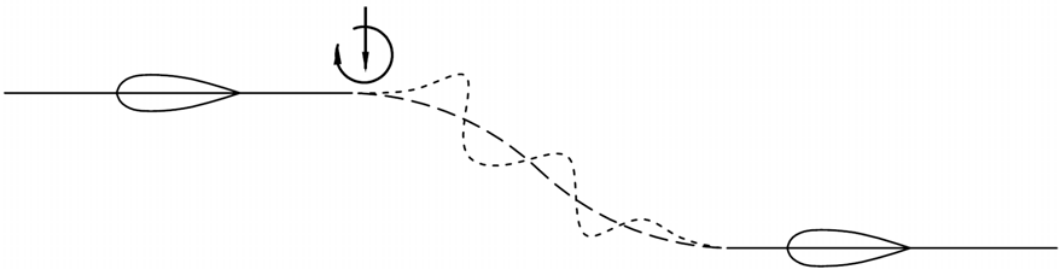
I. Ευστάθεια ευθύγραμμης κίνησης (straight line stability)

($\eta_{\infty} \neq 0$, $\psi_{\infty} \neq 0$)



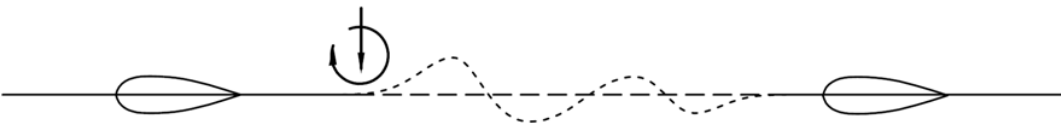
II. Ευστάθεια κατευθύνσεως (directional stability)

($\eta_{\infty} \neq 0$, $\psi_{\infty} = 0$)



II. Ευστάθεια τροχιάς (path stability)

($\eta_{\infty} = 0$, $\psi_{\infty} = 0$)



Σχήμα 1: Είδη ευστάθειας πλοίου κινούμενου με σταθερή μέση ταχύτητα

Από τα ανωτέρω είδη ευστάθειας, μόνο το πρώτο (το οποίο αντιστοιχεί στην ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος (5)) μπορεί να επιτευχθεί χωρίς τη χρήση επιφανειών ελέγχου (π.χ. πηδαλίου) ή άλλων μέσων πηδαλιουχίας (bow thrusters), και μόνο αυτό θα μελετηθεί στη συνέχεια (εδάφιο 8).

Εισάγοντας τις σχέσεις (6a,b) στα δεξιά μέλη των εξισώσεων του συστήματος (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
-X_u \delta u + (m - X_{\dot{u}}) \delta \dot{u} &= X_{10} \delta(t), \\
-Y_v v + (m - Y_{\dot{v}}) \dot{v} + (mU - Y_r) r + (m\xi_G - Y_{\dot{r}}) \dot{r} &= Y_{10} \delta(t), \\
-N_v v + (m\xi_G - N_{\dot{v}}) \dot{v} + (m\xi_G U - N_r) r + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) \dot{r} &= N_{10} \delta(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Η πρώτη από τις ανωτέρω εξισώσεις είναι ανεξάρτητη από τις δύο άλλες, πράγμα που σημαίνει ότι η ευστάθεια κατά το διαμήκη άξονα μπορεί να μελετηθεί μόνη της (Βλ. εδάφιο 7). Αντίθετα, οι εξισώσεις (7b,c) αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων, από τη λύση του οποίου συμπεραίνουμε σχετικά με την ευστάθεια των εγκάρσιων κινήσεων του πλοίου (βλ. εδάφιο 8).

Ας επανέλθουμε τώρα στο σύστημα (5). Όταν το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται για την μελέτη της πηδαλιουχίας του πλοίου, στο δεξιά μέλος των εξισώσεων κίνησης θεωρούμε μόνο τις φορτίσεις από το πηδάλιο $X_{rud}(t)$, $Y_{rud}(t)$, $N_{rud}(t)$, και θεωρούμε

$$X_1(t) = Y_1(t) = N_1(t) = 0.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις 3(8b,c) και 3(9) στα δεξιά μέλη των εξισώσεων του συστήματος (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
-X_u \delta u + (m - X_{\dot{u}}) \delta \dot{u} &= 0, \\
-Y_v v + (m - Y_{\dot{v}}) \dot{v} + (mU - Y_r) r + (m\xi_G - Y_{\dot{r}}) \dot{r} &= Y_\gamma \gamma(t), \\
-N_v v + (m\xi_G - N_{\dot{v}}) \dot{v} + (m\xi_G U - N_r) r + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) \dot{r} &= N_\gamma \gamma(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Στην περίπτωση αυτή, η πρώτη εξίσωση επιλύεται αμέσως:

$$\delta u = 0, \text{ δηλαδή } u(t) = U. \tag{9}$$

Από την επίλυση του συστήματος (8), για δεδομένη χρονική ιστορία εκτροπής πηδαλίου $\gamma(t)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες $u(t)$, $v(t)$ και $r(t)$ του πλοίου και, με τη βοήθεια αυτών και των σχέσεων 2(5) και 2(6), μπορούμε να χαράξουμε την τροχιά του.

5. Πειραματικός προσδιορισμός υδροδυναμικών παραγώγων

Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούν οι πειραματικές μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των υδροδυναμικών παραγώγων που εμφανίζονται στα συστήματα εξισώσεων 4(7) και 4(8).

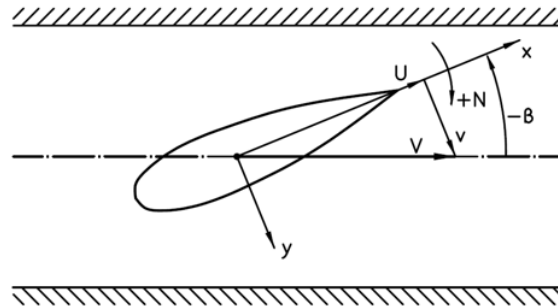
5.1 Πείραμα ευθύγραμμης ρυμούλκησης (straight line towing experiment)

Οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_v και N_v πλοίου για οποιοδήποτε βύθισμα και διαγωγή μπορούν να καθορισθούν από μετρήσεις σε μοντέλο του πλοίου, ερματισμένο σε γεωμετρικά ανάλογο βύθισμα και διαγωγή. Το μοντέλο ρυμουλκείται σε μακρόστενη δεξαμενή με σταθερή ταχύτητα $V = V_m$, που προκύπτει από ισότητα των αριθμών Froude μεταξύ πλοίου και μοντέλου, και με διάφορες γωνίες πρόσπτωσης της ροής β ως προς τον άξονα x του μοντέλου. Στο Σχήμα 1 φαίνεται ο προσανατολισμός του μοντέλου στην δεξαμενή. Για μικρές γωνίες εκτροπής β η πρόσω ταχύτητα U του μοντέλου (δηλαδή η ταχύτητά του κατά τον διαμήκη σωματοπαγή άξονα) και η εγκάρσια ταχύτητά του v δίνονται από τις σχέσεις:

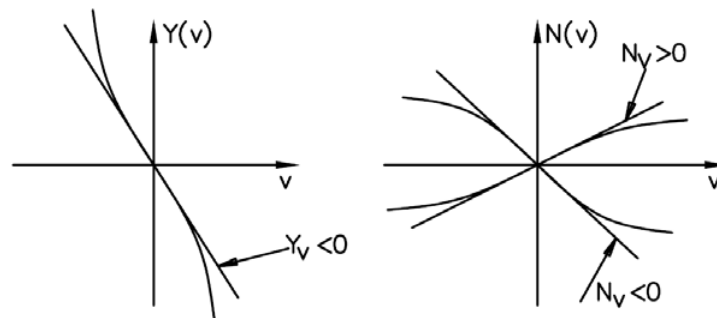
$$U = V \cos \beta \approx V, \quad (1)$$

$$v = -V \sin \beta \approx -V\beta \approx -U\beta. \quad (2)$$

Ένα δυναμόμετρο στην αρχή O (προτιμότερο να βρίσκεται στο μέσο νομέα) μετράει την δύναμη Y και την ροπή N η οποία ασκείται στο μοντέλο για διαφορετικές τιμές της γωνίας β . Αυτές οι μετρήσεις στην συνέχεια μετατρέπονται σε διαγράμματα $Y-V$ και $N-V$ αντίστοιχα (Σχήμα 2).



Σχήμα 1: Πείραμα ευθύγραμμης ρυμούλκησης.



Σχήμα 2: Τυπικές καμπύλες $Y-V$ και $N-V$.

Οι κλίσεις αυτών των καμπυλών για $V = 0$ δίνουν αριθμητικές τιμές των Y_v και N_v για το μοντέλο, οι οποίες συνήθως αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$Y'_v = \frac{Y_v}{\frac{1}{2} \rho_m L_m^2 V_m}, \quad (3)$$

$$N'_v = \frac{N_v}{\frac{1}{2} \rho_m L_m^3 V_m}, \quad (4)$$

όπου L_m, V_m είναι το μήκος και η ταχύτητα του μοντέλου, και ρ_m η πυκνότητα του νερού της δεξαμενής.

Οι διαστατές τιμές των υδροδυναμικών παραγώγων Y_v, N_v για το πλοίο λαμβάνονται αν πολλαπλασιάσουμε τις ανωτέρω αδιάστατες τιμές με $\frac{\rho_s}{2} L_s^2 V_s$ και $\frac{\rho_s}{2} L_s^3 V_s$, αντίστοιχα, όπου L_s, V_s είναι το μήκος και η ταχύτητα του πλοίου και ρ_s η πυκνότητα του θαλασσινού νερού.

Η μεθοδολογία που περιγράφηκε ανωτέρω μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον καθορισμό των υδροδυναμικών παραγώγων επιφανειών ελέγχου (π.χ. πηδαλίου) Y_v και N_v . Αν το μοντέλο του Σχήματος 1 ρυμουλκείται με μηδενική γωνία πρόσπτωσης ($\beta=0$) αλλά με διάφορες γωνίες εκτροπής του πηδαλίου γ , τότε οι μετρήσεις του δυναμομέτρου θα δώσουν την δύναμη Y και την ροπή N ως συνάρτηση της γωνίας εκτροπής του πηδαλίου. Αν αυτές οι μετρήσεις παρασταθούν διαγραμματικά λαμβάνονται όπως και προηγουμένως οι Y_v και N_v .

5.2 Πείραμα περιστροφικής ρυμούλκησης (με χρήση περιστροφικού βραχίονα, rotating arm mechanism)

Με το πείραμα αυτό προσδιορίζονται οι υδραδυναμικές παράγωγοι Y_r και N_r καθώς και οι Y_v και N_v , που αποτελούν τα βασικά υδροδυναμικά δεδομένα για την μελέτη της ευστάθειας πορείας του πλοίου. Για την πραγματοποίηση αυτού του πειράματος απαιτείται ειδικός τύπος δεξαμενής. Το μοντέλο στερεώνεται (πακτώνεται), (Σχήμα 3), στην άκρη ενός βραχίονα ο οποίος περιστρέφεται περί το άλλο άκρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα r . Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες το μοντέλο κινείται με σταθερή πρόσω ταχύτητα $U = rR$, όπου R η ακτίνα περιστροφής.

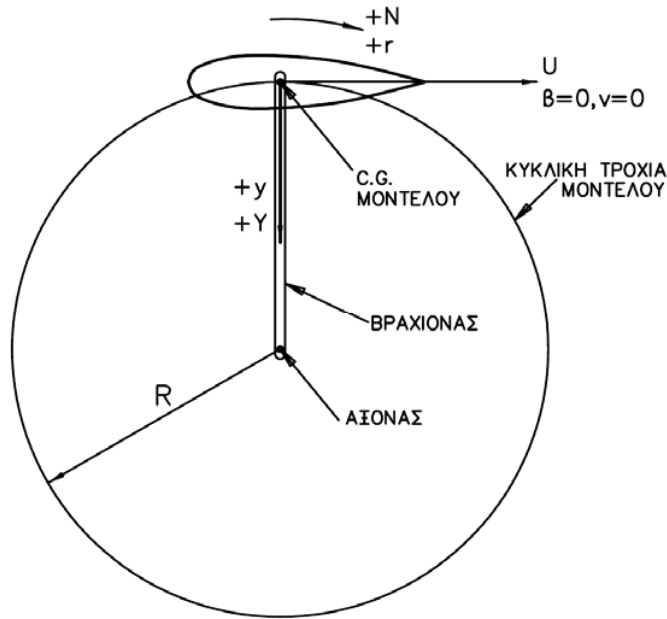
Η δύναμη F_n , που είναι απαραίτητη για την συγκράτηση του μοντέλου και ασκείται κατά την διεύθυνση της ακτίνας καθώς και η ροπή G_z περί τον κατακόρυφο άξονα από το κέντρο βάρους του μοντέλου μετριούνται για σταθερή ταχύτητα πρόωσης και για διάφορες γωνιακές ταχύτητες. Όπως προκύπτει από την σχέση $U = rR$ η διαφοροποίηση στην γωνιακή ταχύτητα επιτυγχάνεται με μεταβολή της ακτίνας περιστροφής. Επιπλέον τα δυναμόμετρα μετρούν την δύναμη Y και την ροπή N που ασκούνται επί του μοντέλου. Το μοντέλο επιταχύνεται στην επιθυμητή ταχύτητα και

γίνονται οι μετρήσεις. Οι εξισώσεις κίνησης του μοντέλου υπό την επίδραση της δύναμης F_n και της ροπής G_z είναι:

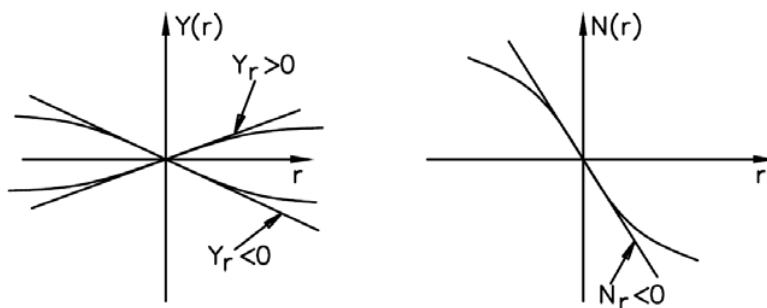
$$F_n + Y = mr^2 R, \quad (5)$$

$$G_z + N = 0. \quad (6)$$

Αφού παρθούν οι μετρήσεις και χαραχθούν τα διαγράμματα $Y(r)$ και $N(r)$ (τυπικές μορφές αυτών φαίνονται στο Σχήμα 4), οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_r και N_r μπορούν να υπολογισθούν εκτιμώντας την κλίση των καμπυλών στην αρχή των αξόνων, δηλαδή για $r = 0$.



Σχήμα 3: Πείραμα περιστροφικής ρυμούλκησης.



Σχήμα 4: Τυπικές καμπύλες $Y-r$ και $N-r$.

Το μοντέλο και εδώ όπως και στην προηγούμενη μεθοδολογία πρέπει να είναι ερματισμένο έτσι ώστε να πλέει στο κατάλληλο βύθισμα και διαγωγή. Επίσης το πηδάλιο πρέπει να βρίσκεται σε μηδενική γωνία εκτροπής και η έλικα του μοντέλου (εάν υπάρχει) να λειτουργεί στο σημείο το αντίστοιχο του σημείου πρόωσης του πλοίου. Με την μεθοδολογία του περιστρεφόμενου βραχίονα μπορούν να καθορισθούν και οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_v και N_v . Αυτό επιτυγχάνεται

ρυμουλκώνοντας το μοντέλο σε διάφορες γωνίες β για κάθε τιμή της περιστροφικής ταχύτητας r , όχι μόνο για $\beta=0$. Αν χαραχθούν σε διάγραμμα οι τιμές των Y_v και N_v για κάθε τιμή r , συναρτήσει του r , οι τιμές των Y_v και N_v για $r=0$ μπορούν να υπολογισθούν. Επίσης είναι δυνατό να υπολογισθούν οι τιμές των υδροδυναμικών παραγώγων ελέγχου Y_γ και N_γ με τρόπο ανάλογο εκείνο του υπολογισμού των Y_v και N_v . Δυστυχώς οι τιμές των $Y_\gamma, N_\gamma, Y_v, N_v$ που λαμβάνονται εδώ δεν συμφωνούν πάντα με τις τιμές της προηγούμενης μεθοδολογίας.

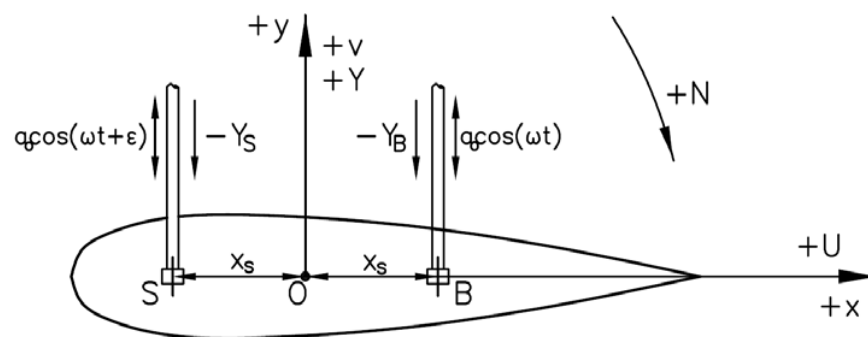
Σημαντικά μειονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι:

- α) η εξειδικευμένη μορφή της δεξαμενής πειραμάτων
- β) η αναγκαιότητα μετρήσεων για μικρές τιμές της περιστροφικής ταχύτητας πράγμα που οδηγεί στην απαίτηση μεγάλης ακτίνας περιστροφής.

5.3 Πείραμα ταλαντωτικής ρυμούλκησης με μηχανισμό επιπέδου κινήσεως (planar motion mechanism)

Προκειμένου να μειωθεί η δαπάνη που επιφέρουν τα πειράματα με περιστρεφόμενο βραχίονα αναπτύχθηκε η μεθοδολογία μηχανισμού επιπέδου κινήσεως, η οποία μπορεί να υλοποιηθεί σε κοινή μακρόστενη δεξαμενή ρυμούλκησης, για να μετρηθούν οι υδροδυναμικές παράγωγοι $Y_v, N_v, Y_r, N_r, Y_\beta, N_\beta, Y_\dot{\beta}, N_\dot{\beta}$.

Ο μηχανισμός επιπέδου κινήσεως αποτελείται από δύο ταλαντωτές, ένας από τους οποίους παράγει εγκάρσιες ταλαντώσεις στην πλώρη και ο άλλος εγκάρσιες ταλαντώσεις στην πρύμνη, ενώ ταυτόχρονα το μοντέλο ρυμουλκείται στην δεξαμενή με σταθερή ταχύτητα U . Σχηματικά τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 5 που ακολουθεί.



Σχήμα 5: Πείραμα ταλαντωτικής ρυμούλκησης με μηχανισμό επιπέδου κίνησης.

Το σημείο B , κοντά στην πλώρη σε απόσταση x_s μπροστά από την αρχή O , (η οποία συνήθως λαμβάνεται στο μέσο νομέα), ταλαντούται εγκαρσίως με μικρό πλάτος a_o και γωνιακή συχνότητα ω . Το σημείο S , κοντά στην πρύμνη, σε απόσταση x_s από την αρχή O , ταλαντούται εγκαρσίως με το ίδιο πλάτος a_o και την ίδια συχνότητα ω . Η διαφορά φάσεως της ταλάντωσης στην πρύμνη σχετικά με εκείνη της πλώρης έστω ότι είναι ϵ . Η ταλαντωτική κίνηση που επιβάλλουν οι βραχίονες στην πλώρη και στην πρύμνη δίδεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$y_s = a_o \cos(\omega t + \varepsilon), \quad (7)$$

$$y_B = a_o \cos \omega t. \quad (8)$$

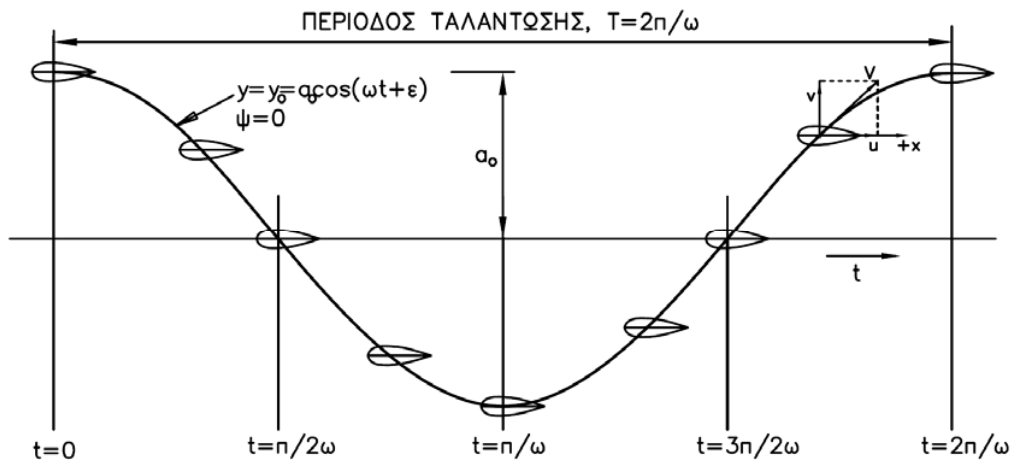
Οι δείκτες S και B σημαίνουν stern και bow, πρύμνη και πλώρη, αντίστοιχα. Αν $\varepsilon=0$ τότε ισχύει:

$$y_s = y_B = y = a_o \cos \omega t, \quad (9)$$

$$\dot{y} = v = -a_o \omega \sin \omega t = a_o \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10)$$

$$\ddot{y} = \dot{v} = -a_o \omega^2 \cos \omega t = a_o \omega^2 \cos(\omega t + \pi). \quad (11)$$

Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο υπόκειται στην ταλαντωτική κίνηση που φαίνεται στο Σχήμα 6 που ακολουθεί.



Σχήμα 6: Πορεία και προσανατολισμός του μοντέλου στην περίπτωση εγκάρσιας ταλαντωτικής κίνησης χωρίς περιστροφή.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$m\dot{v}(t) = \Delta Y(t) - Y_S(t) - Y_B(t), \quad (12)$$

$$m\xi_G \dot{v}(t) = x_s (Y_B(t) - Y_S(t)) + \Delta N(t). \quad (13)$$

Μετρώντας τις δυνάμεις $Y_S(t), Y_B(t)$ στα δύο δυναμόμετρα και γνωρίζοντας την κίνηση μπορούμε να υπολογίσουμε τις υδροδυναμικές αντιδράσεις $\Delta Y(t), \Delta N(t)$.

Εξάλλου οι υδροδυναμικές δυνάμεις και ροπές στην προκειμένη περίπτωση, όπου το μοντέλο υποβάλλεται σε εγκάρσια αρμονική ταλάντωση χωρίς περιστροφή, αναπτύσσονται ως εξής:

$$\Delta Y(t) = Y_v v(t) + Y_{\dot{v}} \dot{v}(t) + Y_{\ddot{v}} \ddot{v}(t) + \dots, \quad (14)$$

$$\Delta N(t) = N_v v(t) + N_{\dot{v}} \dot{v}(t) + N_{\ddot{v}} \ddot{v}(t) + \dots, \quad (15)$$

όπου οι υδροδυναμικοί συντελεστές υποτίθενται ανεξάρτητοι του χρόνου. Δεδομένου ότι:

$$v(t) = \dot{y}(t), \quad (16)$$

$$\dot{v}(t) = \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t), \quad (17)$$

$$\ddot{v}(t) = \dddot{y}(t) = -\omega^2 \dot{y}(t), \quad (18)$$

$$\ddot{v}(t) = (-\omega^2)^2 y(t), \quad (19)$$

οι σχέσεις (14) και (15) θα μετασχηματισθούν στις:

$$\Delta Y(t) = (Y_v - \omega^2 Y_{\dot{v}} + \dots)v(t) + (Y_{\dot{v}} - \omega^2 Y_{\ddot{v}} + \dots)\dot{v}(t) + \dots, \quad (20)$$

$$\Delta N(t) = (N_v - \omega^2 N_{\dot{v}} + \dots)v(t) + (N_{\dot{v}} - \omega^2 N_{\ddot{v}} + \dots)\dot{v}(t) + \dots \quad (21)$$

Στο πείραμα αυτό η κυκλική συχνότητα ω της εγκάρσιας ταλάντωσης του μοντέλου είναι σχετικά μικρή, ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε κοντά στο όριο $\lim_{\omega \rightarrow 0} (Y_v - \omega^2 Y_{\dot{v}} + \dots) = Y_v$. Το ίδιο υποθέτουμε ότι ισχύει και για τις άλλες υδροδυναμικές παραγώγους που εμφανίζονται στις προηγούμενες σχέσεις. Εισάγοντας αυτή την απλούστευση στις εξισώσεις (20) και (21) παίρνουμε:

$$\Delta Y(t) = (Y_v)v(t) + (Y_{\dot{v}})\dot{v}(t) + \dots, \quad (20')$$

$$\Delta N(t) = (N_v)v(t) + (N_{\dot{v}})\dot{v}(t) + \dots \quad (21')$$

Ας συμβολίσουμε τώρα με t_{in} την χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $v(t_{in}) = -a_o \omega \sin \omega t_{in} = 0$ και με t_{out} την χρονική στιγμή για την οποία είναι $\dot{v}(t_{out}) = -a_o \omega^2 \cos \omega t_{out} = 0$, δηλαδή:

$$\omega t_{in} = l\pi \Rightarrow t_{in} = l \frac{T}{2}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (22)$$

$$\omega t_{out} = l\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{out} = \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{T}{2}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

όπου T είναι η περίοδος της εγκάρσιας ταλάντωσης του μοντέλου.

Τότε, από τις σχέσεις (20') και (21'), σε συνδυασμό με τις (12) και (13), λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις υδροδυναμικές παραγώγους $Y_v, Y_{\dot{v}}, N_v, N_{\dot{v}}$:

$$Y_v = \frac{Y_B(t_{out}) + Y_S(t_{out})}{-\alpha_o \omega}, \quad (24)$$

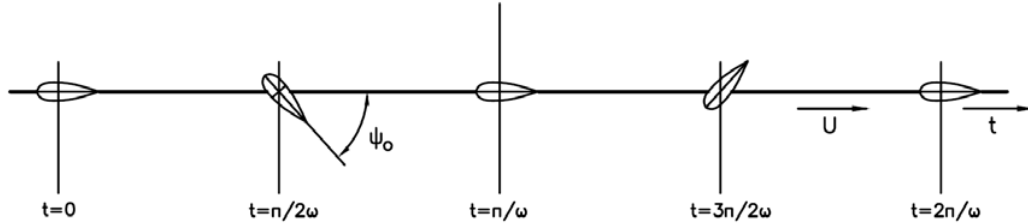
$$N_v = \frac{[Y_B(t_{out}) - Y_S(t_{out})]x_s}{-\alpha_o \omega}, \quad (25)$$

$$Y_{\dot{v}} - m = \frac{Y_B(t_{in}) + Y_S(t_{in})}{-\omega^2 \alpha_o}, \quad (26)$$

$$N_{\dot{v}} - m \xi_G = \frac{[Y_B(t_{in}) - Y_S(t_{in})]x_s}{-\omega^2 \alpha_o}. \quad (27)$$

Για να παραχθούν οι παράγωγοι Y_r και N_r το μοντέλο πρέπει να κινείται έτσι ώστε $r \neq 0$ και οι μετρήσεις πρέπει να γίνουν όταν $\dot{r} = 0, v = 0$ και $\dot{v} = 0$. Ομοίως για να

βρεθούν οι Y_r και N_r θα πρέπει να έχουμε $\dot{r} \neq 0$ και μετρήσεις να ληφθούν όταν $r = 0, v = 0$ και $\dot{v} = 0$. Προκειμένου να επιβληθεί γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση στο μοντέλο με $v = \dot{v} = 0$, αυτό πρέπει να ρυμουλκηθεί με τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Πορεία και προσανατολισμός του μοντέλου στην περίπτωση περισοφικής ταλάντωσης.

Οι εξισώσεις κίνησης τώρα είναι:

$$mUr(t) + m\xi_G \dot{r}(t) = \Delta Y(t) - Y_S(t) - Y_B(t), \quad (28)$$

$$m\xi_G Ur(t) + I_z \dot{r}(t) = x_s (Y_B(t) - Y_S(t)) + \Delta N(t). \quad (29)$$

Για να παραχθεί το είδος της κίνησης του Σχήματος 7 απαιτείται διαφορά φάσης μεταξύ πρυμναίου και πρωραίου ταλαντωτή ίση με π (180°).

Τότε έχουμε $v = \frac{1}{2}(\dot{y}_B + \dot{y}_S) = 0$ και:

$$\psi(t) = \frac{y_B(t)}{L_m/2} = -\psi_o \cos \omega t, \quad \psi_o = -\frac{2a_o}{L_m}, \quad (30)$$

$$r(t) = \dot{\psi}(t) = +\psi_o \omega \sin \omega t, \quad (31)$$

$$\dot{r}(t) = \ddot{\psi}(t) = +\psi_o \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 \psi(t), \quad (32)$$

$$\ddot{r}(t) = \dddot{\psi}(t) = -\omega^2 \dot{\psi}(t), \quad (33)$$

$$\ddot{r}(t) = (-\omega^2)^2 \psi(t). \quad (34)$$

Ακολουθώντας την λογική της προηγούμενης περίπτωσης γράφουμε:

$$\Delta Y(t) = Y_r r(t) + Y_{\dot{r}} \dot{r}(t) + Y_{\ddot{r}} \ddot{r}(t) + Y_{\ddot{r}} \ddot{r}(t) + \dots, \quad (35)$$

$$\Delta N(t) = N_r r(t) + N_{\dot{r}} \dot{r}(t) + N_{\ddot{r}} \ddot{r}(t) + N_{\ddot{r}} \ddot{r}(t) + \dots, \quad (36)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (33), (34) παίρνουμε:

$$\Delta Y(t) = (Y_r - \omega^2 Y_{\dot{r}} + \dots) r(t) + (Y_{\dot{r}} - \omega^2 Y_{\ddot{r}} + \dots) \dot{r}(t) + \dots, \quad (37)$$

$$\Delta N(t) = (N_r - \omega^2 N_{\dot{r}} + \dots) r(t) + (N_{\dot{r}} - \omega^2 N_{\ddot{r}} + \dots) \dot{r}(t) + \dots \quad (38)$$

Θεωρώντας και σ' αυτό το σημείο ότι, η γωνιακή συχνότητα ω είναι σχετικά μικρή, οι ανωτέρω σχέσεις απλουστεύονται στις:

$$\Delta Y(t) = (Y_r)r(t) + (Y_{\dot{r}})\dot{r}(t) + \dots, \quad (37')$$

$$\Delta N(t) = (N_r)r(t) + (N_{\dot{r}})\dot{r}(t) + \dots \quad (38')$$

Συμβολίζοντας τώρα με t_{in} την χρονική στιγμή για την οποία $r(t_{in}) = \psi_o \omega \sin \omega t_{in} = 0$ και t_{out} την χρονική στιγμή για την οποία $\dot{r}(t_{out}) = \psi_o \omega^2 \cos \omega t_{out} = 0$, έχουμε:

$$\omega t_{in} = l\pi \Rightarrow t_{in} = \frac{Tl}{2}, \quad l=1,2,\dots, \quad (39)$$

$$\omega t_{out} = l\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{out} = \frac{T}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad l=1,2,\dots \quad (40)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (37'), (38') για $t=t_{in}$ και $t=t_{out}$, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις κίνησης (28), (29) παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις υδροδυναμικές παραγώγους $Y_r, Y_{\dot{r}}, N_r, N_{\dot{r}}$:

$$Y_r - m u = \frac{Y_B(t_{out}) + Y_S(t_{out})}{\psi_o \omega}, \quad (41)$$

$$N_r - m \xi_G u = \frac{[Y_B(t_{out}) - Y_S(t_{out})] x_s}{\psi_o \omega}, \quad (42)$$

$$Y_{\dot{r}} - m \xi_G = \frac{Y_B(t_{in}) + Y_S(t_{in})}{\psi_o \omega^2}, \quad (43)$$

$$N_{\dot{r}} - I_z = \frac{[Y_B(t_{in}) - Y_S(t_{in})] x_s}{\psi_o \omega^2}. \quad (44)$$

Τα Y_B και Y_S είναι όπως και προηγουμένως οι μετρήσεις των δυναμομέτρων.

Προσοχή πρέπει να δίνεται στην χρήση των αποτελεσμάτων της μεθοδολογίας μηχανισμού επιπέδου κίνησης, σε σχέση με πιθανές επιδράσεις της συχνότητας ω στα αποτελέσματα. (Οι ταλαντωτικές κινήσεις του μοντέλου παράγουν κύματα συχνότητας ω , τα οποία αλλοιώνουν τα αποτελέσματα). Κάνοντας πειράματα σε διάφορες (μικρές) συχνότητες μπορούμε να ελέγξουμε εάν οι υδροδυναμικές παράγωγοι είναι ανεξάρτητες από την συχνότητα στις συνθήκες του πειράματος.

5.4 Πειράματα με ελεύθερα μοντέλα (free model experiments)

Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει πειράματα με τηλεχειριζόμενα μοντέλα (ή μοντέλα με πιλότο) τα οποία λαμβάνουν χώρα σε τετράγωνες δεξαμενές ή λίμνες. Εκτελούνται δε ελιγμοί όμοιοι με εκείνους του πραγματικού πλοίου. Από τα πειράματα αυτά λαμβάνονται αποτελέσματα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πρόγραμμα εξομοίωσης της κίνησης του πλοίου. Δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τα πειράματα αυτά στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος.

5.5 Αποτελέσματα πειραματικού προσδιορισμού υδροδυναμικών παραγώγων

Οι πειραματικές μετρήσεις των υδροδυναμικών παραγώγων μοντέλων δίνουν την δυνατότητα παραγωγής εμπειρικών ή ημιεμπειρικών σχέσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά τον αρχικό σχεδιασμό του πλοίου, προκειμένου να εκτιμηθούν οι υδροδυναμικές παράγωγοι αυτού. Τέτοιου είδους σχέσεις παρήχθησαν από τον Clarke (1982) ο οποίος χρησιμοποίησε την μέθοδο της πολλαπλής παλινδρόμησης (multiple regression) προκειμένου να αξιοποιήσει υπάρχοντα αποτελέσματα πειραμάτων με περιστρεφόμενο βραχίονα και με μηχανισμό επιπέδου κινήσεως. Οι σχέσεις στις οποίες κατέληξε ο Clarke ακολουθούν. (Στην δεύτερη στήλη δίδονται, ενδεικτικά, οι αριθμητικές τιμές των δεξιά μελών των εξισώσεων της πρώτης στήλης για μια γάστρα με $B/L = 1/7 = 0.143$, $B/t = 2.5$ και $C_B = 0.70$).

$$\frac{-Y'_v}{\pi(T/L)^2} = 1 + 0.16C_B \frac{B}{T} - 5.1 \left(\frac{B}{L}\right)^2 \quad 1.176 \quad (45)$$

$$\frac{-Y'_r}{\pi(T/L)^2} = 0.67 \frac{B}{L} - 0.0033 \left(\frac{B}{T}\right)^2 \quad 0.075 \quad (46)$$

$$\frac{-N'_v}{\pi(L/T)^2} = 1.1 \frac{B}{L} - 0.041 \frac{B}{T} \quad 0.055 \quad (47)$$

$$\frac{-N'_r}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{12} + 0.017C_B \frac{B}{T} - 0.33 \frac{B}{L} \quad 0.066 \quad (48)$$

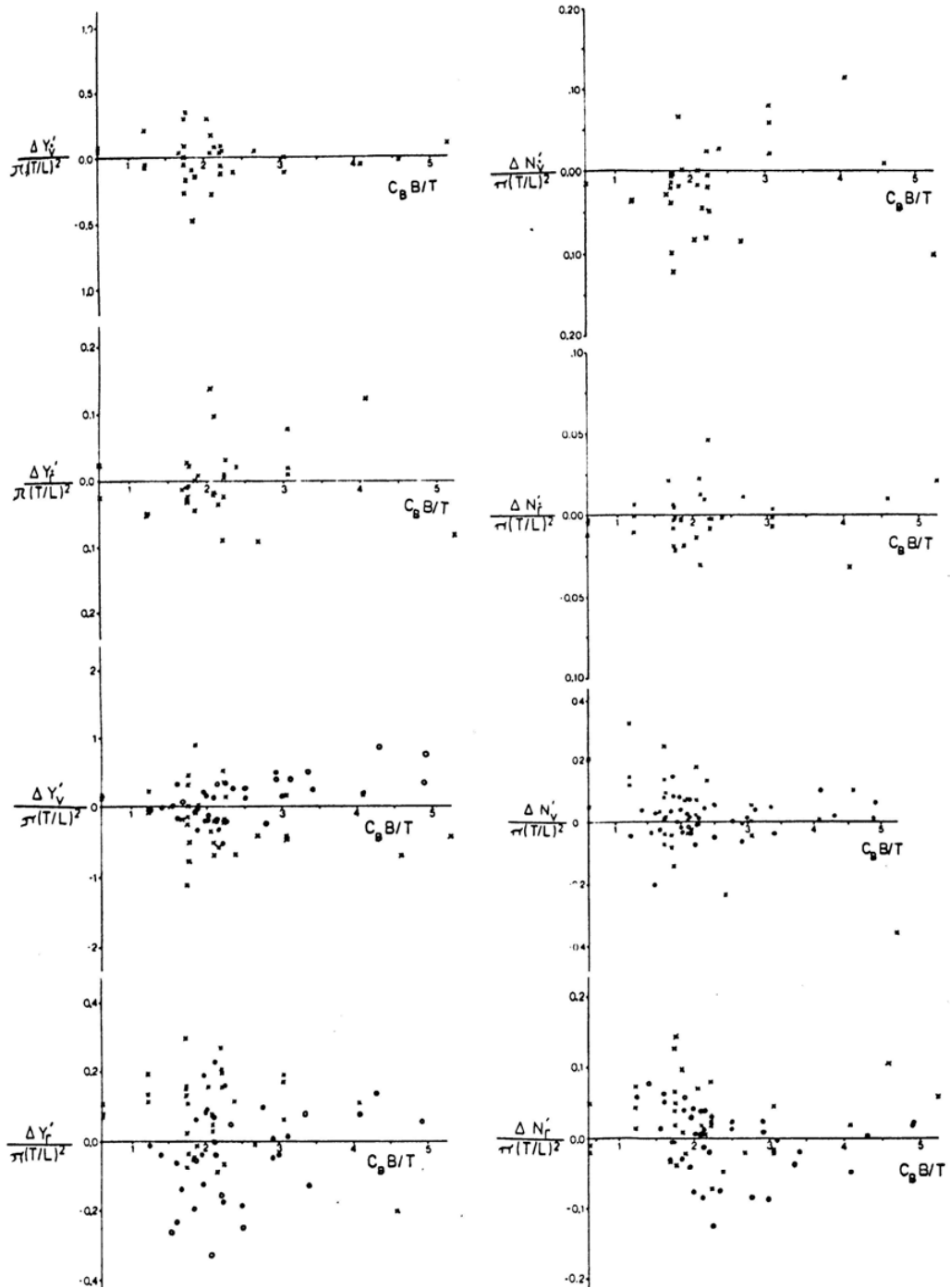
$$\frac{-Y'_v}{\pi(T/L)^2} = 1 + 0.40C_B \frac{B}{T} \quad 1.7 \quad (49)$$

$$\frac{-Y'_r}{\pi(T/L)^2} = -\frac{1}{2} + 2.2 \frac{B}{L} - 0.080 \frac{B}{T} \quad -0.385 \quad (50)$$

$$\frac{-N'_v}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{2} + 2.4 \frac{T}{L} \quad 0.637 \quad (51)$$

$$\frac{-N'_r}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{4} + 0.039 \frac{B}{T} - 0.56 \frac{B}{L} \quad 0.267 \quad (52)$$

Στο Σχήμα 8 δίδονται ενδεικτικά τα σφάλματα (residuals) των τιμών των υδροδυναμικών παραγώγων σε διάφορες περιπτώσεις, τα οποία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τις πειραματικές τιμές από τις αντίστοιχες τιμές που λαμβάνονται μέσω των σχέσεων (δεξιά μέλη) (45)-(52). Είναι φανερό ότι η διασπορά των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι πολύ μεγάλη, πράγμα που σημαίνει ότι οι ανωτέρω σχέσεις πρέπει να χρησιμοποιούνται με επιφύλαξη, και μόνον στο αρχικό στάδιο σχεδίασης, όπου δεν είναι διαθέσιμα αναλυτικά στοιχεία για τη μορφή της γάστρας. Όταν η γάστρα σχεδιασθεί οι υπολογισμοί πρέπει να επαναληφθούν, είτε με αναλυτικές μεθόδους είτε με την βοήθεια πειραμάτων με μοντέλο.



Σχήμα 8: Τιμές σφαλμάτων των εμπειρικά υπολογιζόμενων υδροδυναμικών παραγώγων σε σχέση με πειραματικά αποτελέσματα (ο: αποτελέσματα πειραμάτων με περιστρεφόμενο βραχίονα, χ: αποτελέσματα πειραμάτων με μηχανισμό επιπέδου κινήσεως).

6. Αναλυτικός προσδιορισμός υδροδυναμικών παραγώγων

Ο αναλυτικός προσδιορισμός των υδροδυναμικών παραγώγων πλοίου+πηδαλίου συνίσταται στην εύρεση των υδροδυναμικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα για οποιαδήποτε κινητική του κατάσταση (στροφή, αλλαγή πορείας κ.τ.λ). Είναι φανερό ότι τα προηγούμενα μεγέθη μπορούν να προκύψουν με την επίλυση του υδροδυναμικού προβλήματος, με χρήση της θεωρίας των ανωστικών ροών. Στοιχεία της θεωρίας αυτής παρουσιάζονται στο μάθημα “Βασικές Αρχές Ναυτικής Θαλάσσιας Υδροδυναμικής”. Εκτενέστερα αναπτύσσονται στο κατ’ επιλογήν μάθημα “Ανωστικές Ροές”.

Προς αυτή την κατεύθυνση βρίσκεται η εργασία των Landrini και Campana (1996), οι οποίοι υπολόγισαν τις υδροδυναμικές δυνάμεις επί λεπτού επίπεδου ελάσματος το οποίο εκτελεί στροφή ή έχει σταθερή γωνία πρόσπτωσης ως προς την ροή. Το πρόβλημα μελετήθηκε με βάση το στροβιλό μη συνεκτικό μοντέλο ροής και χρησιμοποιήθηκε το ολοκληρωτικό θεώρημα αναπαράστασης της πεδιακής ταχύτητας. Προκειμένου να επιλυθεί αριθμητικά η ολοκληρωτική εξίσωση εφαρμόστηκε συνδυασμός κατανομών πηγών και στροβιλοτήτων επί του σώματος και του ομόρρου, σε συνδυασμό με ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές για την ελεύθερη επιφάνεια και την γεωμετρία του ομόρρου. Στην εργασία αυτή λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της στροβιλοτήτας της τρόπιδας στα αποτελέσματα.

Επειδή τέτοιου είδους προσπάθειες, αφ’ ενός είναι περίπλοκες και, αφ’ ετέρου δεν έχουν επεκταθεί σε πλήρεις τύπους γαστρών, ο υπολογισμός των υδροδυναμικών παραγώγων κατά την σχεδίαση ενός πλοίου γίνεται ακόμα με βάση απλούστερες θεωρήσεις. Συνήθως χρησιμοποιείται η θεωρία λωρίδων σε συνδυασμό με την παραδοχή της γραμμικής υπέρθεσης των υδροδυναμικών χαρακτηριστικών των διαφόρων στοιχείων του συστήματος (πλοίου, πηδαλίου, πτερυγίων κ.λ.π.). Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, για τις υδροδυναμικές παραγώγους πλοίου και πηδαλίου (ή άλλων πτερυγίων) θα ισχύει:

$$Y'_v = (Y'_v)_h + (Y'_v)_f, \quad N'_v = (N'_v)_h + (N'_v)_f, \quad (1)$$

$$Y'_r = (Y'_r)_h + (Y'_r)_f, \quad N'_r = (N'_r)_h + (N'_r)_f, \quad (2)$$

$$Y'_\dot{v} = (Y'_\dot{v})_h + (Y'_\dot{v})_f, \quad N'_\dot{v} = (N'_\dot{v})_h + (N'_\dot{v})_f, \quad (3)$$

$$Y'_\dot{r} = (Y'_\dot{r})_h + (Y'_\dot{r})_f, \quad N'_\dot{r} = (N'_\dot{r})_h + (N'_\dot{r})_f, \quad (4)$$

όπου με h (*hull*) συμβολίζονται οι υδροδυναμικές παράγωγοι της καθαρής γάστρας και με f (*fin*) τα αντίστοιχα μεγέθη του πτερυγίου (πηδαλίου) για μηδενική γωνία εκτροπής. (Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι τα τονιζόμενα μεγέθη είναι καταλλήλως αδιαστατοποιημένα. Βλέπε και εδάφιο 5).

Στα πλαίσια της ανωτέρω θεώρησης, ο υπολογισμός των υδροδυναμικών δυνάμεων και ροπών επί του πηδαλίου και της γάστρας ανάγεται στον υπολογισμό υδροδυναμικών δυνάμεων και ροπών σε απλούστερα διδιάστατα σώματα (διατομές). Η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές σχεδίασης πηδαλίου (βλ. Principles of Naval Architecture, Vol III, 1989). Οι υδροδυναμικοί υπολογισμοί που απαιτούνται γι’ αυτά τα σώματα περιγράφονται συνοπτικά και δίδονται παραπομπές σε άλλα μαθήματα (και βιβλία), όπου εξετάζονται αναλυτικά.

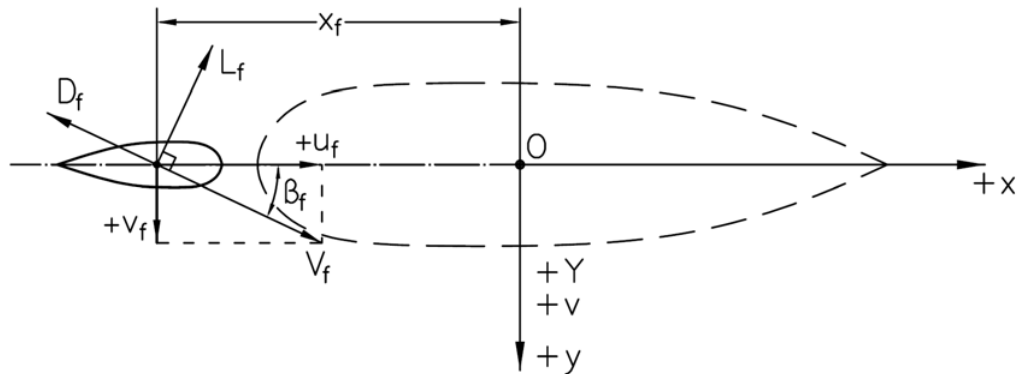
Υδροδυναμικές παράγωγοι πτερυγίου

Θεωρούμε ότι το σώμα και το πτερύγιο που σχεδιάζονται στο Σχήμα 1 αρχικά έχουν ταχύτητα u κατά μήκος του άξονα x . Κατόπιν δίνεται στο σώμα μια εγκάρσια ταχύτητα διαταραχής $+v$. Η γωνία πρόσπτωσης στο πτερύγιο (β_f) για $v_f = v \ll u$ είναι:

$$\beta_f = \frac{v_f}{u_f}, \quad (5)$$

όπου u_f είναι η προς τον άξονα x ταχύτητα του πτερυγίου. Η ολική ταχύτητα γίνεται:

$$V = u_f(1 + \beta_f^2)^{1/2} \approx u_f. \quad (6)$$



Σχήμα 1: Τοποθέτηση πτερυγίου για τον υπολογισμό δυνάμεων και ροπών.

Η κάθετη δύναμη στον άξονα του σώματος και η αντίστοιχη ροπή που παράγονται εξαιτίας της ύπαρξης γωνίας πρόσπτωσης στο πτερύγιο υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$Y_f = \pm (L_f \cos \beta_f + D_f \sin \beta_f), \quad (7a)$$

$$N_f = Y_f x_f, \quad (7b)$$

όπου L_f, D_f είναι οι δυνάμεις άωσης και αντίστασης στο πτερύγιο αντίστοιχα και x_f είναι η απόσταση από το σωματοπαγές σύστημα αξόνων του σημείου δράσης της δύναμης στο πτερύγιο. Ο υπολογισμός της $(Y_v)_f$ οδηγεί στην:

$$(Y_v)_f = \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_f = - \left| \left(\frac{\partial Y}{\partial \beta} \right)_f \left(\frac{d\beta}{dv} \right)_f \right| = - \left| (Y_\beta)_f \left(\frac{d\beta}{dv} \right)_f \right|. \quad (8)$$

Δεδομένου ότι ισχύουν οι:

$$\left(\frac{d\beta}{dv} \right)_f = \frac{1}{u_f} \approx \frac{1}{V}, \quad (9)$$

$$(Y_\beta)_f = L_f \sin \beta_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \right)_f \cos \beta_f - D_f \cos \beta_f - \frac{\partial D}{(\partial \beta)_f} \sin \beta_f. \quad (10)$$

Για $\beta = 0$ προκύπτει:

$$(Y_\beta)_f = - \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \right)_f + D_f \right]. \quad (11)$$

Συνήθως η άνοση και η αντίσταση δίδονται με την μορφή αδιάστατων συντελεστών άνοσης και αντίστασης C_L και C_D , ως εξής:

$$L_f = (C_L)_f \frac{\rho}{2} A_f V^2, \quad (12)$$

$$D_f = (C_D)_f \frac{\rho}{2} A_f V^2, \quad (13)$$

όπου A_f είναι η επιφάνεια του πτερυγίου στο επίπεδο Oxz . Τιμές για τους συντελεστές άνοσης και αντίστασης αεροτομών NACA μπορούν να βρεθούν στα Applied Fluid Dynamics Handbook του Blevins (1984) και Theory of Wing Sections του Abbot (1958). Χαρακτηριστικά διαγράμματα από τις προηγούμενες πηγές δίδονται στο τέλος του εδαφίου. Παραγωγίζοντας την σχέση που δίνει την ανωστική δύναμη (12) λαμβάνεται η ακόλουθη:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \right)_f = \frac{\rho}{2} A_f V^2 \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_f. \quad (14)$$

Η σχέση (8) με την βοήθεια των (11), (13) και (14) γίνεται:

$$(Y_v)_f = - \left[\frac{\rho}{2} A_f V \left[\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_f + (C_D)_f \right] \right]. \quad (15)$$

Αν ληφθεί υπόψη ότι ο συντελεστής αντίστασης $(C_D)_f$ για μηδενική γωνία πρόσπτωσης είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον $\frac{\partial C_L}{\partial \beta}$, αδιαστατοποιώντας την προηγούμενη σχέση προκύπτει η:

$$(Y'_v)_f = - \left| \frac{(\rho/2) A_f V \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_f}{(\rho/2) LTV} \right| = - \left| A'_f \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_f \right|. \quad (16)$$

Από την δεύτερη των σχέσεων (7) παράγεται η ακόλουθη:

$$(N'_v)_f = (Y'_v)_f x'_f, \quad (17)$$

ενώ για τις υδροδυναμικές παραγώγους $(Y'_r)_f$ και $(N'_r)_f$ ισχύει:

$$(Y'_r)_f = x'_f (Y'_v)_f, \quad (18)$$

$$(N'_r)_f = x'^2_f (Y'_v)_f. \quad (19)$$

Η υδροδυναμική παράγωγος $(Y'_v)_f$ αντιστοιχεί στην πρόσθετη μάζα επιπέδου ελάσματος για επιταχύνσεις κάθετες στο επίπεδο του και μπορεί να προσεγγισθεί ως ακολούθως:

$$(Y'_v)_f = -\frac{\pi \rho b A_f}{(a_G^2 + 1)^{1/2}} \frac{1}{(\rho/2)L^2 T} = -\frac{2\pi b' A'_f}{(a_G^2 + 1)^{1/2}}. \quad (20)$$

Οι εκφράσεις για τις υδροδυναμικές παραγώγους $(N'_v)_f, (Y'_f)_f, (N'_f)_f$ σε αντιστοιχία με τις προηγούμενες σχέσεις έχουν ως εξής:

$$(N'_v)_f = (Y'_v)_f x'_f, \quad (21)$$

$$(Y'_f)_f = x'_f (Y'_v)_f, \quad (22)$$

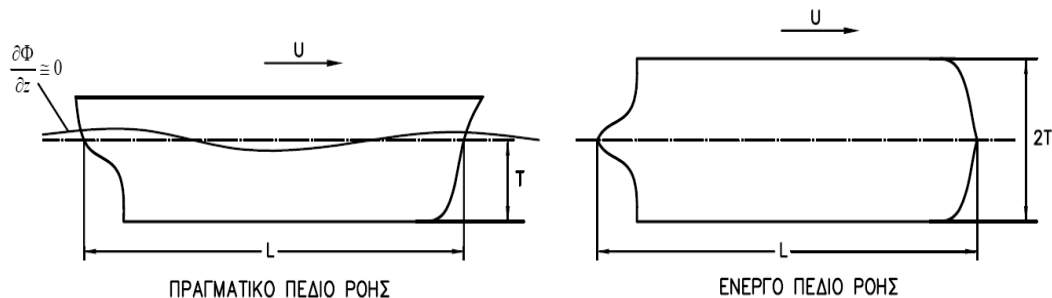
$$(N'_f)_f = x'^2_f (Y'_v)_f, \quad (23)$$

όπου b είναι το γεωμετρικό άνοιγμα του πτερυγίου, A_f όπως και προηγουμένως είναι η επιφάνεια του πτερυγίου στο επίπεδο Oxz και a_G είναι ο γεωμετρικός λόγος επιμήκους που ορίζεται ως εξής:

$$a_G = \frac{b^2}{AR}.$$

Υδροδυναμικές παράγωγοι καθαρής γάστρας

Για το σκοπό αυτής της ανάλυσης η γάστρα του πλοίου μπορεί να θεωρηθεί πτερύγιο πολύ μικρού λόγου επιμήκους. Ο γεωμετρικός λόγος επιμήκους της γάστρας είναι ο λόγος T/L , ο λόγος πάχους προς μήκος χορδής είναι ο B/L , ενώ ο λόγος πάχους συνήθως είναι κοντά στην μονάδα. Σε μικρές ταχύτητες ($F_n < 0.25$) η επίδραση των κυματισμών ελεύθερης επιφάνειας θεωρείται αμελητέα. Κατά συνέπεια, το 'ενεργό πεδίο ροής' που ενδιαφέρει είναι το υπαρκτό πεδίο ροής γύρω από την γάστρα συμπληρωμένο με το κατοπτρικό του (ως προς την ελεύθερη επιφάνεια) (Σχήμα 2). Ως εκ τούτου, ο ενεργός λόγος επιμήκους της γάστρας a_e λαμβάνεται $2T/L$.



Σχήμα 2: Επίδραση του φαινομένου του κατοπτρισμού στο πεδίο ροής γύρω από τη γάστρα (Φ – δυναμικό της ταχύτητας της ροής).

Εξαιτίας της θεώρησης της γάστρας ως πτερυγίου η σχέση (15) εφαρμοζόμενη εδώ δίνει:

$$(Y_v)_h = -(\rho/2) A_h V \left[\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_h + (C_D)_h \right], \quad (24)$$

όπου A_h η διαμήκης προβολή της επιφάνειας της γάστρας. Για λόγους επιμήκους μεγαλύτερους του 1/5 (γεγονός που ισχύει για τον ενεργό λόγο επιμήκους της γάστρας) ισχύει (Abbot & Doenhoff, 1958):

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_h = \frac{\pi}{2} a_e$$

a_e : ενεργός λόγος επιμήκους.

Στην προκειμένη περίπτωση δηλαδή είναι:

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_h = \frac{\pi T}{L}. \quad (25)$$

Αν ο συντελεστής $(C_D)_h$ μπορεί να ληφθεί από τα χαρακτηριστικά αντίστασης σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης, αδιαστατοποιημένη η σχέση (24) γίνεται:

$$(Y'_v)_h = -\left(\frac{\pi T}{L} \right) + (C_D)_h. \quad (26)$$

Η υδροδυναμική παράγωγος $(N'_v)_h$ με χρήση της θεωρίας λωρίδων λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$(N'_v)_h = -(\Delta'_2 - k_1 \Delta'_1) + \frac{x_p}{L} (Y'_v)_h, \quad (27)$$

όπου

Δ'_1 : αδιάστατη μάζα του πλοίου (μέγεθος αδιαστατοποίησης = $\frac{\rho}{2} L^2 T$),

$$\Delta'_2 = \frac{\Delta_2}{(\rho/2)L^2 T} = \frac{k_2}{(\rho/2)L^2 T} \int_{\text{bow}}^{\text{stern}} \frac{L}{T} \frac{\rho}{2} \pi C_s h^2 dx,$$

C_s : διδιάστατος συντελεστής πρόσθετης μάζας που καθορίζεται για κάθε λωρίδα νομέα πλάτους dx κατά μήκος του x -άξονα. Τιμές αυτού φαίνονται στο Σχήμα 3,

$k_1 \Delta'_1$: Πρόσθετη μάζα του πλοίου κατά την x -διεύθυνση,

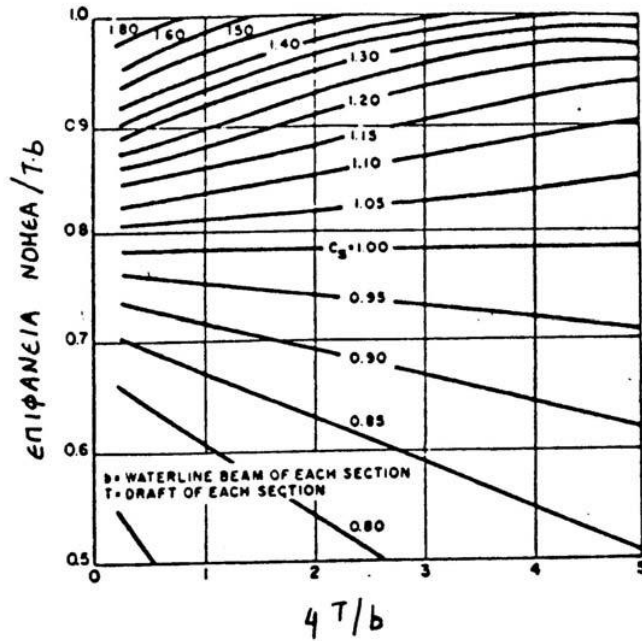
Δ'_2 : πρόσθετη μάζα του πλοίου κατά την y -διεύθυνση,

h : τοπικό βύθισμα σε κάθε νομέα,

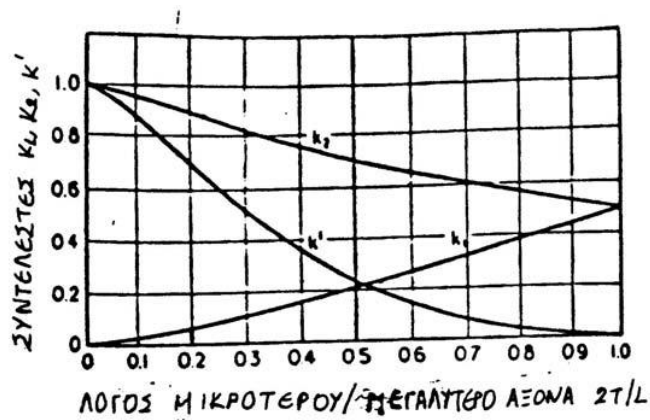
k_1, k_2 : συντελεστές των οποίων οι τιμές παίρνονται από το διάγραμμα του Σχήματος 4,

x_p : διαμήκης απόσταση από το μέσο νομέα του κέντρου της προβολής της επιφάνειας της γάστρας στο Oxz επίπεδο,

$(Y'_v)_h$: τιμή που λαμβάνεται από την σχέση (26).



Σχήμα 3. Τιμές των διδιάστατων συντελεστών προσθέτων μαζών



Σχήμα 4. Τιμές των συντελεστών k_1, k_2, k'

Στην συνέχεια δίνονται οι τύποι υπολογισμού των $(Y'_r)_h$ και $(N'_r)_h$

$$(Y'_r)_h = -k_1 \Delta' + \frac{x_p}{L} (Y'_v)_h, \quad (28)$$

$$(N'_r)_h = -\Delta'_z \frac{\bar{x}}{L} + \frac{x_o^2}{L} (Y'_v)_h, \quad (29)$$

όπου

$$\Delta_z' = \frac{k'}{k_2} \Delta_2', \quad \bar{x} = \frac{\int_{bow}^{stern} C_s h^2 x dx}{\int_{bow}^{stern} C_s h^2 dx},$$

και

x : απόσταση από την αρχή των αξόνων της λωρίδας νομέα πάχους dx , θετική αν είναι πρόωραθεν, αρνητική αν είναι πρύμνηθεν,

$\frac{x_o}{L}$: λαμβάνεται ως η μισή τιμή του πρισματικού συντελεστή του πλοίου.

Οι υδροδυναμικές παράγωγοι Y_r, N_v έχουν πολύ μικρές τιμές για καθαρή γάστρα και πρακτικά λαμβάνονται μηδενικές.

Για τις παραγώγους $(Y_v)'_h$ και $(N_r)'_h$ ισχύει:

$$(Y_v)'_h = -\Delta_2' = \frac{-k_2}{(\rho/2)L^2T} \int_{bow}^{stern} \frac{L}{T} \frac{\rho}{2} \pi C_s h^2 dx, \quad (30)$$

$$(N_r)'_h = -\frac{k'}{(\rho/2)L^4T} \int_{bow}^{stern} \frac{L}{T} \frac{\rho}{2} \pi C_s h^2 x^2 dx. \quad (31)$$

Στους πίνακες 1 και 2 που ακολουθούν φαίνονται ενδεικτικές τιμές των υδροδυναμικών παραγώγων για μοντέλα με τύπους γαστρών της σειράς 60. Οι κωδικοί που φαίνονται στους πίνακες και αποτελούνται από 3 ακέραιους αριθμούς δηλώνουν τα ακριβή γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κάθε μοντέλου. Οι αντιστοιχίες φαίνονται στο πίνακα που ακολουθεί.

| Μοντέλο | L/B | B/T | L/T | C _P | C _B | x' _G | x' μέσ.νομ | Έλικα | Πηδάλιο, Επιφάν. |
|---------|-----|------|-------|----------------|----------------|-----------------|------------|-------|------------------|
| 1,1,1 | 7,5 | 2,5 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 2,1,1 | 7,0 | 2,68 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 2,1,2 | 7,0 | 2,68 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 2, 0,025 |
| 2,1,3 | 7,0 | 2,68 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 3, 0,012 |
| 3,1,1 | 6,0 | 3,12 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 4,1,1 | 8,0 | 2,34 | 18,75 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 5,1,1 | 7,0 | 3,28 | 23,0 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 6,1,1 | 7,0 | 2,07 | 14,50 | 0,614 | 0,60 | 0 | 0,015 | 1 | 1, 0,016 |
| 7,1,1 | 7,0 | 2,68 | 18,75 | 0,713 | 0,70 | 0 | 0,005 | 1 | 1, 0,016 |
| 8,1,1 | 7,0 | 2,68 | 18,75 | 0,807 | 0,80 | 0 | -0,025 | 1 | 1, 0,016 |

Με βάση τα αποτελέσματα των Πινάκων 1,2 μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ θεωρητικά προβλεπόμενων τιμών και πειραματικών αποτελεσμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 (Πειραματικές και θεωρητικές τιμές των υδροδυναμικών παραγώγων μοντέλων με τύπους γαστρών της σειράς 60)

| | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| C_B | 0.60 | 0.70 | 0.80 | L/B | 6.0 | 7.0 | 7.5 | 8.0 |
| | 2,1,1 | 7,1,1 | 8,1,1 | | 3,1,1 | 2,1,1 | 1,1,1 | 4,1,1 |
| B/T | 2.68 | 2.68 | 2.68 | B/T | 3.12 | 2.68 | 2.50 | 2.34 |
| Δ' | 0.171 | 0.200 | 0.229 | Δ' | 0.200 | 0.171 | 0.160 | 0.150 |
| LCG/L | 0.515 | 0.505 | 0.475 | LCG/L | 0.515 | 0.515 | 0.515 | 0.515 |

Υδροδυναμικές παράγωγοι υπολογισμένες αναλυτικά

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| $-Y'_v$ | 0.335 | 0.335 | 0.335 | | 0.335 | 0.335 | 0.335 | 0.335 |
| $-N'_v$ | 0.086 | 0.097 | 0.095 | | 0.085 | 0.086 | 0.088 | 0.089 |
| Y'_r | 0.076 | 0.075 | 0.089 | | 0.076 | 0.076 | 0.077 | 0.067 |
| N'_r | -0.066 | -0.068 | -0.077 | | -0.066 | -0.066 | -0.066 | -0.066 |
| Y'_γ | 0.038 | 0.038 | 0.038 | | 0.038 | 0.038 | 0.038 | 0.038 |
| N'_γ | -0.019 | -0.019 | -0.019 | | -0.019 | -0.019 | -0.019 | -0.019 |

Υδροδυναμικές παράγωγοι υπολογισμένες πειραματικά

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| $-Y'_v$ | 0.305 | 0.324 | 0.354 | | 0.308 | 0.305 | 0.270 | 0.283 |
| $-N'_v$ | 0.095 | 0.104 | 0.086 | | 0.089 | 0.095 | 0.108 | 0.091 |
| Y'_r | 0.090 | 0.083 | 0.085 | | 0.089 | 0.090 | 0.088 | 0.088 |
| N'_r | -0.070 | -0.068 | -0.060 | | -0.075 | -0.070 | -0.067 | -0.066 |
| Y'_γ | -0.024 | -0.025 | -0.035 | | | -0.024 | -0.022 | |
| N'_γ | 0.050 | 0.052 | 0.065 | | | 0.050 | 0.046 | |

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 (Πειραματικές και θεωρητικές τιμές των υδροδυναμικών παραγώγων μοντέλων με τύπους γαστρών της σειράς 60)

| | | | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-----------|--------|-------|-------|-------|
| L/T | 14.5 | 18.75 | 23.0 | A'_T | 0 | 0.012 | 0.016 | 0.025 |
| | 6,1,1 | 2,1,1 | 5,1,1 | | | 2,1,3 | 2,1,1 | 2,1,2 |
| B/T | 2.07 | 2.68 | 3.28 | B/T | 2.68 | 2.68 | 2.68 | 2.68 |
| Δ' | 0.171 | 0.171 | 0.171 | Δ' | 0.1710 | 0.171 | 0.171 | 0.171 |
| LCG/L | 0.515 | 0.515 | 0.515 | LCG/L | 0.515 | 0.515 | 0.515 | 0.515 |

Υδροδυναμικές παράγωγοι υπολογισμένες αναλυτικά

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| $-Y'_v$ | 0.434 | 0.335 | 0.273 | | 0.303 | 0.329 | 0.335 | 0.347 |
| $-N'_v$ | 0.114 | 0.086 | 0.071 | | 0.110 | 0.089 | 0.082 | 0.080 |
| Y'_r | 0.094 | 0.076 | 0.061 | | 0.052 | 0.073 | 0.076 | 0.082 |
| N'_r | -0.081 | -0.066 | -0.054 | | -0.055 | -0.065 | -0.066 | -0.069 |
| Y'_γ | 0.045 | 0.038 | 0.031 | | | 0.034 | 0.038 | 0.041 |
| N'_γ | -0.023 | -0.019 | -0.015 | | | -0.017 | -0.019 | -0.021 |

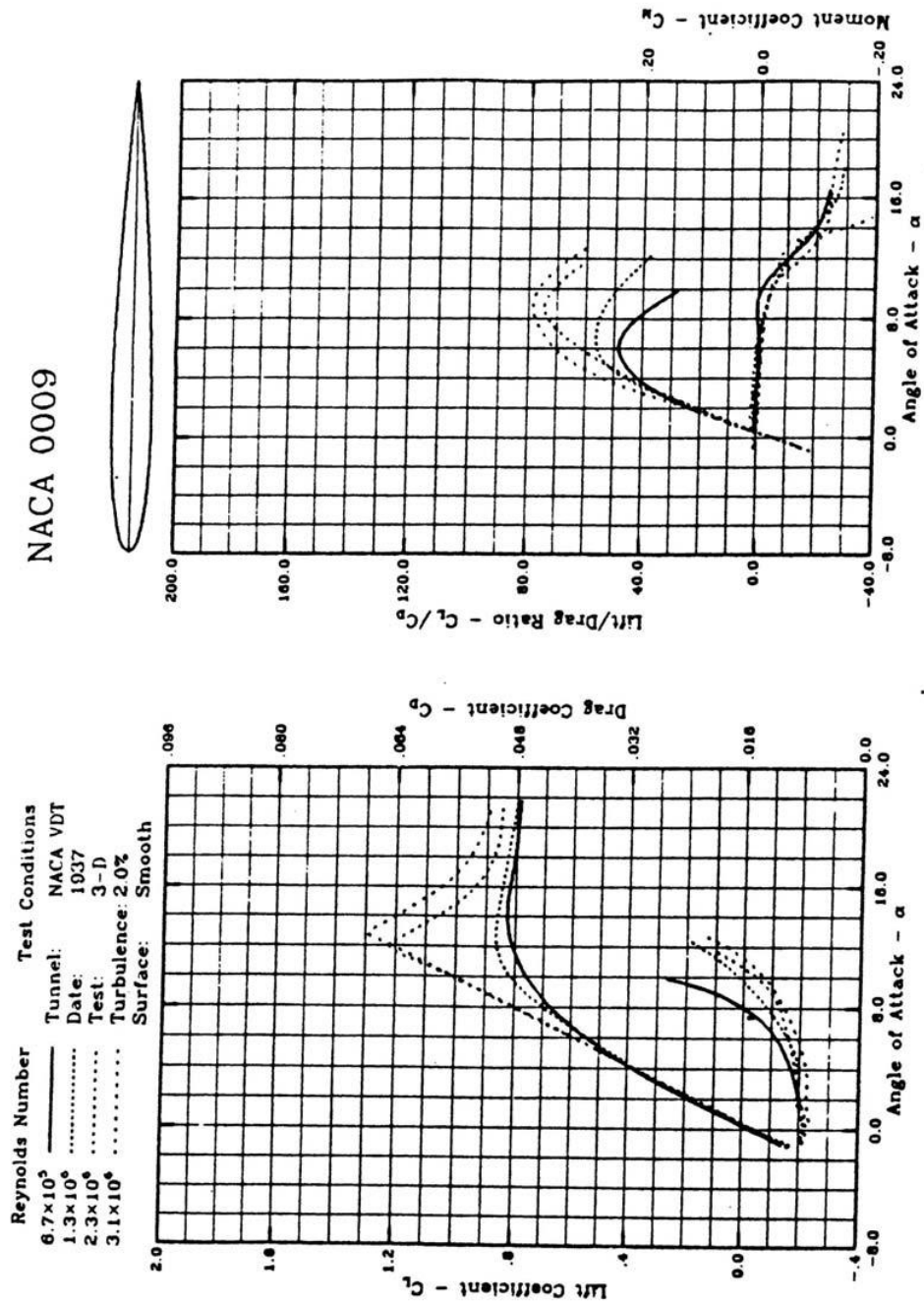
Υδροδυναμικές παράγωγοι υπολογισμένες πειραματικά

| | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|
| $-Y'_v$ | 0.349 | 0.305 | 0.260 | | 0.245 | 0.293 | 0.305 | 0.311 |
|---------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|
| $-N'_v$ | 0.133 | 0.095 | 0.075 | | 0.114 | 0.100 | 0.095 | 0.081 |
| Y'_r | 0.099 | 0.090 | 0.094 | | 0.070 | 0.082 | 0.090 | 0.096 |
| N'_r | -0.081 | -0.070 | -0.057 | | -0.055 | -0.073 | -0.070 | -0.076 |
| Y'_γ | | -0.024 | | | | -0.018 | -0.024 | -0.031 |
| N'_γ | | 0.050 | | | | 0.037 | 0.050 | 0.060 |

Παράρτημα εδαφίου 6

Διαγράμματα συντελεστών άνωσης και αντίστασης για υδροτομές NACA 0009, 0012, 0018.

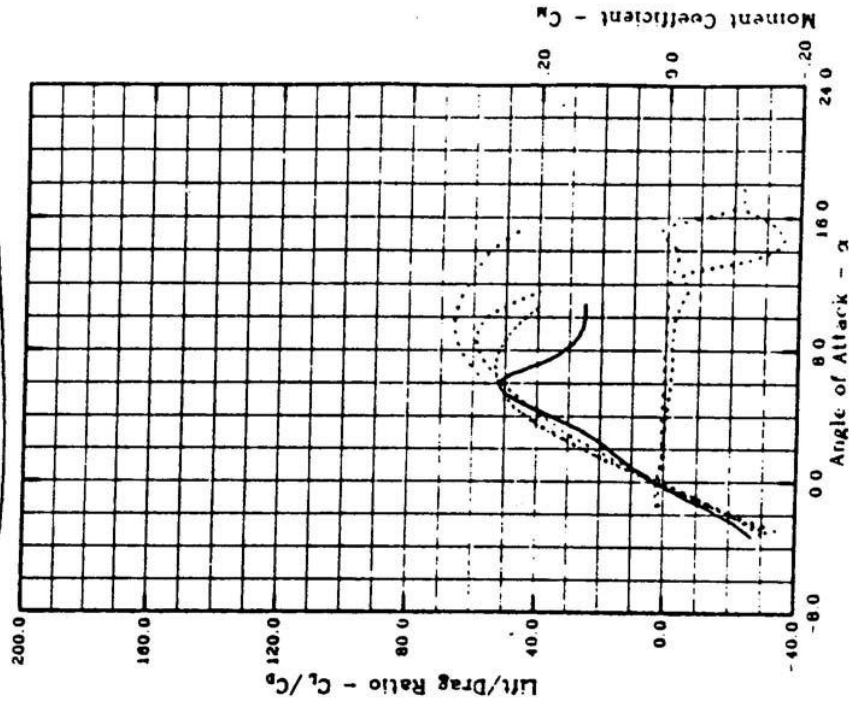
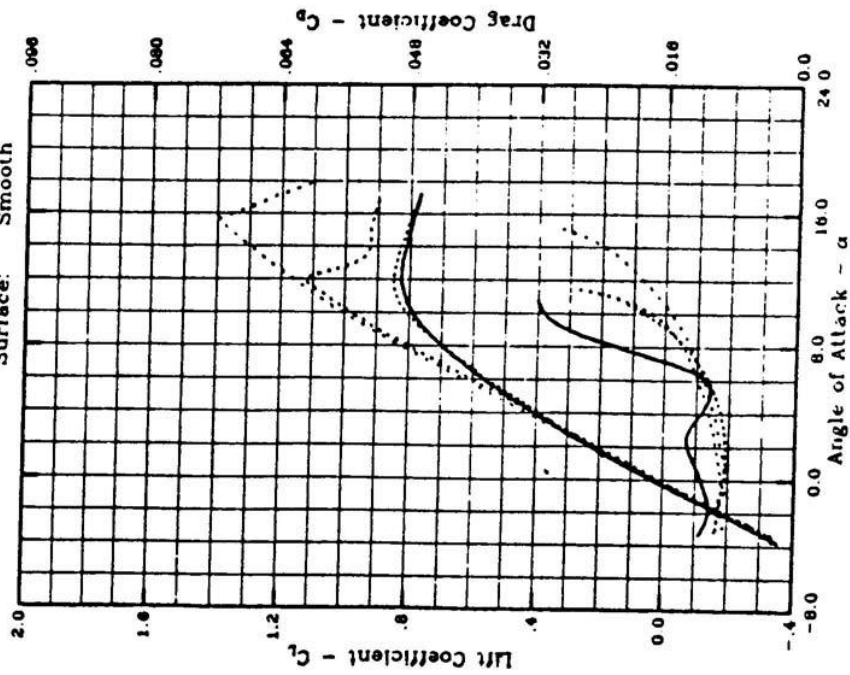


NACA 0012



Reynolds Number
 1.7x10⁵ ———
 3.3x10⁵ ·····
 6.6x10⁵ ·····
 1.3x10⁶ ·····

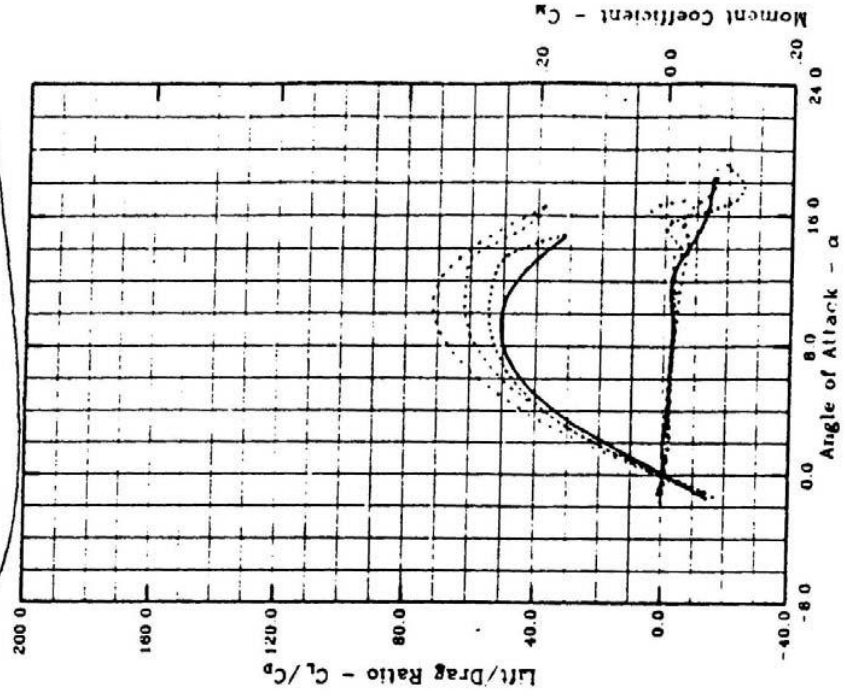
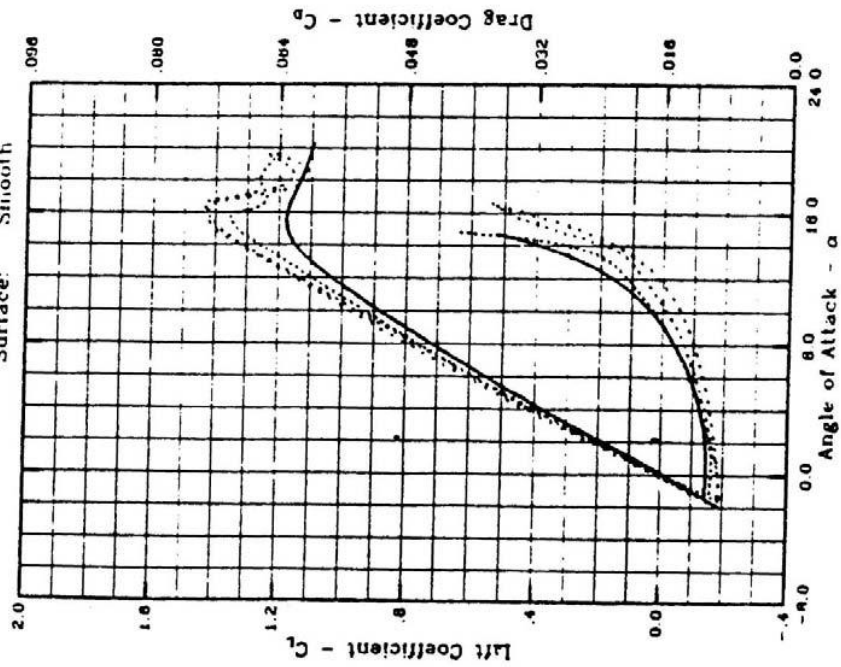
Test Conditions
 Tunnel: NACA VDT
 Date: 1937
 Test: 3-D
 Turbulence: 2.0%
 Surface: Smooth



NACA 0018



Reynolds Number Test Conditions
 6.5x10⁵ Tunnel: NACA VDT
 2.5x10⁵ Date: 1937
 3.6x10⁵ Test: 3-D
 3.0x10⁶ Turbulence 2.0%
 Surface: Smooth



Moment Coefficient - C_m

7. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο:

I. Κίνηση κατά το διαμήκη άξονα

Στο εδάφιο αυτό μελετάται η προς τα πρόσω κίνηση του πλοίου με τη βοήθεια της εξίσωσης 4(5a). Για τη μελέτη της ευστάθειας της κίνησης αυτής θα εξετασθεί η χρονική εξέλιξη της διαταραχής $\delta u(t)$, η οποία οφείλεται στη δράση μιας κρουστικής («στιγμιαίας») δύναμης $X_1(t) = X_{10} \delta(t)$. (τέτοιου είδους δυνάμεις μπορεί να προκύψουν π.χ. από μια στιγμιαία αύξηση/μείωση των στροφών της μηχανής λόγω ξενερίσματος της έλικας ή άλλης αιτίας). Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση κίνησης κατά τον διαμήκη άξονα γράφεται στη μορφή:

$$(m - X_{\dot{u}})\delta\dot{u} - X_u\delta u = X_{10}\delta(t). \quad (1)$$

Για να επιλύσουμε την εξίσωση (1) θα την μετατρέψουμε σε ένα ισοδύναμο κλασσικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Προς τούτο ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) από $t = -\varepsilon$ έως $t = +\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) και ύστερα θεωρούμε $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(m - X_{\dot{u}})\delta u(t) \Big|_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} - X_u \int_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} \delta u(t) dt = X_{10} \int_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} \delta(t) dt = X_{10}. \quad (2)$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα διαταραχής $\delta u(t)$ παραμένει φραγμένη στο διάστημα $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα $\int \delta u(t) dt$ τείνει στο μηδέν, και η σχέση (2) γίνεται:

$$(m - X_{\dot{u}}) \{ \delta u(0+) - \delta u(0-) \} = X_{10}. \quad (3)$$

Όμως $\delta u(0-) = 0$, εφ' όσον για $t < 0$ δεν έχει επιδράσει η κρουστική φόρτιση και άρα δεν έχει διαταραχθεί η ομοιόμορφη κίνηση του πλοίου. Έτσι, από την (3) προκύπτει

$$\delta u(0+) = \frac{X_{10}}{m - X_{\dot{u}}} = \delta u_0. \quad (4)$$

Κατά συνέπεια, η διαφορική εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$(m - X_{\dot{u}})\delta\dot{u} - X_u\delta u = 0, \quad (5)$$

$$\delta u(0) = \delta u_0, \quad (6)$$

όπου δu_0 δίδεται από τη σχέση (4).

Το ανωτέρω πρόβλημα αρχικών τιμών θα επιλυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace (αν και λόγω της απλότητάς του μπορεί εύκολα να επιλυθεί και με απ' ευθείας ολοκλήρωση). Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της (5) παίρνουμε

$$(m - X_{\dot{u}})[s\delta U(s) - \delta u(0)] - X_u\delta U(s) = 0, \quad (7)$$

όπου

$$\delta U(s) = \mathcal{L}\{\delta u(t), t \rightarrow s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta u(t) dt. \quad (8)$$

Επιλύοντας της εξίσωση (7), παίρνουμε:

$$\delta U(s) = \frac{\delta u_0}{s - \sigma_3}, \quad \text{όπου } \sigma_3 = \frac{X_u}{m - X_u}. \quad (9)$$

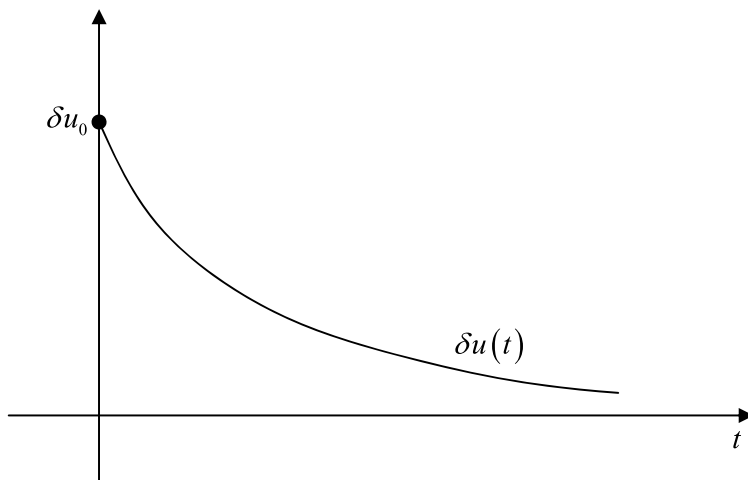
Με χρήση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace η (9) μας δίνει την λύση:

$$\delta u(t) = \delta u_0 e^{\sigma_3 t}. \quad (10)$$

Για πλοία συμβατικής μορφής ο αριθμός σ_3 είναι αρνητικός, δεδομένου ότι $X_u < 0$ και $m - X_u > 0$, και επομένως η λύση (10) παριστάνει μια εκθετικά φθίνουσα διαταραχή (βλ. Σχήμα 1) με όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta u(t) = 0$.

Κατά συνέπεια, μια οποιαδήποτε κρουστική φόρτιση κατά τον διαμήκη άξονα προκαλεί διαταραχή της ταχύτητας, η οποία αποσβέννεται εκθετικά με το χρόνο. Το πλοίο επιστρέφει στην αρχική κατάσταση αναφοράς (σταθερή μέση ταχύτητα U), θεωρητικά μεν ασυμπτωτικά, πρακτικά δε μετά την πάροδο κάποιου (μικρού) χρονικού διαστήματος το οποίο εξαρτάται από το μέγεθος του εκθέτη σ_3 . Με άλλα λόγια τα συμβατικά πλοία είναι ευσταθή σε διαταραχές κατά τον διαμήκη άξονα.

Η εξίσωση κίνησης του πλοίου κατά τον διαμήκη άξονα 4(5a) μπορεί (θεωρητικά) επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ταχύτητας $u(t)$ όταν στο πλοίο ασκείται μια οποιαδήποτε (γνωστή) εξωτερική διεγείρουσα δύναμη $X_1(t)$. Στην περίπτωση όμως αυτή η παράλειψη των μη γραμμικών όρων καθίσταται γρήγορα σημαντική, δεδομένου ότι η επίδραση μιας διαρκούς φόρτισης $X_1(t)$ μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μεταβολή της μέσης ταχύτητας U .



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $\delta u(t)$

8. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο: II. Ευστάθεια

Στο εδάφιο αυτό, με τη βοήθεια του συστήματος 4(7b,c), θα μελετήσουμε της ευστάθεια ευθύγραμμης πορείας ενός πλοίου κινούμενου με σταθερή μέση ταχύτητα U , χωρίς την χρήση επιφανειών ελέγχου ή άλλων μέσων πηδαλιουχίας. Το σύστημα 4(7b,c) επαναλαμβάνεται εδώ χάριν ευκολίας:

$$\begin{aligned} (m - Y_{\dot{v}})\dot{v} - Y_v v + (m\xi_G - Y_{\dot{r}})\dot{r} + (mU - Y_r)r &= Y_{10}\delta(t), \\ (m\xi_G - N_{\dot{v}})\dot{v} - N_v v + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}})\dot{r} + (m\xi_G U - N_r)r &= N_{10}\delta(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Η δράση των κρουστικών φορτίσεων $Y_{10}\delta(t)$ και $N_{10}\delta(t)$ έχει ως αποτέλεσμα τη στιγμιαία μεταβολή των ταχυτήτων διαταραχής $v(t)$ και $r(t)$ από $v(0-) = 0$ και $r(0-) = 0$ σε $v(0+) \neq 0$ και $r(0+) \neq 0$. Για να βρούμε τις τιμές $v(0+)$ και $r(0+)$ εργαζόμεθα τελείως ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση (εδάφιο 7), όπου εξετάσαμε την ευστάθεια της κίνησης του πλοίου κατά το διαμήκη άξονα. Κατ' αρχήν ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις (1) από $t = -\varepsilon$ έως $t = +\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, και θεωρούμε $\varepsilon \rightarrow 0$. Τότε, λαμβάνονται υπ' όψιν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \varepsilon \xrightarrow{\text{lim}} 0 \int_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} v(t) dt = 0, \\ \text{και} \quad \varepsilon \xrightarrow{\text{lim}} 0 \int_{t=-\varepsilon}^{t=+\varepsilon} \dot{v}(t) dt = v(0+) - v(0-) = v(0+), \end{aligned}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (m - Y_{\dot{v}})v(0+) + (m\xi_G - Y_{\dot{r}})r(0+) &= Y_{10}, \\ (m\xi_G - N_{\dot{v}})v(0+) + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}})r(0+) &= N_{10}. \end{aligned} \quad (2)$$

Επιλύοντας το σύστημα (2) ως προς $v(0+)$ και $r(0+)$ βρίσκουμε:

$$v(0+) = v_0 = \frac{Y_{10}(I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) - N_{10}(m\xi_G - Y_{\dot{r}})}{(m - Y_{\dot{v}})(I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) - (m\xi_G - N_{\dot{v}})(m\xi_G - Y_{\dot{r}})}, \quad (3)$$

και

$$r(0+) = r_0 = \frac{-Y_{10}(I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{v}}) + N_{10}(m - Y_{\dot{v}})}{(m - Y_{\dot{v}})(I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) - (m\xi_G - N_{\dot{v}})(m\xi_G - Y_{\dot{r}})}.$$

Κατά συνέπεια, για τον υπολογισμό των διαταραχών $v(t)$ και $r(t)$ αρκεί να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} (m - Y_{\dot{v}})\dot{v} - Y_v v + (m\xi_G - Y_{\dot{r}})\dot{r} + (mU - Y_r)r &= 0, \\ (m\xi_G - N_{\dot{v}})\dot{v} - N_v v + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}})\dot{r} + (m\xi_G U - N_r)r &= 0, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες (4)

$$\begin{aligned} v(0) &= v(0+) = v_0, \\ r(0) &= r(0+) = r_0, \end{aligned}$$

όπου το v_0 και r_0 δίνονται από τις (3).

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace το πρόβλημα (4) προκύπτει το ακόλουθο (αλγεβρικό) σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} A_{11}(s)V(s) + A_{12}(s)R(s) &= B_1, \\ A_{21}(s)V(s) + A_{22}(s)R(s) &= B_2, \end{aligned} \quad (5)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_{11}(s) &= -Y_v + s(m - Y_v), & A_{12}(s) &= (mU - Y_r) + s(m\xi_G - Y_r), \\ A_{21}(s) &= -N_v + s(m\xi_G - N_v), & A_{22}(s) &= (m\xi_G U - N_r) + s(I_{\zeta\zeta} - N_r), \\ B_1 &= v_A(m - Y_v) + r_A(m\xi_G - Y_r), & B_2 &= v_A(m\xi_G - N_v) + r_A(I_{\zeta\zeta} - N_r), \end{aligned} \quad (6)$$

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t), t \rightarrow s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt, \quad (7)$$

$$R(s) = \mathcal{L}\{r(t), t \rightarrow s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} r(t) dt,$$

είναι οι μετασχηματισμένες κατά Laplace των συναρτήσεων $v(t)$ και $r(t)$. Ας σημειωθεί ότι οι συντελεστές A_{kl} , $k, l=1,2$, είναι οι γραμμικές συναρτήσεις της παραμέτρου s , ενώ οι συντελεστές B_k είναι ανεξάρτητοι του s .

Η διακρίνουσα του συστήματος (5) είναι ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο του s το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & A_{12}(s) \\ A_{21}(s) & A_{22}(s) \end{pmatrix} = As^2 + Bs + C = A(s - \sigma_1)(s - \sigma_2), \quad (8)$$

όπου οι σταθερές A, B, C , είναι ανεξάρτητες του s και δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} A &= (Y_v - m)(N_r - I_{\zeta\zeta}) - (Y_r - m\xi_G)(N_v - m\xi_G), \\ B &= (Y_v - m)(N_r - m\xi_G U) - (N_r - I_{\zeta\zeta})Y_v - \\ &\quad - (Y_r - m\xi_G)N_v - (N_v - m\xi_G)(Y_r - mU), \\ C &= Y_v(N_r - m\xi_G U) - N_v(Y_r - mU). \end{aligned} \quad (9)$$

Οι ρίζες σ_1, σ_2 του τριωνύμου $As^2 + Bs + C$ δίδονται από τη σχέση:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}. \quad (10)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (6) και (8) η λύση του συστήματος (5) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{a + \beta s}{A(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}, \\ R(s) &= \frac{\gamma + \delta s}{A(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

όπου

$$\begin{aligned} a &= B_1(m\xi_G U) - N_r - B_2(mU - Y_r), & \beta &= B_1(I_{\zeta\zeta} - N_r) - B_2(m\xi_G - Y_r), \\ \gamma &= B_1 N_v - B_2 Y_v, & \delta &= -B_1(m\xi_G - Y_v) + B_2(m - Y_v). \end{aligned} \quad (12)$$

Ας σημειωθεί ότι οι ανωτέρω ποσότητες a , β , γ , δ , είναι επίσης ανεξάρτητες του s . Αναλύοντας σε απλά κλάσματα τα δεξιά μέλη των σχέσεων (11) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{v_1}{(s - \sigma_1)} + \frac{v_2}{(s - \sigma_2)}, \\ R(s) &= \frac{r_1}{(s - \sigma_1)} + \frac{r_2}{(s - \sigma_2)}, \end{aligned} \quad (13)$$

όπου:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{a + \beta\sigma_1}{A(\sigma_1 - \sigma_2)}, & v_2 &= -\frac{a + \sigma_2\beta}{A(\sigma_1 - \sigma_2)}, \\ r_1 &= -\frac{\gamma + \delta\sigma_1}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}, & r_2 &= -\frac{\gamma + \delta\sigma_2}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, από τις σχέσεις (13) προκύπτει αμέσως ότι η λύση του αρχικού προβλήματος (4) είναι:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1 e^{\sigma_1 t} + v_2 e^{\sigma_2 t}, \\ r(t) &= r_1 e^{\sigma_1 t} + r_2 e^{\sigma_2 t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Οι τελευταίες εξισώσεις περιγράφουν πως θα εξελιχθούν, συναρτήσει του χρόνου, οι στιγμιαίες διαταραχές v_0 και r_0 , τις οποίες υπέστη το πλοίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, λόγω της επίδρασης των κρουστικών φορτίων $Y_{10}\delta(t)$ και $N_{10}\delta(t)$.

Η (ασυμπτωτική) ευστάθεια κατευθύνσεως του εξεταζόμενου πλοίου ισοδυναμεί με τον (ασυμπτωτικό) μηδενισμό των ταχυτήτων διαταραχής $v(t)$ και $r(t)$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Βάσει των σχέσεων (15), καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ένα πλοίο θα είναι ευσταθές όταν και μόνον όταν οι σταθερές σ_1 και σ_2 είναι είτε πραγματικοί αρνητικοί αριθμοί, είτε μιγαδικοί αριθμοί με αρνητικό πραγματικό μέρος. Δηλαδή όταν

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_1 + j\nu_1 & \text{και} & & \sigma_2 &= \mu_2 + j\nu_2 \\ \text{με} & & & & & \\ \mu_1, \mu_2 &< 0 & \text{και} & & \nu_1 &= -\nu_2 = \nu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (16)$$

Οι συνθήκες (16) ισοδυναμούν με τις συνθήκες:

$$\frac{C}{A} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{B}{A} > 0. \quad (17)$$

(Διότι $\sigma_1 + \sigma_2 = -B/A$ και $\sigma_1 \sigma_2 = C/A$). Προκειμένου να εξετασθεί πότε ισχύουν οι συνθήκες (17), θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα πρόσημα των σταθερών A, B και C , οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις (9).

Όσον αφορά το πρόσημο του A θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψη ότι οι ποσότητες $(Y_{\dot{v}} - m)$ και $(N_{\dot{r}} - I_{\zeta\zeta})$ είναι μεγάλοι αρνητικοί αριθμοί, ενώ οι ποσότητες $(Y_{\dot{v}} - m\xi_G)$ και $(N_{\dot{r}} - m\xi_G)$ ⁽¹⁾ είναι μικροί κατ' απόλυτη τιμή, θετικοί ή αρνητικοί, αριθμοί. Επομένως ο A είναι μεγάλος θετικός αριθμός. Ο αριθμός B είναι επίσης θετικός διότι οι ποσότητες $(Y_{\dot{v}} - m)$, $(N_{\dot{r}} - m\xi_G U)$, $(N_{\dot{r}} - I_{\zeta\zeta})$, $Y_{\dot{v}}$ είναι μεγάλοι αρνητικοί αριθμοί, ενώ οι ποσότητες $(Y_{\dot{r}} - m\xi_G)$, $N_{\dot{v}}$, $(N_{\dot{v}} - m\xi_G)$ και $(Y_{\dot{r}} - mU)$ είναι μικροί κατ' απόλυτη τιμή, θετικοί ή αρνητικοί, αριθμοί. Κατά συνέπεια, τουλάχιστον για συμβατικά πλοία, ισχύουν πάντοτε οι ανισότητες:

$$A > 0 \quad \text{και} \quad B > 0. \quad (18)$$

Από τις (17) και (18) προκύπτει ότι ένα πλοίο είναι ευσταθές αν και μόνον αν ισχύει η σχέση:

$$C = Y_{\dot{v}}(N_{\dot{r}} - m\xi_G U) - N_{\dot{v}}(Y_{\dot{r}} - mU) > 0 \quad (19)$$

- - ± -

Το πρόσημο του C δεν μπορεί να προβλεφθεί εκ των προτέρων διότι οι ποσότητες $Y_{\dot{v}}$, $(N_{\dot{r}} - m\xi_G U)$ και $(Y_{\dot{r}} - mU)$ είναι μεγάλοι αρνητικοί αριθμοί, ενώ η υδροδυναμική παράγωγος $N_{\dot{v}}$ είναι (μικρός) θετικός ή αρνητικός αριθμός.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η ανισότητα (19) αποτελεί το τελικό κριτήριο για την ευστάθεια ευθύγραμμης πορείας πλοίων συμβατικής μορφής. Για το λόγο αυτό, η ποσότητα C ονομάζεται δείκτης ευστάθειας του πλοίου. Όπως φαίνεται από τη σχέση (19), ο δείκτης ευστάθειας ενός πλοίου εξαρτάται από τη μάζα του πλοίου m , τη θέση του κέντρου βάρους του ξ_G , την ταχύτητα U , και τις τέσσερες υδροδυναμικές παραγώγους ως προς τις εγκάρσιες ταχύτητες $Y_{\dot{v}}$, $N_{\dot{r}}$, $N_{\dot{v}}$, $Y_{\dot{r}}$.

(¹) Η προσημασμένη απόσταση ξ_G του κέντρου βάρους είναι είτε μηδέν, αν ως αρχή των αξόνων ληφθεί το κέντρο βάρους, είτε μικρός θετικός ή αρνητικός αριθμός, αν ως αρχή των αξόνων ληφθεί το μέσο του πλοίου.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονισθεί η ιδιαίτερη σημασία της υδροδυναμικής παραγώγου N_v για την ευστάθεια του πλοίου. Σύμφωνα με τη σχέση (19), αν $N_v > 0$ τότε ισχύει οπωσδήποτε $C > 0$. Εν τούτοις, η υδροδυναμική παράγωγος N_v δεν μπορεί να αντικαταστήσει τον δείκτη ευστάθειας C , διότι η ανισότητα $N_v < 0$ δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη και ότι $C < 0$. Η υδροδυναμική παράγωγος N_v αποτελεί σημαντική παράμετρο σχεδίασεως ενός πλοίου, εφ' όσον όσο μεγαλύτερη (αλγεβρικά) είναι η τιμή της, τόσο ευσταθέστερο καθίσταται το πλοίο. Προκειμένου να αυξηθεί η τιμή της N_v , θα πρέπει να αυξηθούν οι δυνάμεις που ασκούνται από το νερό στο πρυμναίο τμήμα του πλοίου ή/και να ελαττωθούν οι αντίστοιχες δυνάμεις που ασκούνται στο πωραίο τμήμα. Ένας εύκολος τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι η προσθήκη καταλλήλων επιφανειών (skegs) στο πρυμναίο τμήμα. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι τόσο η υπέρμετρη ευστάθεια, όπως και η έλλειψη ευστάθειας, δεν είναι επιθυμητές. Και τούτο διότι στην πρώτη περίπτωση είναι περιορισμένες οι ελκτικές ικανότητες του πλοίου, ενώ στην δεύτερη περίπτωση απαιτείται συχνή (διαρκής) χρήση του πηδαλίου, γεγονός που οδηγεί στην ταχύτερη φθορά του μηχανισμού του.

9. Μελέτη της κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο: III. Πηδαλιουχία. Εξίσωση Nomoto

Αντικείμενο του παρόντος εδαφίου είναι ο προσδιορισμός της απόκρισης ενός πλοίου σε δεδομένη ιστορία γωνιακής εκτροπής $\gamma(t)$ του πηδαλίου του. στην περίπτωση αυτή οι εγκάρσιες κινήσεις του πλοίου διέπονται από το σύστημα 4(8b,c), το οποίο επαναλαμβάνεται εδώ χάριν ευκολίας:

$$\begin{aligned} (m - Y_{\dot{v}})\dot{v} + (m\xi_G - Y_r)\dot{r} - Y_v v + (mU - Y_r)r &= Y_\gamma \gamma(t), \\ (m\xi_G - N_{\dot{v}})\dot{v} + (I_{\zeta\zeta} - N_r)\dot{r} - N_v v + (m\xi_G U - N_r)r &= N_\gamma \gamma(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Περαιτέρω, θεωρούμε ότι το πηδάλιο εκτρέπεται συναρτήσει του χρόνου ως εξής:

$$\Gamma\omega\acute{\nu}\iota\alpha \text{ εκτροπής του πηδαλίου} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \gamma(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

όπου $\gamma(t)$ γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Επίσης θεωρούμε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πλοίο έχει γνωστή εγκάρσια ταχύτητα v_0 και γνωστή γωνιακή ταχύτητα r_0 , δηλαδή:

$$\begin{aligned} v(t = 0) &= v_0, \\ r(t = 0) &= r_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Για τον υπολογισμό της απόκρισης του πλοίου υπό τις ανωτέρω συνθήκες, θα πρέπει να επιλυθεί το σύστημα (1) με διέγερση (2) και αρχικές συνθήκες (3).

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace το σύστημα (1), και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τις σχέσεις (2) και (3), βρίσκουμε το ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα ως προς $V(s)$ και $R(s)$ (πρβλ. με σύστημα 8(5)):

$$\begin{aligned} A_{11}(s)V(s) + A_{12}(s)R(s) &= B_1 + Y_\gamma \Gamma(s), \\ A_{21}(s)V(s) + A_{22}(s)R(s) &= B_2 + N_\gamma \Gamma(s) \end{aligned} \quad (4)$$

όπου $V(s)$, $R(s)$ και $\Gamma(s)$ είναι οι μετασχηματισμένες κατά Laplace των συναρτήσεων $v(t)$, $r(t)$ και $\gamma(t)$, αντίστοιχα. Οι συντελεστές $A_{kl}(s)$, $k, l = 1, 2$, και B_1, B_2 , εξαρτώνται από τα αδρανειακά και υδροδυναμικά χαρακτηριστικά του πλοίου, και δίνονται από τις σχέσεις 8(6).

Από την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος (4) προκύπτει ότι (πρβλ. με λύση 8(13) του συστήματος 8(5)):

$$V(s) = \frac{v_1}{s-\sigma_1} + \frac{v_2}{s-\sigma_2} + \Gamma(s) \left(\frac{v_3}{s-\sigma_1} + \frac{v_4}{s-\sigma_1} \right), \quad (5)$$

$$R(s) = \frac{r_1}{s-\sigma_1} + \frac{r_2}{s-\sigma_2} + \Gamma(s) \left(\frac{r_3}{s-\sigma_1} + \frac{r_4}{s-\sigma_1} \right),$$

όπου

$$V_{3,4} = \mp \frac{(m\xi_G U - N_r) Y_\gamma - (mU - Y_r) N_\gamma + \sigma_{1,2} \left[(I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}}) Y_\gamma - (m\xi_G U - Y_r) N_\gamma \right]}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}, \quad (6)$$

$$r_{3,4} = \mp \frac{N_\gamma Y_v - N_v Y_\gamma - \sigma_{1,2} \left[(m - Y_v) N_\gamma - (m\xi_G - N_v) Y_\gamma \right]}{A(\sigma_2 - \sigma_1)}.$$

Στη σχέση (6a) ισχύει η αντιστοιχία $v_3 \Leftrightarrow -, \sigma_1$ και $v_4 \Leftrightarrow +, \sigma_2$. Παρόμοια αντιστοιχία ισχύει και στην περίπτωση των r_3, r_4 , σχέση (6b). Οι συντελεστές $A, \sigma_1, \sigma_2, v_1, v_2, r_1, r_2$, δίνοντας από τις σχέσεις 8(9a), 8(10) και 8(14).

Αντιστρέφοντας κατά Laplace τις σχέσεις (5) προκύπτει ότι:

$$v(t) = v_1 e^{\sigma_1 t} + v_2 e^{\sigma_2 t} + \int_0^t \gamma(\tau) \left[v_3 e^{\sigma_1(t-\tau)} + v_4 e^{\sigma_2(t-\tau)} \right] d\tau, \quad (7a)$$

και

$$r(t) = r_1 e^{\sigma_1 t} + r_2 e^{\sigma_2 t} + \int_0^t \gamma(\tau) \left[r_3 e^{\sigma_1(t-\tau)} + r_4 e^{\sigma_2(t-\tau)} \right] d\tau. \quad (7b)$$

Οι εκφράσεις (7) αποτελούν τη γενική λύση του συστήματος (1) με διέγερση (2) και αρχικές συνθήκες (3).

Η χρησιμότητα των σχέσεων (7) περιορίζεται εν μέρει, λόγω της πολυπλοκότητας τους. Για τον λόγο αυτό συχνά προχωρούμε στην παραγωγή απλούστερων παραλλαγών των εξισώσεων πηδαλιουχίας, όπως είναι, επί παραδείγματι, η εξίσωση Nomoto.

- Αποσυζευγμένη μορφή των εξισώσεων πηδαλιουχίας

Πριν προχωρήσουμε στην παραγωγή της εξίσωσης Nomoto, θα δώσουμε μια ισοδύναμη, αλλά αποσυζευγμένη, μορφή των εξισώσεων πηδαλιουχίας (1). Όπως περιγράφεται στο Συμπλήρωμα, στο τέλος του παρόντος εδαφίου, το σύστημα των εξισώσεων πηδαλιουχίας (1) μπορεί ισοδυνάμως να γραφεί στη μορφή:

$$T_1, T_2 \dot{r} + (T_1, T_2) \dot{r} + r = K\gamma + K T_3 \dot{\gamma}, \quad (8a)$$

$$T_1, T_2 \dot{v} + (T_1, T_2) \dot{v} + v = K_v \gamma + K_v T_4 \dot{\gamma}, \quad (8b)$$

όπου

$$T_1 T_2 = \frac{(Y_v - m)(N_{\dot{r}} - I_{\zeta\zeta}) - (Y_{\dot{r}} - m\xi_G)(N_v - m\xi_G)}{Y_v(m\xi_G U - N_r) - N_r(Y_r - mU)}, \quad (9a)$$

$$T_1 + T_2 = \frac{(Y_v - m)(N_{\dot{r}} - m\xi_G U) + (N_{\dot{r}} - I_{\zeta\zeta}) Y_v - (Y_{\dot{r}} - m\xi_G) N_v - (N_v - m\xi_G)(Y_r - mU)}{Y_v(m\xi_G U - N_r) - N_v(Y_r - mU)}, \quad (9b)$$

$$T_3 = \frac{(N_v - m\xi_G)Y_\gamma - (Y_v - m)N_\gamma}{N_v Y_\gamma - Y_v N_\gamma}, \quad (9c)$$

$$T_4 = \frac{(N_r - I_{zr})Y_\gamma - (Y_r - m\xi_G)N_\gamma}{(N_r - m\xi_G U)Y_\gamma - (Y_r - mU)N_\gamma}, \quad (9d)$$

$$K = \frac{N_v Y_\gamma - Y_v N_\gamma}{Y_v (N_r - m\xi_G U) - N_v (Y_r - mU)}, \quad (9e)$$

$$K_v = \frac{(N_v - m\xi_G U)Y_\gamma - (Y_v - mU)N_\gamma}{Y_v (N_r - m\xi_G U) - N_v (Y_r - mU)}. \quad (9f)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο το αρχικό σύστημα των εξισώσεων πηδαλιουχίας (1), ανάγεται σε δυο αποσυσζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, μια ως προς τη γωνιακή ταχύτητα $r(t)$ (εξίσωση (8a)), και μια ως προς την εγκάρσια ταχύτητα $v(t)$ (εξίσωση (8b)). Το αντίτιμο της αποσυσζευξης αυτής είναι η αύξηση της τάξης των διαφορικών εξισώσεων. Από τις δυο εξισώσεις (8a) και (8b), μόνο η πρώτη ενδιαφέρει για την πηδαλιουχία του πλοίου.

- Φυσική σημασία των σταθερών K, T_1, T_2, T_3

Η εξίσωση (8a) περιέχει τους συντελεστές K, T_1, T_2 και T_3 , οι οποίοι εξαρτώνται από τα αδρανειακά και τα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά του πλοίου μέσω των σχέσεων (9). Οι συντελεστές αυτοί (ιδιαίτερα οι τρεις πρώτοι) έχουν ένα απλό και ενδιαφέρον φυσικό νόημα, το οποίο θα περιγράψουμε εδώ. Προς τούτο θεωρούμε την ειδική περίπτωση κίνησης όπου το πλοίο κινείται σε ευθεία πορεία και το πηδάλιο βρίσκεται σε μηδενική γωνία εκτροπής για $t < 0$, ενώ για $t \geq 0$ η γωνία εκτροπής του πηδαλίου θεωρείται σταθερά και ίση με γ_0 . δηλαδή

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \gamma_0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Αν αμελήσουμε τον όρο $KT_3\dot{\gamma}(t)$ στο δεξιά μέλος της εξίσωσης (8a), τότε προκύπτει ότι το πλοίο θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής περί τον κατακόρυφο άξονα η οποία δίδεται από τη σχέση:

$$r(t) = A_1 e^{-t/T_1} + A_2 e^{-t/T_2} + K\gamma_0, \quad (11)$$

όπου A_1 και A_2 κατάλληλες σταθερές (οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες). Από τη σχέση (11) μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε τη φυσική σημασία των όρων T_1, T_2 και K . Οι ποσότητες T_1, T_2 , οι οποίες έχουν διαστάσεις χρόνου και σε ευσταθή πλοία είναι θετικές, χαρακτηρίζουν τους ρυθμούς απόσβεσης των μεταβατικών φαινομένων. Συγκεκριμένα, όσο μικρότερες είναι οι τιμές των T_1 και T_2 , τόσο γρηγορότερα αποσβέννεται το μεταβατικό φαινόμενο, δηλαδή τόσο ταχύτερη είναι η απόκριση του πλοίου σε πηδαλιουχία. Δεδομένου ότι, εν γένει,

$T_1 \gg T_2$, η κρίσιμη ποσότητα, όσον αφορά την ταχύτητα απόκρισης σε πηδαλιουχία, είναι ο συντελεστής T_1 .

Καθώς αποσβέννεται οι εκθετικοί όροι, η γωνιακή ταχύτητα $r(t)$ τείνει την τιμή $K\gamma_0$. Άρα όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σταθεράς K , τόσο μεγαλύτερη είναι και η τελική τιμή της γωνιακής ταχύτητας που αποκτά το πλοίο, πράγμα που σημαίνει ότι το πλοίο έχει καλύτερες ελκτικές ικανότητες.

Η σημασία του συντελεστή T_3 είναι μικρότερη από αυτήν των τριών άλλων συντελεστών και δεν θα περιγραφεί εδώ. Θα σημειώσουμε μόνο ότι η δράση του όρου $KT_3 \dot{\gamma}$, στον οποίο περιλαμβάνεται ο συντελεστής T_3 , περιορίζεται στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο λαμβάνει χώρα περιστροφή του πηδαλίου.

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω παρατηρούμε ότι οι ελκτικές ικανότητες του πλοίου περιγράφονται ικανοποιητικά μέσω των τεσσάρων συντελεστών K, T_1, T_2 και T_3 , εκ των οποίων σημαντικότεροι είναι οι δύο πρώτοι. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, και άλλα μεγέθη τα οποία αφορούν τις ελκτικές ικανότητες του πλοίου, όπως η προχώρηση, η τακτική διάμετρος κ.λπ., μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ανωτέρω συντελεστών.

- Η εξίσωση Νομοτο

Η εξίσωση (8α) συχνά απλουστεύεται περαιτέρω σε μια εξίσωση πρώτης τάξεως. Η απλούστευση αυτή επιτυγχάνεται προσεγγίζοντας κατάλληλα τη συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στην εξίσωση (8α). προς τούτο εργαζόμεθα ως εξής: μετασχηματίζουμε κατά Laplace την (8α) θεωρώντας ότι $\dot{r}(0) = 0$ και $r(0) = 0$ και αγνοώντας τον όρο $KT_3 \dot{\gamma}$ (ο οποίος είναι σημαντικός μόνον όταν το πηδάλιο στρέφεται γρήγορα), οπότε λαμβάνουμε

$$T_1 T_2 s^2 R(s) + (T_1 + T_2) s R(s) + R(s) = K \Gamma(s), \quad (12)$$

όπου $R(s) = L(r(t); t \rightarrow s)$ είναι η μετασχηματισμένη κατά Laplace της $r(t)$. Από την (12) προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ που αντιστοιχεί στην (8α) δίνεται από τη σχέση:

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Gamma(s)} = \frac{K(1) + T_3(s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}. \quad (13)$$

Αναπτύσσοντας την $G(s)$ κατά Taylor γύρω από την τιμή $s=0$ παίρνουμε:

$$G(s) = K \left[1 - (T_1 + T_2 - T_3) s - (T_1^2 + T_2^2 + T_1 T_2 - T_2 T_3 - T_3 T_1) s^2 \right] + 0(s^3). \quad (14)$$

Από την παραπάνω ανάπτυξη προκύπτει ότι η ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_1(s) = \frac{K}{1+Ts}, \quad (15)$$

με $T = T_1 + T_2 - T_3$, αποτελεί την πρωτοτάξια προσέγγιση της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ στην περιοχή $s=0$. Ακριβέστερα, ισχύει η σχέση

$$G(s) = G_1(s) + O(s^2).$$

Όμως η συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ αντιστοιχεί στην πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση

$$T\dot{r} + r = K\gamma, \quad (16)$$

η οποία ονομάζεται εξίσωση Nomoto, από το όνομα του Ιάπωνα μηχανικού ο οποίος την εισήγαγε. Η εξίσωση αυτή περιέχει δύο μόνο συντελεστές, τους K και $T = T_1 + T_2 - T_3$, οι οποίοι περιγράφουν ικανοποιητικά την ευστάθεια και τις ελκτικές ικανότητες του πλοίου, και οι οποίοι ονομάζονται δείκτες ποιότητας πηδαλιουχίας (steering quality indices). Το ακριβές νόημα των συντελεστών K και T καθίσταται φανερό με τη βοήθεια της γενικής λύσης της εξίσωσης Nomoto (πρβλ. σχέση (11) ανωτέρω):

$$r(t) = Ae^{-t/T} + \frac{K}{T} \int_0^t \gamma(\tau) e^{-(t-\tau)/T} d\tau, \quad (17)$$

όπου η σταθερά A προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Βάσει της σχέσεως αυτής βλέπουμε ότι η ευστάθεια του πλοίου ισοδυναμεί με $T > 0$, η γρήγορη απόκριση σε πηδαλιουχία ισοδυναμεί με $1/T$ μεγάλο, ενώ η ικανότητα στροφής αντιστοιχεί σε K μεγάλο. Έτσι, οι σταθερές $T, 1/T$ και K ονομάζονται και ως εξής:

T : Δείκτης ευστάθειας (ή ευστάθεια)
(course stability),

$1/T$: Ταχύτητα απόκρισης σε πηδαλιουχία
(responsiveness to rudder),

K : Ικανότητα στροφής
(turning stability).

Η εξίσωση Nomoto είναι το απλούστερο δυνατό μοντέλο για τη μελέτη της ευστάθειας και της πηδαλιουχίας του πλοίου. Τίθεται βέβαια το εύλογο ερώτημα, πόσο καλά περιγράφει η εξίσωση Nomoto την κίνηση του πλοίου. Για να απαντήσουμε γενικά στο ερώτημα αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Το γεγονός ότι η $G_1(s)$ προσεγγίζει ικανοποιητικά την $G(s)$ στη γειτονιά του σημείου $s=0$ (δηλαδή για μικρές συχνότητες), έχει ως συνέπεια ότι η αντίστοιχη αρχέτυπη συνάρτηση $g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)\}$ προσεγγίζει ικανοποιητικά τη $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ για

μεγάλους χρόνους (φορμαλιστικά για $t \rightarrow \infty$). Από την παρατήρηση αυτή καταλαβαίνουμε ότι η εξίσωση Nomoto περιγράφει ικανοποιητικά την απόκριση του πλοίου για μεγάλους χρόνους, αλλά υστερεί στην περιγραφή του μεταβατικού φαινομένου, δηλαδή της πρώτης φάσεως της κινήσεως του πλοίου αμέσως μετά την εφαρμογή της διέγερσης (δηλαδή αμέσως μετά την αλλαγή θέσεως του πηδαλίου).

Συμπλήρωμα εδαφίου 9: Παραγωγή της αποσυσζευγμένης μορφής των εξισώσεων της πηδαλιουχίας

Σκοπός του συμπληρώματος αυτού είναι η περιγραφή της διαδικασίας αποσύζευξης των εξισώσεων πηδαλιουχίας (1), η οποία επιτυγχάνεται με ταυτόχρονη αύξηση της τάξης των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων⁽¹⁾. Για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας αποσύζευξης, αποφεύγεται η καταγραφή των μακροσκελών ενδιάμεσων αλγεβρικών εκφράσεων, ενώ περιγράφονται με σαφήνεια όλα τα βήματα της διαδικασίας.

Το αρχικό σύστημα των εξισώσεων πηδαλιουχίας, εξισώσεις (1), επιλύεται ως αλγεβρικό γραμμικό σύστημα κατά διάφορους τρόπους. Κατ' αρχήν επιλύεται ως προς τις επιταχύνσεις \dot{v} και \dot{r} , οπότε παίρνουμε εκφράσεις της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \Delta_{v1}v + \Delta_{v2}r + \Delta_{v1}\gamma, \\ \dot{r} &= E_1v + E_2r + E_3\gamma.\end{aligned}\tag{Σ1}$$

Επίσης, επιλύεται ως προς v και \dot{v} , οπότε παίρνουμε σχέσεις της μορφής:

$$\begin{aligned}v &= \Delta_{v1}v + \Delta_{v2}\dot{r} + \Delta_{v1}\gamma, \\ \dot{v} &= E_{r1}v + E_{r2}\dot{r} + E_{r3}\gamma,\end{aligned}\tag{Σ2}$$

και, τέλος, επιλύεται ως προς r και \dot{r} , οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}r &= \Delta_{r1}v + \Delta_{r2}\dot{v} + \Delta_{r1}\gamma, \\ \dot{r} &= E_{r1}v + E_{r2}\dot{v} + E_{r3}\gamma.\end{aligned}\tag{Σ3}$$

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις οι συντελεστές Δ και E εξαρτώνται από τα αδρανειακά και τα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά του πλοίου, αλλά όχι από τα μεγέθη v , r , γ και τις παραγώγους τους. Παραγωγίζοντας τώρα τις εξισώσεις (Σ1) ως προς χρόνο παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \Delta_1\dot{v} + \Delta_2\dot{r} + \Delta_3\dot{\gamma}, \\ \dot{r} &= E_1\dot{v} + E_2\dot{r} + E_3\dot{\gamma}.\end{aligned}\tag{Σ4}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τη γωνιακή επιτάχυνση \dot{r} στην (Σ4a) από την (Σ3b), και τη γραμμική επιτάχυνση \dot{v} στην (Σ4b) από την (Σ2b), προκύπτουν ασύζευκτες εξισώσεις της μορφής:

⁽¹⁾ Είναι γνωστό πως κάθε n κν σύστημα γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, μπορεί να αναχθεί σε μια διαφορική εξίσωση $n - 1$ οστής τάξεως.

$$\dot{v} + H_1\dot{v} + H_2v = H_3\dot{\gamma} + H_4\dot{\gamma},$$
$$\dot{r} + \Theta_1\dot{r} + \Theta_2r = \Theta_3\dot{\gamma} + \Theta_4\dot{\gamma}.$$

(Σ5)

Το σύστημα των εξισώσεων (Σ5), η αναλυτική μορφή του οποίου δίδεται στο κυρίως εδάφιο 9 (εξισώσεις (8) και (9)), είναι ένα σύστημα δύο ανεξαρτήτων γραμμικών δευτεροτάξιων εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα.

10. Δοκιμές πηδαλιουχίας και ελικτικές ικανότητες πλοίου

Η θεωρία της δυναμικής ευστάθειας και πηδαλιουχίας που έχει ήδη εκτεθεί στα προηγούμενα εδάφια επιτρέπει τον προσδιορισμό (πρόβλεψη) των ελικτικών ικανοτήτων ενός πλοίου στο στάδιο της σχεδίασης, με χρήση μοντέλων και θεωρητικών μεθόδων. Επιτρέπει επίσης τη σχεδίαση (επιλογή) του συστήματος πηδαλιουχίας (βλ. και εδάφιο 13), έτσι ώστε να επιτυγχάνονται ορισμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά ευστάθειας και πηδαλιουχίας του πλοίου. Βέβαια, όταν το πλοίο κατασκευασθεί, απαιτείται ο έλεγχος των πραγματικών ελικτικών ικανοτήτων και της ευστάθειας κατευθύνσεως αυτού. Ο έλεγχος αυτός γίνεται με τη βοήθεια ορισμένων δοκιμών, οι σημαντικότερες από τις οποίες περιγράφονται στο παρόν εδάφιο.

Οι δοκιμές που περιγράφονται στη συνέχεια είναι οι ακόλουθες:

- i) Σπειροειδής ελιγμός (Spiral maneuver, Dieudonne 1953)
- ii) Αντίστροφος σπειροειδής ελιγμός (Reverse spiral maneuver, Bech 1968)
- iii) Ελιγμός απλής επαναφοράς πηδαλίου (Pullout maneuver)
- iv) Κυκλικός ελιγμός (Circle or turning maneuver)
- v) Οφιοειδής ελιγμός (Zig-zag maneuver, Kempf 1944)
- vi) Ελιγμός σταματήματος (Stopping maneuver)

i) Σπειροειδής ελιγμός (Spiral maneuver)

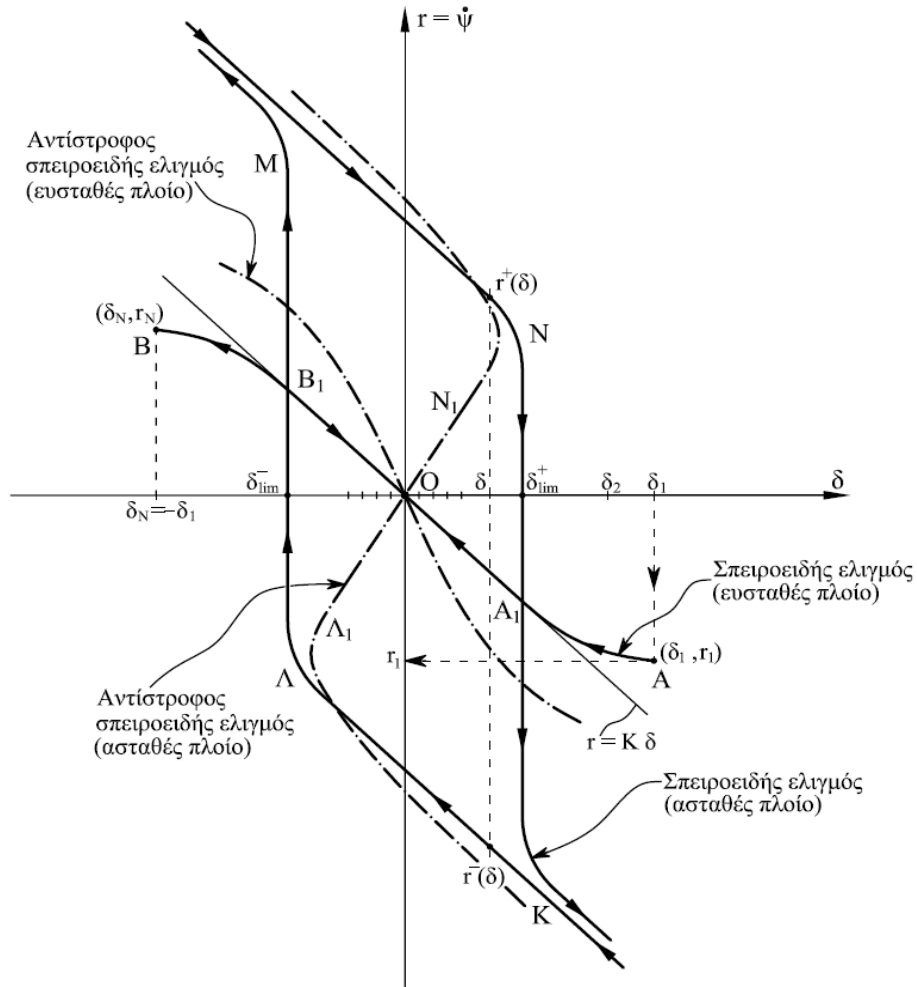
Όπως για τον έλεγχο της στατικής ευστάθειας ενός νεοαναπηγηθέντος πλοίου εκτελείται το *πείραμα ευσταθείας* (το οποίο έχει μελετηθεί στο μάθημα Υδροστατική του Πλοίου), έτσι και για τον έλεγχο της ευστάθειας κατευθύνσεως ενός πλοίου εκτελείται παραδοσιακά ο *σπειροειδής ελιγμός*.

Ο σπειροειδής ελιγμός εκτελείται ως εξής:

- (α) Το πλοίο “σταθεροποιείται” σε ευθεία πορεία με προκαθορισμένη ταχύτητα U (π.χ. την ταχύτητα υπηρεσίας). Στη συνέχεια, καθ’ όλη τη διάρκεια του ελιγμού, η παροχή του καυσίμου διατηρείται σταθερή.
- (β) Όταν αποκατασταθεί πλήρως η μόνιμη ευθύγραμμη κίνηση στην προκαθορισμένη ταχύτητα U , το πηδάλιο εκτρέπεται απότομα κατά μια μεγάλη γωνία $\delta = \delta_1$ (π.χ. $\delta_1 = 20^\circ$, όπου συνήθως θετική θεωρείται η εκτροπή προς τα αριστερά) και κρατείται στη θέση αυτή μέχρι να αποκατασταθεί σταθερή τιμή της γωνιακής ταχύτητας του πλοίου $r = r_1$. (Ο απαιτούμενος χρόνος για συμβατικά πλοία μετρίου μεγέθους είναι της τάξεως των 2 min). Το ζεύγος των τιμών (δ_1, r_1) σημειώνεται σε ένα διάγραμμα (δ, r) . Βλ. Σχήμα 1.
- (γ) Στη συνέχεια η γωνία εκτροπής του πηδαλίου ελαττώνεται κατά (έστω) 5° , και επαναλαμβάνεται η ανωτέρω διαδικασία. Προκύπτει έτσι ένα νέο ζεύγος τιμών (δ_2, r_2) , το οποίο σημειώνεται στο ίδιο διάγραμμα (δ, r) .
- (δ) Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για μικρότερες γωνίες εκτροπής του πηδαλίου $\delta_3, \delta_4, \dots$ έως την γωνία $\delta_N = -\delta_1$ (π.χ. -20°), και τα λαμβανόμενα ζεύγη τιμών γωνίας εκτροπής πηδαλίου - γωνιακής ταχύτητας πλοίου $(\delta_3, r_3), (\delta_4, r_4), \dots$,

(δ_N, r_N) , σημειώνονται στο διάγραμμα (δ, r) . Συνήθως, στην περιοχή των γωνιών εκτροπής από 5° έως -5° χρησιμοποιείται μικρότερο βήμα, π.χ. 1° ή 2° .

- (ε) Η ανωτέρω διαδικασία (α), (β), (γ), (δ) επαναλαμβάνεται αρχίζοντας από δεξιά εκτροπή πηδαλίου, π.χ. από $\delta'_1 = -20^\circ$, και προχωρώντας με τελείως αντίστοιχα βήματα έτσι ώστε $\delta'_1 = \delta_N, \delta'_2 = \delta_{N-1}, \delta'_3 = \delta_{N-2}, \dots, \delta'_N = \delta_1$. Και πάλι, σε κάθε γωνία εκτροπής δ'_n μετράται η αντίστοιχη μόνιμη τιμή της γωνιακής ταχύτητας του πλοίου r'_n . Τα προκύπτοντα ζεύγη $(\delta'_n, r'_n), n = 1, 2, \dots, N$, σημειώνονται και πάλι στο ίδιο διάγραμμα (δ, r) .



Σχήμα 1: Σπειροειδής και αντίστροφος σπειροειδής ελιγμός για ευσταθές και ασταθές πλοίο.

Η μορφή του λαμβανομένου διαγράμματος (δ, r) εξαρτάται ουσιαστικά από το εάν το πλοίο είναι ευσταθές ή ασταθές. (Βλ. Σχήμα 1). Στην πρώτη περίπτωση (ευσταθές πλοίο) η γωνιακή ταχύτητα r που αντιστοιχεί σε κάθε γωνία εκτροπής του πηδαλίου δ είναι μονοσημάτως ορισμένη. Προκύπτει έτσι μια μοναδική καμπύλη (συνάρτηση) $r = r(\delta)$, η οποία διαγράφεται κατά τη φορά $A \rightarrow 0 \rightarrow B$ όταν οι γωνίες εκτροπής βαίνουν μειούμενες, και κατά την αντίθετη φορά $B \rightarrow 0 \rightarrow A$ όταν οι γωνίες εκτροπής βαίνουν αυξανόμενες. Στην περίπτωση αυτή, σε μικρές τιμές της γωνίας δ

αντιστοιχούν μικρές τιμές της γωνιακής ταχύτητας r , με συνέπεια η συμπεριφορά του πλοίου να προβλέπεται ικανοποιητικά (για μικρά δ) από τις γραμμικές εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο εδάφιο 6, εξισώσεις 6(8), και μελετήθηκαν διεξοδικά στο εδάφιο 9. Εφαρμόζοντας, π.χ., την αποσυζευγμένη εξίσωση πηδαλιουχίας 9(8α) για μια συγκεκριμένη φάση του σπειροειδούς ελιγμού, όπου έχουμε $\delta = \delta_n = \text{σταθερό}$, $r = r_n = \text{σταθερό}$, και άρα $\dot{\delta} = 0$, $\dot{r} = 0$ και $\ddot{r} = 0$, βρίσκουμε

$$\frac{r_n}{\delta_n} = \left(\frac{\partial r}{\partial \delta} \right)_{\delta=0} = K = \frac{N_v Y_\delta - Y_v N_\delta}{Y_v (N_r - m \xi_G U) - N_v (Y_r - m U)}. \quad (1)$$

Η ανωτέρω σχέση δίδει την κλίση της καμπύλης $r = r(\delta)$ στο σημείο $\delta = 0$ και ορίζει την ευθεία $r = K\delta$, η οποία, στην περίπτωση ευσταθούς πλοίου, είναι όντως εφαπτομένη στην καμπύλη $r = r(\delta)$ που προκύπτει από τις μετρήσεις. Η περιοχή των τιμών δ για τις οποίες η πειραματική καμπύλη και η (θεωρητική) ευθεία $r = K\delta$ σχεδόν συμπίπτουν (π.χ. το τμήμα $A_1 B_1$ στο διάγραμμα του Σχήματος 1), είναι ακριβώς η περιοχή ισχύος της γραμμικής θεωρίας. Προφανής συνέπεια των ανωτέρω είναι ότι η αληθής τιμή του συντελεστή K (ικανότητα στροφής) ευσταθούς πλοίου μπορεί εύκολα να προκύψει (μετρηθεί) από τον σπειροειδή ελιγμό, ως η κλίση της καμπύλης $r = r(\delta)$ στο σημείο $\delta = 0$. Οι περιοχές AA_1 και $B_1 B$ της καμπύλης $r = r(\delta)$ μπορούν να προβλεφθούν θεωρητικά μόνο με χρήση μη γραμμικών εξισώσεων πηδαλιουχίας (οι οποίες δεν αναπτύσσονται στις παρούσες σημειώσεις).

Στην περίπτωση ασταθούς πλοίου προκύπτει ο βρόχος ΚΛΜΝ (βρόχος υστερήσεως). Ο βρόχος προκύπτει επειδή στο ασταθές πλοίο, για δεδομένη γωνία εκτροπής δ του πηδαλίου στο διάστημα $\delta_{\text{lim}}^- < \delta < \delta_{\text{lim}}^+$, όπου $|\delta_{\text{lim}}^-| = |\delta_{\text{lim}}^+|$, υπάρχουν δύο δυνατές γωνιακές ταχύτητες του πλοίου, μία προς τα δεξιά (αρνητική), $r^-(\delta) < 0$, και μία προς τα αριστερά (θετική), $r^+(\delta) > 0$, οι οποίες προκύπτουν ανάλογα με το εάν η γωνία εκτροπής του πηδαλίου λαμβάνει την τιμή δ με μείωση από μεγαλύτερες προηγούμενες τιμές ή με αύξηση από μικρότερες προηγούμενες τιμές. Η φορά διαγραφής των κλάδων του βρόχου, που δείχνεται στο Σχήμα 1, είναι λοιπόν ουσιώδης. Με άλλα λόγια, για δεδομένη γωνία $\delta \in (\delta_{\text{lim}}^-, \delta_{\text{lim}}^+)$, το πλοίο θα κινείται με γωνιακή ταχύτητα είτε $r^-(\delta) < 0$ είτε $r^+(\delta) > 0$, ανάλογα με την προηγούμενη ιστορία της κίνησής του, ή/και με τις εξωτερικές επιδράσεις που ασκούνται σ' αυτό (ρεύμα, κύμα, άνεμος). Η συμπεριφορά αυτή του ασταθούς πλοίου, που περιγράφεται από το βρόχο υστερήσεως, δεν μπορεί να ερμηνευθεί από τις γραμμικές εξισώσεις πηδαλιουχίας που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα εδάφια 6-9. Μπορεί όμως να ερμηνευθεί (και να προβλεφθεί θεωρητικά) με κατάλληλες μη γραμμικές εξισώσεις.

Ας σημειωθεί εδώ ότι η ιδιότητα ενός πλοίου να είναι ασταθές δεν είναι πάντοτε αρνητική, δεδομένου ότι όσο ευσταθέστερο είναι ένα πλοίο, τόσο δυσκολότερα πηδαλιουχείται. Έτσι, είναι συχνά προτιμότερο ένα μεγάλο πλοίο (το οποίο συνήθως κινείται σε χαμηλές ταχύτητες υπηρεσίας) να είναι ελαφρώς ασταθές, ώστε να πηδαλιουχείται ευκολότερα. Η αστάθεια κατευθύνσεως ενός πλοίου μπορεί να αντιμετωπισθεί με τη βοήθεια μηχανισμών πηδαλιουχίας με αυτόματο έλεγχο, έτσι ώστε να μην υπάρχει πρακτικά ούτε πρόβλημα διατηρήσεως της ευθείας πορείας.

Ο σπειροειδής ελιγμός μπορεί να επαναληφθεί για διάφορες ταχύτητες U του πλοίου, τα αποτελέσματα όμως είναι συνήθως παρόμοια. Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη σωστή εκτέλεση του σπειροειδούς ελιγμού είναι να κρατείται το πηδάλιο σε κάθε μια γωνία $\delta = \delta_n$ επαρκή χρόνο $t = \tau_n$, ώστε να αποκαθίσταται η μόνιμη κίνηση $r = r_n = \text{σταθερό}$. Η επίδραση του χρόνου τ_n στο διάγραμμα $r - \delta$ δείχνεται στο Σχήμα 2, όπου παρουσιάζονται τα διαγράμματα $r - \delta$ για το ίδιο (ευσταθές) πλοίο σε ίδιες συνθήκες, με μοναδική διαφορά ότι ο χρόνος εκάστης φάσεως $\delta = \delta_n$ είναι διαφορετικός:

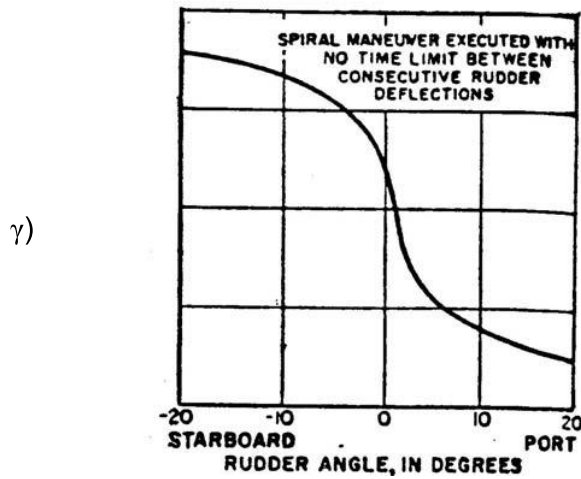
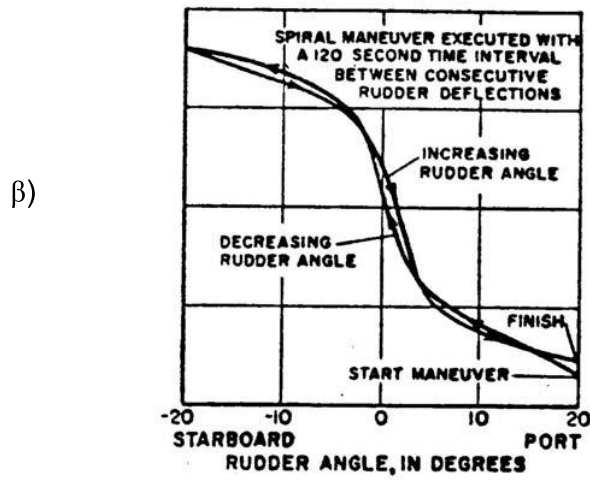
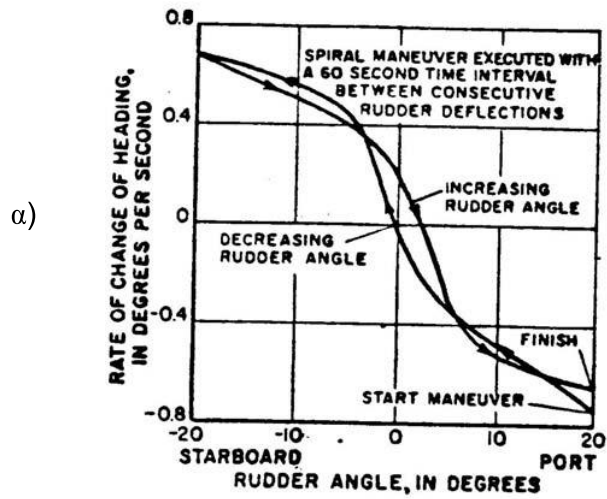
- a) $\tau_n = 1 \text{ min}$,
- b) $\tau_n = 2 \text{ min}$,
- c) τ_n απεριόριστος (όσος χρειάζεται ώστε η γωνιακή ταχύτητα r να καταστεί σταθερά).

Τα αποτελέσματα του σχήματος, που έχουν προκύψει από την αριθμητική επίλυση ενός μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων πηδαλιουχίας (Strom-Tejsen 1965, βλ. επίσης Crane *et al.* 1989, Section 4), δείχνουν ότι, εάν ο χρόνος τ_n δεν είναι αρκετός, προκύπτει ένας επιμήκης βρόχος υστερήσεως (Σχήματα 2(α) και (β)), ο οποίος όμως δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Πράγματι, από το Σχήμα 2(γ) είναι φανερό ότι το συγκεκριμένο πλοίο είναι απολύτως ευσταθές.

Η εκτέλεση του σπειροειδούς ελιγμού σε μεγάλα πλοία (π.χ. υπερδεξαμενόπλοια) απαιτεί υπερβολικά μεγάλο χρονικό διάστημα, αφού ο χρόνος για να φτάσουμε σε σταθερές τιμές της γωνιακής ταχύτητας r υπό σταθερό δ είναι μεγάλος. Ως συνέπεια αυτού, απαιτείται μεγάλη θαλάσσια έκταση για την εκτέλεσή του ελιγμού. Επι πλέον, τα αποτελέσματα του σπειροειδούς ελιγμού είναι πολύ ευαίσθητα σε εξωτερικές διεγέρσεις. Τα ανωτέρω μειονεκτήματα οδήγησαν στην εισαγωγή του αντίστροφου σπειροειδούς ελιγμού, ο οποίος περιγράφεται στη συνέχεια.

ii) Αντίστροφος σπειροειδής ελιγμός (Reverse spiral maneuver)

Ο *αντίστροφος σπειροειδής ελιγμός* προτάθηκε από τον Bech το 1968, και αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο για τον πειραματικό (μέσω μετρήσεων) προσδιορισμό του διαγράμματος (ή του βρόχου) $r - \delta$. Στα πλαίσια, όμως, του αντίστροφου σπειροειδούς ελιγμού επιδιώκεται ο προσδιορισμός του γραφήματος της απεικόνισης $\delta = \delta(r)$, δηλαδή της αντίστροφης απεικόνισης της $r = r(\delta)$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η απεικόνιση $r \rightarrow \delta = \delta(r)$ είναι μονοσήμαντη για κάθε τιμή της γωνιακής ταχύτητας r , ακόμη και για ασταθή πλοία (δηλαδή και εντός του βρόχου υστερήσεως!!). Αυτό το παράδοξο, εκ πρώτης όψεως, γεγονός, καθώς και η σχέση της καμπύλης $\delta = \delta(r)$, που προκύπτει από τον αντίστροφο σπειροειδή ελιγμό,



Σχήμα 2. Αποτελέσματα σπειροειδούς ελιγμού (Strom – Tejsen, 1965)

με την καμπύλη (βρόχο) $r = r(\delta)$, που προκύπτει από τον ευθύ σπειροειδή ελιγμό, θα συζητηθούν στη συνέχεια.

Ο αντίστροφος σπειροειδής ελιγμός εκτελείται ως εξής: Για δεδομένη (προκαθορισμένη) τιμή της γωνιακής ταχύτητας $r = r_n$, το πλοίο πηδαλιουχείται καταλλήλως, έτσι ώστε να επιτύχει την τιμή αυτή. Δηλαδή, δοθείσης της τιμής $r = r_n$, ο τιμονιέρης (ή ο αυτόματος πιλότος, εάν υπάρχει), επιβάλλει μια χρονική ιστορία εκτροπής του πηδαλίου $\delta = \delta(t)$, έτσι ώστε, η τιμή της γωνιακής ταχύτητας $r = r(t)$ να τείνει τελικά προς την προκαθορισμένη τιμή r_n . Για να επιτευχθεί αυτός ο ελιγμός, απαιτούνται οι ενδείξεις δύο οργάνων: ενός μετρητού της γωνίας εκτροπής του πηδαλίου και ενός γυροσκοπικού μηχανισμού μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας του πλοίου (rate gyro). Πρακτικά η σύγκλιση $r(t) \rightarrow r_n$ πραγματοποιείται με τη βοήθεια “ταλαντωτικής” πηδαλιουχίας (διαρκείς μικρές εκτροπές του πηδαλίου με εύρος 2° - 4° περίπου), οπότε βέβαια προκύπτει και μια ελαφρώς ταλαντευόμενη (γύρω από την r_n) τιμή της $r(t)$. Το αντίστοιχο σημείο (δ_n, r_n) του διαγράμματος $\delta - r$ προκύπτει λαμβάνοντας τη μέση τιμή των ταλαντευομένων ποσοτήτων $\delta(t)$ και $r(t)$. Από την ανωτέρω περιγραφή είναι φανερό ότι, με τον αντίστροφο σπειροειδή ελιγμό, κάθε σημείο (δ_n, r_n) του διαγράμματος $\delta - r$ κατασκευάζεται αυτοτελώς (ανεξαρτήτως των υπολοίπων). Άρα μπορούμε να βρίσκουμε τα σημεία (δ_n, r_n) με οποιαδήποτε σειρά.

Εάν το πλοίο είναι ευσταθές και η τιμή r_n είναι μικρή (ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ισχυρή τη γραμμική θεωρία), τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη δυναμική του συστήματος με τη βοήθεια της εξίσωσης 9(8α) ως εξής:

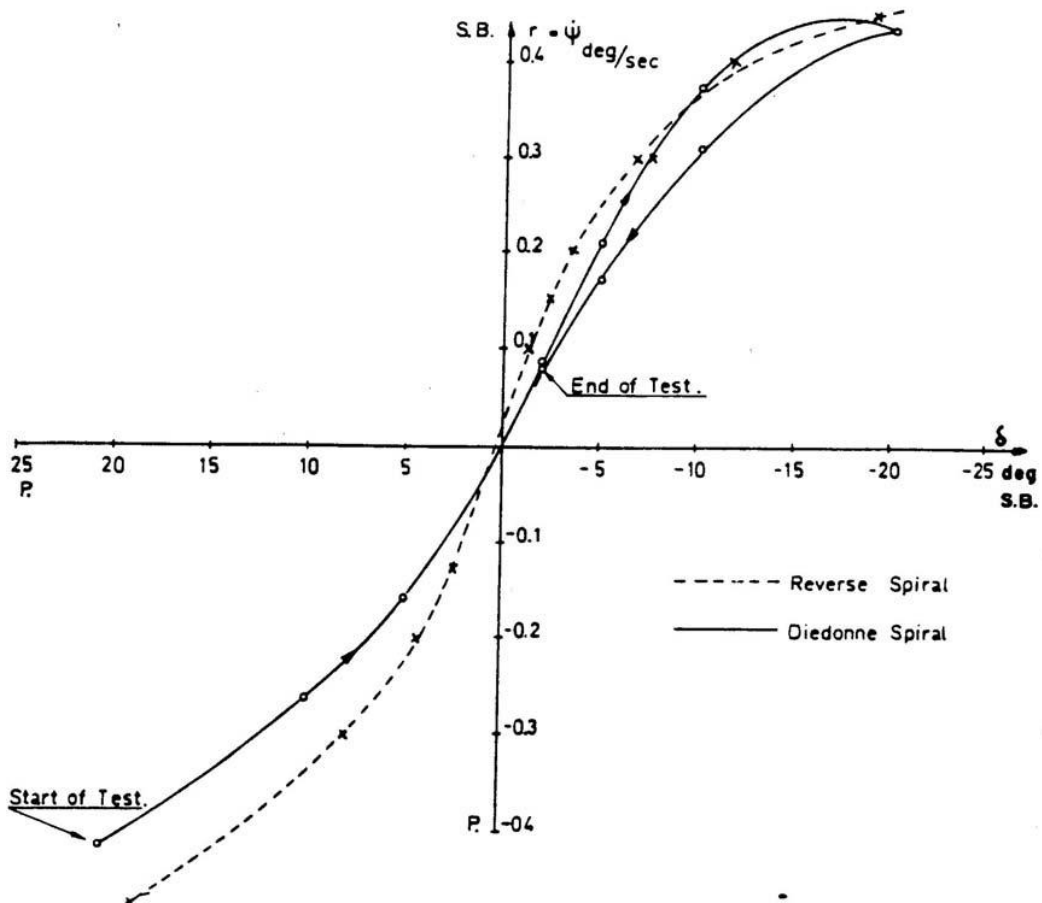
Θεωρώντας ότι οι όροι $T_1 T_2 \ddot{r}(t)$ και $(T_1 + T_2) \dot{r}(t)$ είναι αμελητέοι σε σχέση με τους όρους $r(t)$, $K\delta(t)$ και $KT_3 \dot{\delta}(t)$, η εξίσωση 9(8α) γίνεται

$$r(t) \approx K\delta(t) + KT_3 \dot{\delta}(t). \quad (2)$$

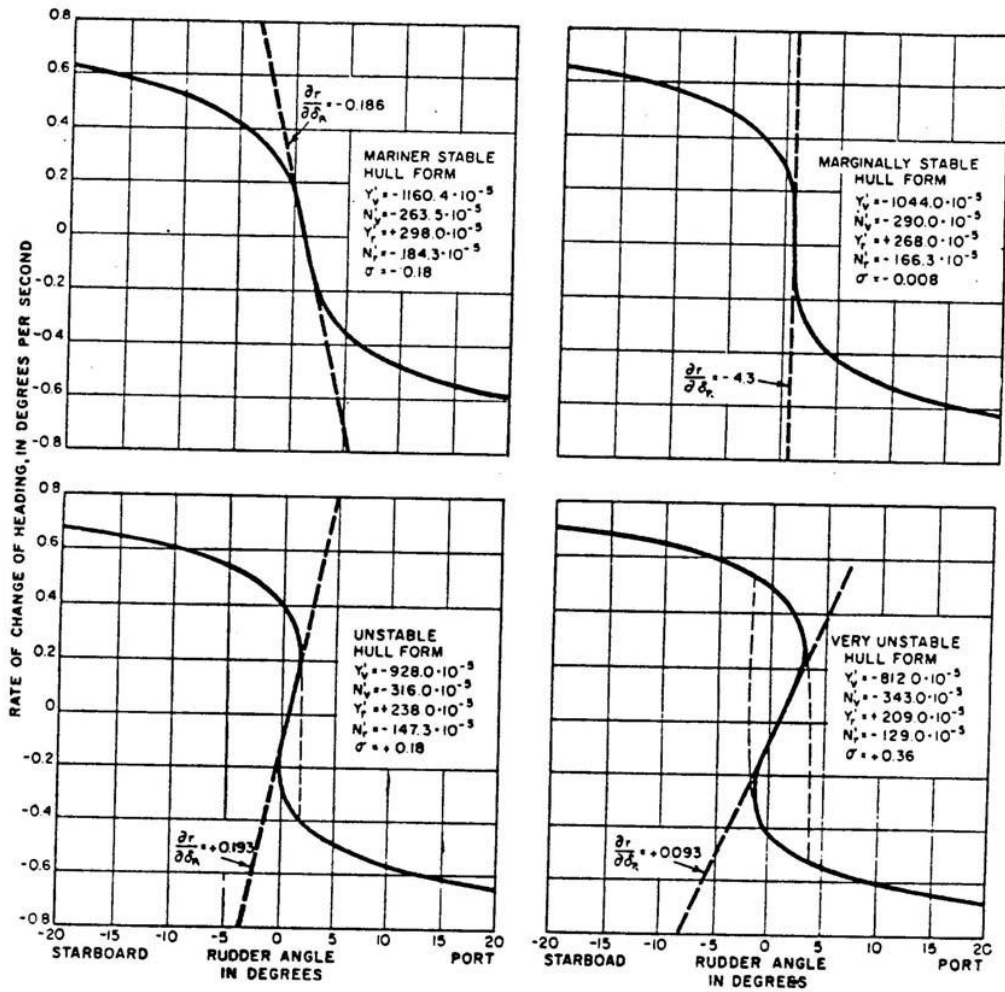
Λαμβάνοντας μέση τιμή σε ένα (κατάλληλο) χρονικό διάστημα $[0, \tau_n]$ παίρνουμε

$$r_n = \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} r(t) dt = \frac{K}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} (\delta(t) + T_3 \dot{\delta}(t)) dt \equiv \tilde{K} \delta_n. \quad (3)$$

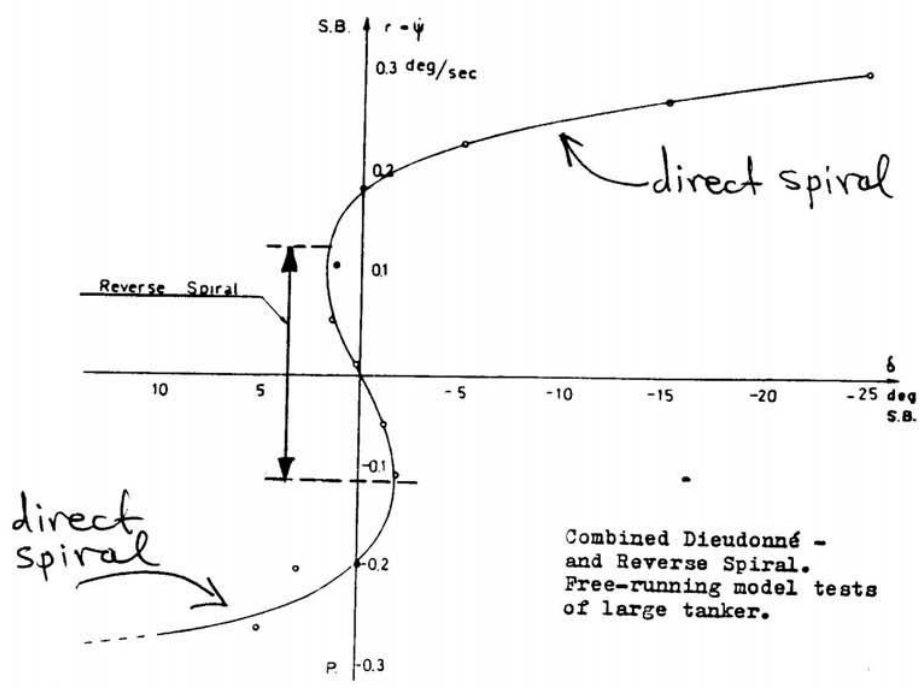
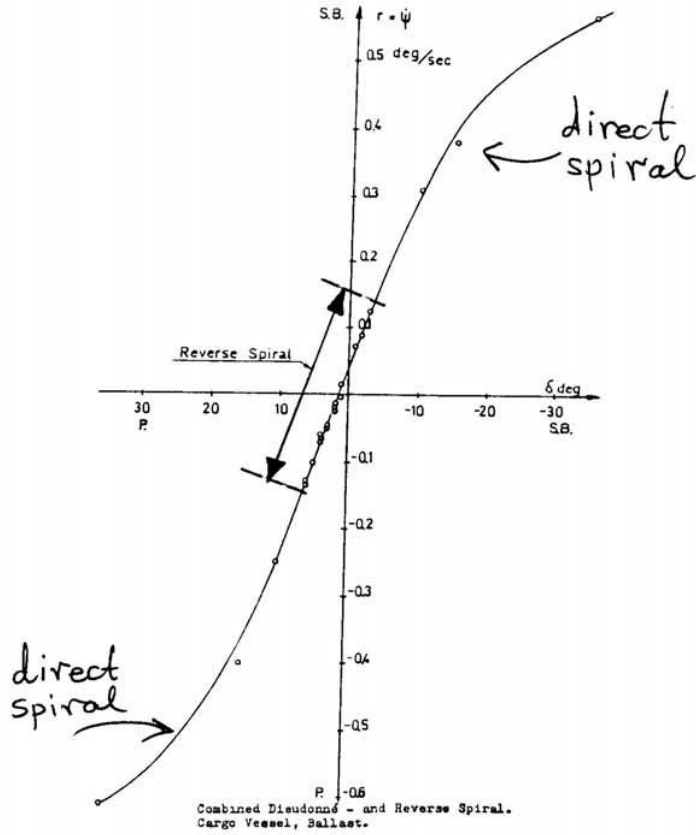
Το ζεύγος (δ_n, r_n) τοποθετείται στο διάγραμμα $\delta - r$ και αποτελεί ένα σημείο της καμπύλης του αντίστροφου σπειροειδούς ελιγμού. Η κλίση \tilde{K} που προκύπτει από τη σχέση (3) είναι κατά κανόνα ελαφρώς μεγαλύτερη (απολύτως) από την κλίση K που προκύπτει από τον ευθύ σπειροειδή ελιγμό. (Η σύγκριση αυτή έχει νόημα μόνο για ευσταθή πλοία). Στο Σχήμα 3 φαίνονται τα διαγράμματα του ευθέος και του αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού για ένα μεγάλο Tanker (13th ITTC, September 1972). (Ο άξονας δ στο Σχήμα 3 έχει τις αρνητικές τιμές δεξιά και τις θετικές αριστερά. Γι' αυτό το λόγο η μορφή του διαγράμματος είναι διαφορετική από αυτή των άλλων σχημάτων. Το ίδιο συμβαίνει και στο Σχήμα 5, κατωτέρω).



Σχήμα 3. Σύγκριση αποτελεσμάτων ευθέος και αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού για ευσταθές πλοίο. (13th ITTC, 1972)



Σχήμα 4. Χαρακτηρισμός ευστάθειας πλοίου μέσω των αποτελεσμάτων του αντίστροφου σπειροειδούς ελιγμού. (Strom-Tejsen 1965, Crane *et al.* 1989)



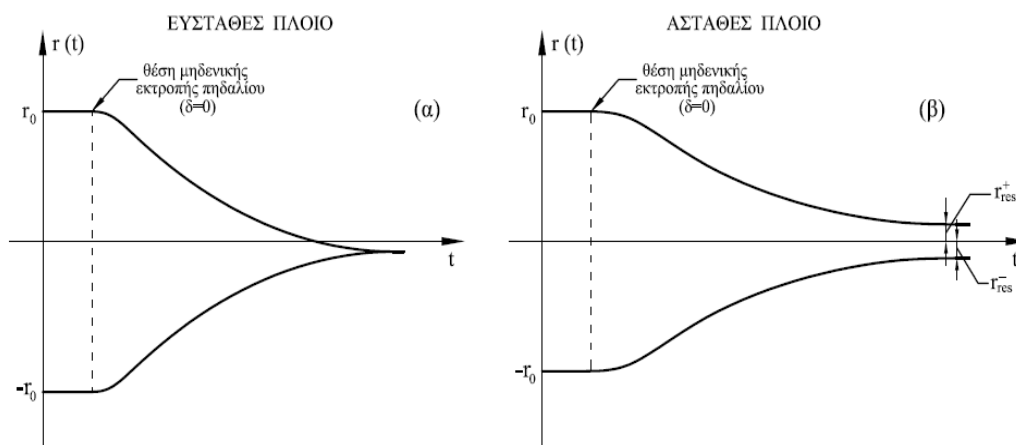
Σχήμα 5. Συνδυασμός ευθέος και αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού για ευσταθή και ασταθή γάστρα. (13th ITTC, 1972).

Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού εξαρτάται από το χρόνο τ_n που απαιτείται για τον υπολογισμό της κάθε τιμής δ_n (βλ. σχέση (3)). Είναι όμως, κατά κανόνα, πολύ μικρότερος από τον αντίστοιχο χρόνο που απαιτείται για τον ευθύ σπειροειδή ελιγμό. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα του αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού είναι ότι λαμβάνονται μονοσήμαντες τιμές της γωνίας δ ακόμη και μέσα στο βρόχο υστερήσεως. Έτσι, η καμπύλη του αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού αποτελεί (υπό τις συνθήκες που περιγράψαμε ανωτέρω) έναν πραγματοποιήσιμο δρόμο σύνδεσης δύο περιοχών ευστάθειας του διαγράμματος $r - \delta$, ο οποίος “διέρχεται” μέσα από την περιοχή αστάθειας (βρόχο υστερήσεως) του συστήματος. (Βλ. Σχήμα 1, καμπύλη NN₁Λ₁Λ). Η ακριβής μορφή της καμπύλης $\delta = \delta(r)$ στην περιοχή του $r = 0$ (μέσα στο βρόχο υστερήσεως) παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την ευστάθεια και την ικανότητα πηδαλιουχίας του πλοίου. Βλ. Σχήμα 4.

Τέλος, αναφέρουμε ότι συχνά οι δύο σπειροειδείς ελιγμοί (ο ευθύς και ο αντιστροφος) συνδυάζονται, έτσι ώστε ένα τμήμα της καμπύλης $\delta - r$ να λαμβάνεται με τον αντίστροφο (στην περιοχή του $(0, 0)$), και η υπόλοιπη καμπύλη να λαμβάνεται με τον ευθύ. Βλ. Σχήμα 5.

iii) Ελιγμός απλής επαναφοράς πηδαλίου (Pullout maneuver)

Ο ελιγμός αυτός, ο οποίος μας δίνει ποιοτικό χαρακτηρισμό της ευστάθειας ευθύγραμμης κίνησης του πλοίου, εκτελείται ως εξής: Το πλοίο πηδαλιουχείται, κατ’ αρχήν, έτσι ώστε να αποκτήσει μια σταθερή (και αρκετά μεγάλη) γωνιακή ταχύτητα r_0 . Στη συνέχεια το πηδάλιο επαναφέρεται στη θέση μηδενικής εκτροπής ($\delta = 0$), και εξετάζεται η γωνιακή ταχύτητα $r = r(t)$ του πλοίου. Εάν αυτό είναι ευσταθές, τότε η γωνιακή ταχύτητα θα τείνει μηδέν, $r(t) \rightarrow 0$, ή σε μια πολύ μικρή τιμή, οφειλόμενη σε διάφορες ασυμμετρίες (δυναμικές, αδρανειακές, γεωμετρικές). Στην περίπτωση αυτή, η γωνιακή ταχύτητα $r(t)$ τείνει στο ίδιο όριο (μηδέν ή μικρή τιμή), ανεξαρτήτως της αρχικής τιμής r_0 της γωνιακής ταχύτητας. Ο ελιγμός αυτός πρέπει να γίνεται για δύο τουλάχιστον τιμές της r_0 , μία θετική και μία αρνητική. Βλ. και Σχήμα 6α.



Σχήμα 6. Ελιγμός απλής επαναφοράς πηδαλίου (pullout maneuver). (α): ευσταθές πλοίο, (β): ασταθές πλοίο.

Όταν το πλοίο είναι ασταθές, τότε, μετά την επαναφορά του πηδαλίου στην ουδέτερη θέση ($\delta = 0$), η γωνιακή ταχύτητα μειούται μεν (αν η αρχική γωνιακή ταχύτητα r_0 είναι αρκετά μεγάλη), αλλά δεν τείνει στο μηδέν. Στην περίπτωση αυτή

$$r(t) \rightarrow r_{res}^+ > 0, \quad \text{όταν } r_0 > 0,$$

και

$$r(t) \rightarrow r_{res}^- < 0, \quad \text{όταν } r_0 < 0,$$

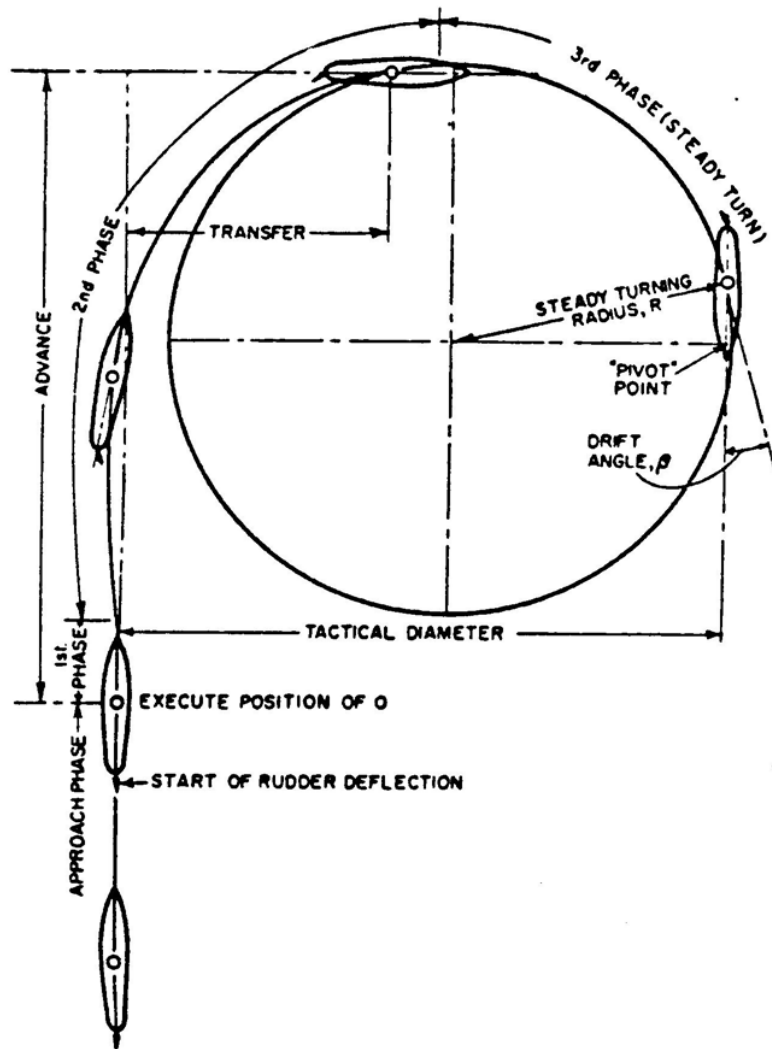
όπου r_{res}^\pm , είναι πεπερασμένες παραμένουσες τιμές της γωνιακής ταχύτητας. Η απόλυτη τιμή αυτών, $|r_{res}^+|$, $|r_{res}^-|$, αποτελεί ένα μέτρο της αστάθειας του συστήματος. Για πλήρως συμμετρικό πλοίο θα είναι $|r_{res}^+| = |r_{res}^-|$. Γενικώς, οι διάφορες ασυμμετρίες οδηγούν σε ελαφρά διαφορετικές τιμές των $|r_{res}^+|$ και $|r_{res}^-|$. Βλ. και Σχήμα 6b.

Με τη βοήθεια του ελιγμού απλής επαναφοράς του πηδαλίου (pullout test) μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια δύο σημεία της καμπύλης $\delta - r$ ασταθούς πλοίου: τα σημεία ($\delta = 0, r = r_{res}^+$) και ($\delta = 0, r = r_{res}^-$). Τα σημεία αυτά προκύπτουν επίσης και με τη βοήθεια του ευθέος ή του αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού.

iv) Κυκλικός ελιγμός (Circle or turning maneuver)

Ο *κυκλικός ελιγμός* είναι η περισσότερο διαδεδομένη δοκιμή πηδαλιουχίας, η οποία μας δίδει σημαντικά στοιχεία για την ικανότητα στροφής του πλοίου. Διεξάγεται σε ήρεμη θάλασσα, απουσία ανέμου και ρευμάτων. Ο ελιγμός αρχίζει με πλεύση σε ευθεία πορεία με σταθερή ταχύτητα. Κατόπιν, με σταθερή παροχή καυσίμου, εφαρμόζεται μία σταθερή εκτροπή πηδαλίου δ_R , και εξετάζεται η τροχιά του πλοίου από $\psi = 0$ (αρχική κατεύθυνση ευθείας πορείας) έως γωνία στροφής του πλοίου $\psi = 360^\circ$ (ή και περισσότερο). Η δοκιμή επαναλαμβάνεται για διάφορες παροχές καυσίμου και διάφορες τιμές του δ_R . Η τροχιά του πλοίου έχει τη μορφή που δείχνεται στο Σχήμα 7. Στο σχήμα αυτό φαίνονται επίσης τα ακόλουθα μεγέθη:

- *Τακτική διάμετρος* (tactical diameter), η οποία ορίζεται ως η απόσταση του πλοίου από την αρχική (ευθεία) πορεία, όταν αυτό έχει στραφεί κατά 180° ,
- *Προχώρηση* (advance), η οποία ορίζεται ως η απόσταση (κατά την έννοια της αρχικής πορείας) μεταξύ του σημείου εκκίνησης του ελιγμού (θέση όπου έγινε η στροφή του πηδαλίου) και του σημείου στο οποίο η γωνία στροφής του πλοίου είναι 90° .
- *Μετατόπιση* (transfer), η οποία ορίζεται ως η απόσταση του πλοίου από την αρχική (ευθεία) πορεία, όταν αυτό έχει στραφεί κατά 90° .
- *Ακτίνα στροφής* (steady turning radius), η οποία ορίζεται ως η ακτίνα της σταθερής κυκλικής τροχιάς, επί της οποίας (αποδεικνύεται ότι) κινείται το πλοίο, μετά την απόσβεση των μεταβατικών φαινομένων.



Σχήμα 7. Κυκλικός ελιγμός.

Επίσης, μετρώνται και τα ακόλουθα μεγέθη, η τιμή των οποίων παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη φάση της μόνιμης κίνησης επί του κύκλου στροφής:

- Ταχύτητα προώσεως (η οποία μειώνεται κατά τη διάρκεια του ελιγμού),
- Γωνία εκτροπής του πλοίου (drift angle), δηλαδή η γωνία μεταξύ του διαμήκους άξονα του πλοίου και της ολικής ταχύτητάς του,
- Γωνία εγκάρσιας κλίσεως του πλοίου (heel angle).

Ο κυκλικός ελιγμός μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τρεις φάσεις. Η πρώτη φάση αρχίζει τη στιγμή που αρχίζει η εκτροπή του πηδαλίου και περατούται όταν σταθεροποιηθεί το πηδάλιο σε μία γωνία δ_R . Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσεως η πλευρική ταχύτητα v και η γωνιακή ταχύτητα r είναι πρακτικά μηδενικές (δεδομένου ότι δεν έχει μεσολαβήσει αρκετός χρόνος ώστε να αναπτυχθούν). Έτσι, η φάση αυτή μπορεί να μελετηθεί με την βοήθεια των εξισώσεων 9(1), αν θέσουμε $v=0$, $r=0$, και κρατήσουμε μόνο τους αδρανειακούς όρους:

$$\begin{aligned} (m - Y_{\dot{v}})\dot{v} + (m\xi_{G^*} - Y_{\dot{r}})\dot{r} &= Y_{\delta}\delta_R(t), \\ (m\xi_{G^*} - N_{\dot{v}})\dot{v} + (I_{\zeta\zeta} - N_{\dot{r}})\dot{r} &= N_{\delta}\delta_R(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Η ανάπτυξη αυτών των αρχικών επιταχύνσεων \dot{v} και \dot{r} οδηγεί, φυσικά, στην ανάπτυξη και σημαντικών τιμών για τις ταχύτητες v και r .

Η δεύτερη φάση του κυκλικού ελιγμού περιλαμβάνει το μη μόνιμο φαινόμενο, το οποίο βαθμιαίως αποσβέννεται και, τελικά, οδηγούμεθα στη μόνιμη κίνηση, η οποία όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, είναι κύκλος. Κατά τη διάρκεια της δευτέρας φάσεως, το φαινόμενο διέπεται από τις πλήρεις εξισώσεις 9(1). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όσον αφορά τα χαρακτηριστικά πηδαλιουχίας του πλοίου, παρουσιάζει η τρίτη φάση, η οποία περιλαμβάνει τη μόνιμη κίνηση, όπου, δηλαδή, $\dot{v}=0$, $\dot{r}=0$. Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να ληφθούν και πάλι από τις 9(1), θέτοντας $\dot{v}=0$ και $\dot{r}=0$, ή από τις αποσυσζευγμένες εξισώσεις 9(8), θέτοντας $\ddot{v}=0$, $\dot{v}=0$, $\ddot{r}=0$, $\dot{r}=0$ και $\dot{\delta}_R=0$. Ακολουθώντας το δεύτερο δρόμο, βρίσκουμε ότι η μόνιμη πλευρική ταχύτητα v και γωνιακή ταχύτητα r δίδονται από τις σχέσεις

$$v = K_v \delta_R \quad \text{και} \quad r = K_r \delta_R, \quad (5a, \beta)$$

όπου οι σταθερές K και K_v δίδονται από τις σχέσεις 9(9e,f), αντίστοιχα. Η συνολική πλευρική (εγκάρσια) ταχύτητα $v(x)$, στα διάφορα σημεία του άξονα του πλοίου δίδεται, συναρτήσεως των v , r και της θέσης x , από τη σχέση (πρβλ. σχέση 1.5(3)):

$$v(x) = v - xr,$$

όπου το x μετράται ως προς το σωματοπαγές σύστημα επί του πλοίου. Κατά συνέπεια, υπάρχει μια τιμή $x = x_p$, τέτοια ώστε $v_p = v(x_p) = 0$:

$$x_p = \frac{v}{r}. \quad (6)$$

Η θέση $x = x_p$ βρίσκεται συνήθως επί του πλοίου, και μάλιστα κοντά στην πλώρη (μεταξύ πλώρης και 0.20 L πίσω από την πλώρη), και ορίζει εκείνο το σημείο του πλοίου που κινείται ακριβώς κατά την κατεύθυνση του διαμήκους άξονα. Το σημείο αυτό ονομάζεται *pivot point* και έχει την ιδιότητα η κάθετος στο επίπεδο συμμετρίας του πλοίου στο σημείο αυτό να διέρχεται από ένα σταθερό σημείο (γιατί;), το οποίο είναι το κέντρο στροφής του πλοίου. Η ακτίνα στροφής του πλοίου, R , δίδεται από τη σχέση $R = U/r$, όπου U η ταχύτητα προχώρησης. Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την (5β) ανωτέρω και την 9(9ε), βρίσκουμε

$$\frac{R}{L} = \frac{U}{rL} = \frac{1}{\delta_R} \frac{U}{KL} = -\frac{U}{\delta_R L} \frac{Y_v(N_r - m\xi_G U) - N_v(Y_r - mU)}{Y_v N_\delta - N_v Y_\delta}, \quad (7\alpha)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\frac{R}{L} = -\frac{1}{\delta_R} \frac{Y'_v(N'_r - m'\xi'_G) - N'_v(Y'_r - m')}{Y'_v N'_\delta - N'_v Y'_\delta}, \quad (7\beta)$$

όπου τα τονιζόμενα (αδιάστατα) μεγέθη (m' , ξ'_G , Y'_v , κ.λπ.) έχουν αδιαστατικοποιηθεί ως εξής:

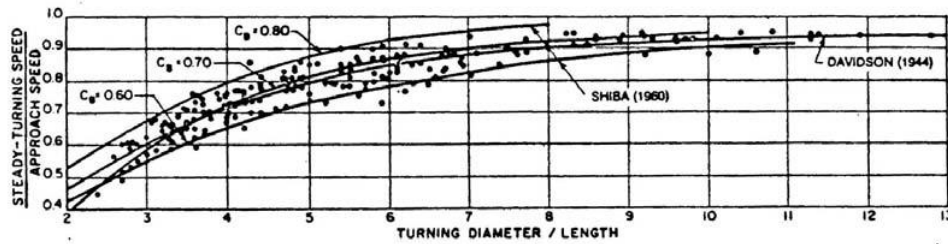
$$\xi'_G = \frac{\xi_G}{L}, \quad m' = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho L^3}, \quad Y'_v = \frac{Y_v}{\frac{1}{2}\rho L^2 U}, \quad Y'_r = \frac{Y_r}{\frac{1}{2}\rho L^3 U},$$

$$N'_v = \frac{N_v}{\frac{1}{2}\rho L^3 U}, \quad N'_r = \frac{N_r}{\frac{1}{2}\rho L^4 U}, \quad Y'_\delta = \frac{Y_\delta}{\frac{1}{2}\rho L^2 U^2}, \quad N'_\delta = \frac{N_\delta}{\frac{1}{2}\rho L^3 U^2}.$$

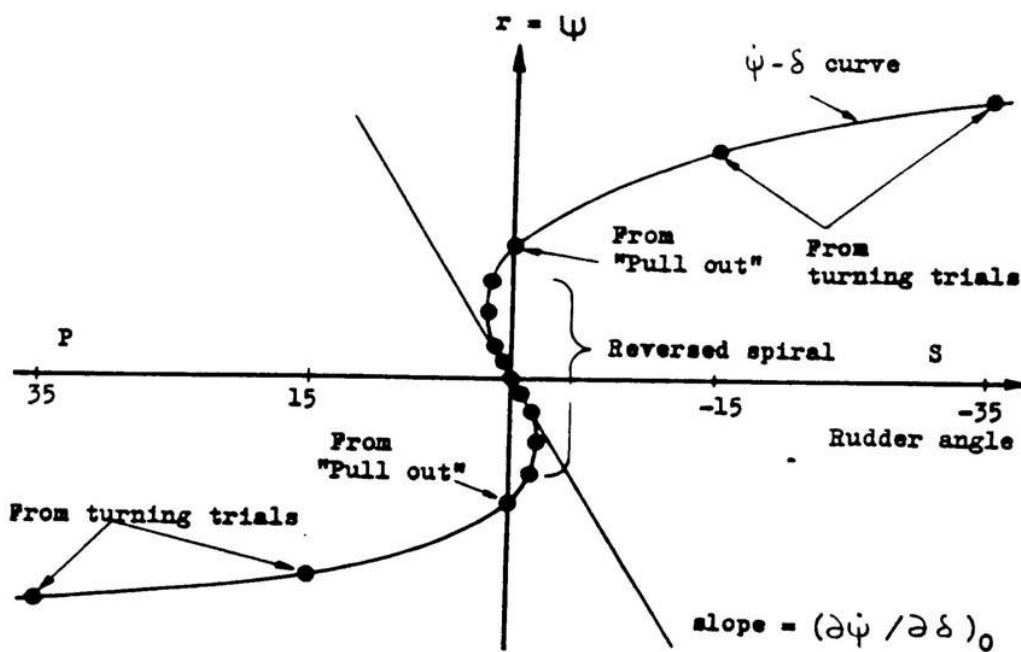
Ο αριθμητής του δεξιά μέλους των σχέσεων (7α,β) δεν είναι άλλος από τον δείκτη (κριτήριο) ευσταθείας του πλοίου C (βλ. σχέση 8(19)), ο οποίος είναι θετικός για ευσταθή πλοία και αρνητικός για ασταθή πλοία. Ο παρονομαστής των σχέσεων (7α,β) είναι πάντοτε θετικός (γιατί;). Προκύπτει έτσι ότι, για ευσταθή πλοία, $R > 0$ (δηλ. το κέντρο στροφής θα βρίσκεται προς τα θετικά του άξονα y) όταν $\delta < 0$, ως αναμένεται.

Η γωνία εκτροπής του πλοίου (drift angle) $\beta = -v/U$ υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια της σχέσης (5α).

Όπως αναφέρθηκε ήδη ανωτέρω, κατά τη διάρκεια του κυκλικού ελιγμού διατηρείται σταθερή η παροχή καυσίμου, όμως η ταχύτητα προχώρησης U μεταβάλλεται (μειούται). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τιμή \tilde{U} της ταχύτητας προχώρησης στην τρίτη φάση του ελιγμού, όταν δηλαδή το πλοίο εκτελεί τον σταθερό κύκλο στροφής ακτίνας R . Όπως είναι αναμενόμενο, η τιμή του λόγου \tilde{U}/U εξαρτάται κυρίως από τον κύκλο στροφής (ακριβέστερα το λόγο R/L , όπου L το μήκος του πλοίου) και τη μορφή της γάστρας (π.χ. του συντελεστή C_B). Στο Σχήμα 8 δίδονται αποτελέσματα για το λόγο \tilde{U}/U συναρτήσει των ποσοτήτων R/L και C_B .



Σχήμα 8. Μείωση της ταχύτητας προχώρησης U , του πλοίου, κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του κύκλου στροφής, συναρτήσει του λόγου R/L και του συντελεστή γάστρας C_B



Σχήμα 9. Διάγραμμα $\delta - r$ με συνδυασμό κυκλικού ελιγμού, ελιγμού απλής επαναφοράς και αντιστρόφου σπειροειδούς ελιγμού

Τα αποτελέσματα του κυκλικού ελιγμού μπορούν να συνδυασθούν με αποτελέσματα των προηγούμενων ελιγμών προκειμένου να ληφθεί το πλήρες διάγραμμα $\delta-r$, το οποίο χαρακτηρίζει την ευστάθεια κατεύθυνσεως και τις ελκτικές ικανότητες του πλοίου. Στο Σχήμα 9 δείχνεται ένα διάγραμμα $\delta-r$ που έχει ληφθεί με συνδυασμό κυκλικού ελιγμού, ελιγμού απλής επαναφοράς και αντίστροφου σπειροειδούς ελιγμού.

ν) Οφιοειδής ελιγμός (Zig-zag maneuver)

Ο οφιοειδής ελιγμός προτάθηκε από τον Kempf το 1944, και αναφέρεται επίσης ως Kempf overshoot ή “Z” maneuver. Είναι πολύ σημαντικός και, ταυτόχρονα, εύκολα πραγματοποιήσιμος ελιγμός. Τα μόνα όργανα που απαιτούνται για την εκτέλεσή του είναι ένα χρονόμετρο και μία γυροσκοπική πυξίδα (gyro compass).

Ο οφιοειδής ελιγμός πραγματοποιείται ως εξής: αφού αποκατασταθεί ευθύγραμμος πλεύση με σταθερή ταχύτητα (σταθερή παροχή καυσίμου), το πηδάλιο τίθεται σε γωνία εκτροπής $\delta = \delta_0$ (π.χ. 20°) δεξιά “όσο πιο γρήγορα και ομαλά γίνεται”. Η θέση αυτή του πηδαλίου διατηρείται σταθερή καθώς το πλοίο αλλάζει κατεύθυνση, μέχρις ότου η γωνία στροφής του πλοίου ψ να λάβει μια προκαθορισμένη τιμή $\psi = \psi_0$. Στη συνέχεια το πηδάλιο τίθεται σε γωνία εκτροπής δ_0 αριστερά, πάλι “όσο πιο γρήγορα και ομαλά γίνεται”, και η θέση αυτή του πηδαλίου διατηρείται σταθερή μέχρις ότου το πλοίο στραφεί κατά γωνία ψ_0 προς την αντίθετη φορά, οπότε και πάλι η εκτροπή του πηδαλίου αντιστρέφεται κατά τον ίδιο τρόπο.

Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται 4 με 5 φορές, οπότε επιτυγχάνεται μία σταθερή περιοδική κίνηση. Η γωνία εκτροπής του πηδαλίου $\delta = \delta(t)$ και η γωνία στροφής του πλοίου $\psi = \psi(t)$ καταγράφονται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Από το περιοδικό τμήμα της κινήσεως μετρούνται τα παρακάτω μεγέθη (βλ. και Σχήμα 10):

- Η γωνία υπερβάσεως (overshoot yaw angle), η οποία ορίζεται ως η γωνία πέραν της δ_0 κατά την οποία συνεχίζει να στρέφεται το πλοίο (παρά την αναστροφή του πηδαλίου), πριν αλλάξει κατεύθυνση (δηλαδή, γωνία υπερβάσεως = $\psi_{\max} - \delta_0$),
- Η περίοδος, η οποία ορίζεται ως ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών στιγμών t_ℓ , $\ell = 1, 2$, στις οποίες ισχύει η σχέση $\psi(t_\ell) = \delta_0 > 0$,
- Ο χρόνος υπερβάσεως (time to overshoot), δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται ώστε η γωνία στροφής του πλοίου $\psi(t)$ να γίνει ίση με τη γωνία εκτροπής του πηδαλίου δ_0 , για πρώτη φορά.

Η δοκιμή επαναλαμβάνεται για διάφορες παροχές καυσίμου και οι τιμές των τριών ανωτέρω παραμέτρων σχεδιάζονται καταλλήλως και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές άλλων πλοίων “επιτυχημένης σχεδιάσεως”.

Ο κλασσικός οφιοειδής ελιγμός διεξάγεται λαμβάνοντας $\psi_0 = \delta_0$. Δηλαδή, η φορά του πηδαλίου αντιστρέφεται τη στιγμή κατά την οποία η γωνία στροφής του πλοίου γίνεται ίση με τη γωνία στροφής του πηδαλίου. Συνήθως λαμβάνεται $\delta_0 = \psi_0 = 20^\circ$ ή

10° , και ο ελιγμός χαρακτηρίζεται με το αντίστοιχο όνομα, π.χ. 20° - 20° zig-zag test. Ο τροποποιημένος οφιοειδής ελιγμός διεξάγεται με $\psi < \delta$, π.χ. 10° - 1° modified zig-zag test. Για ευσταθή πλοία ο οφιοειδής ελιγμός μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια των γραμμικών εξισώσεων πηδαλιουχίας που αναπτύχθηκαν στα εδάφια 6 και 9.

Πολλά πειράματα οφιοειδούς ελιγμού σε πλοία και μοντέλα έχουν γίνει στην Ιαπωνία (από τον Nomoto και άλλους ερευνητές), για τον προσδιορισμό των δεικτών πηδαλιουχίας K και T . Στον πίνακα της επομένης σελίδας (ΠΙΝΑΚΑΣ 10.1) παρουσιάζονται συγκεντρωμένα αποτελέσματα από πειράματα κλασσικού οφιοειδούς ελιγμού που έκανε ο Nomoto σε πραγματικά πλοία.

vi) Ελιγμός σταματήματος (Stopping maneuver)

Η γρήγορη ανάπτυξη του μεγέθους των δεξαμενοπλοίων, δεν ακολουθήθηκε από σημαντική αύξηση της ταχύτητάς τους, γεγονός που κατέληξε στη μείωση της ισχύος ανά τόνο εκτοπίσματος. Επομένως, η διαθέσιμος ισχύς για σταμάτημα δεν ακολούθησε την αύξηση της αδράνειας στα μεγάλα πλοία, με αποτέλεσμα η ικανότητα σταματήματος να μειωθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως, η ικανότητα ενός πλοίου, που τρέχει με μια ορισμένη ταχύτητα U , να ακινητοποιηθεί, είναι ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό του συστήματος πλοίου-μηχανοστασίου, το οποίο ελέγχεται με τη βοήθεια του ελιγμού σταματήματος.

Κατά κανόνα, σε κατάσταση ανάγκης, η καλύτερη λύση για την αποφυγή συγκρούσεως, είναι να στραφεί το πηδάλιο στη μέγιστη γωνία του, εφ' όσον υπάρχει αρκετός διαθέσιμος χώρος. Και τούτο διότι, εκτός από τις μικρές ταχύτητες, η απόσταση που διανύεται κατά την κατεύθυνση της αρχικής πορείας (προχώρηση), όταν εκτελείται μία πλήρης στροφή, είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση που διανύεται αν δοθεί η εντολή “όπισθεν ολοταχώς”. Παρ’ όλα ταύτα, όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα να επιχειρηθεί ο ελιγμός πλήρους στροφής, ο ελιγμός σταματήματος είναι η μοναδική μέθοδος αποφυγής συγκρούσεως.

Κατωτέρω αναφέρονται τα κυριότερα είδη ελιγμού σταματήματος, καθώς και διάφοροι ορισμοί χρήσιμοι για την περαιτέρω ανάπτυξη του θέματος:

- **Φυσικό σταμάτημα:** Η κύρια μηχανή σταματάει, και η έλικα περιστρέφεται ελεύθερα.
- **Συμβατικό σταμάτημα:** Η φορά περιστροφής της έλικας αντιστρέφεται (ή μεταβάλλεται κατάλληλα το βήμα, σε έλικα μεταβλητού βήματος), χωρίς ιδιαίτερη φροντίδα για γρήγορη αναστροφή.
- **Επίγον σταμάτημα (crash stop):** Όλη η διαθέσιμος ισχύς εφαρμόζεται ανάποδα μόλις δοθεί η εντολή “όπισθεν ολοταχώς”.
- **Προχώρηση (head reach):** Η μέγιστη διανυομένη απόσταση στην κατεύθυνση της αρχικής κινήσεως (ταχύτητας).
- **Μήκος τροχιάς (track reach):** Το μήκος της τροχιάς του σκάφους έως ότου ακινητοποιηθεί.

- **Πλάγια μετατόπιση (lateral transfer):** Η μέγιστη απόσταση σε κατεύθυνση κάθετο προς την αρχική κατεύθυνση κινήσεως (αρχική ταχύτητα).
- **Χρόνος σταματήματος (stopping time):** Ο χρόνος που διαρκεί ο ελιγμός από τη στιγμή που δίνεται η εντολή “όπισθεν ολοταχώς” έως ότου ακινητοποιηθεί το σκάφος.
- **Νεκρός χρόνος μεταφοράς (transmission dead time):** Ο χρόνος από τη στιγμή που δίνεται η εντολή μέχρις ότου αρχίσει να εκτελείται.
- **Νεκρός χρόνος εκτελέσεως (execution dead time):** Χρόνος από τη στιγμή που αρχίζει να εκτελείται ο ελιγμός μέχρι τη στιγμή που η ώση γίνεται αρνητική.
- **Ολικός νεκρός χρόνος (total dead time):** Άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Στους ελιγμούς σταματήματος διακρίνουμε τρεις φάσεις:

1η Φάση: Αρχίζει τη στιγμή που θα δίδεται η εντολή “όπισθεν ολοταχώς”, και περατούται όταν η ώση της έλικας μηδενισθεί (οπότε, στη συνέχεια, περνάει σε αρνητικές τιμές). Μπορεί να διαρκέσει (ολικός νεκρός χρόνος) από 0.5 έως 2 λεπτά, αναλόγως της αρχικής ταχύτητας και του τύπου της προώσεως (συνδιασμού κυρίας μηχανής - έλικας).

2η Φάση: Κατά τη διάρκεια της φάσεως αυτής η ώση της έλικας είναι αρνητική. Αν η αρχική ταχύτητα είναι μεγάλη, η υδροδυναμική αντίσταση της γάστρας και η ώση της έλικας είναι της αυτής τάξεως μεγέθους. Ο αριθμός των περιστροφών της έλικας τείνει προς μία σταθερή τιμή, εξαρτωμένη από τη διαθέσιμη ισχύ. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσεως όλα τα μεγέθη μεταβάλλονται σημαντικά και είναι, επίσης, δυνατόν να συμβούν ισχυρές ταλαντώσεις της γάστρας.

3η Φάση: Η ταχύτητα έχει αρχίσει να μειούται και η υδροδυναμική αντίσταση της γάστρας είναι μικρή εν συγκρίσει προς την ώση της έλικας. Η ροπή και η ώση της έλικας μεταβάλλονται ομαλά και λαμβάνουν σχεδόν σταθερή τιμή.

Όταν η αρχική ταχύτητα είναι μικρή, η φάση 2 ελαχιστοποιείται και μόνον οι φάσεις 1 και 3 διακρίνονται. Κατά τις φάσεις 2 και 3 είναι πρακτικά αδύνατος ο έλεγχος μονελίκων σκαφών με ένα πηδάλιο.

Ο ελιγμός σταματήματος μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά με τη βοήθεια της εξίσωσης (πρβλ. εξίσωση 4(5α)):

$$(m - X_{\dot{U}})\dot{U} = T - R \quad (8)$$

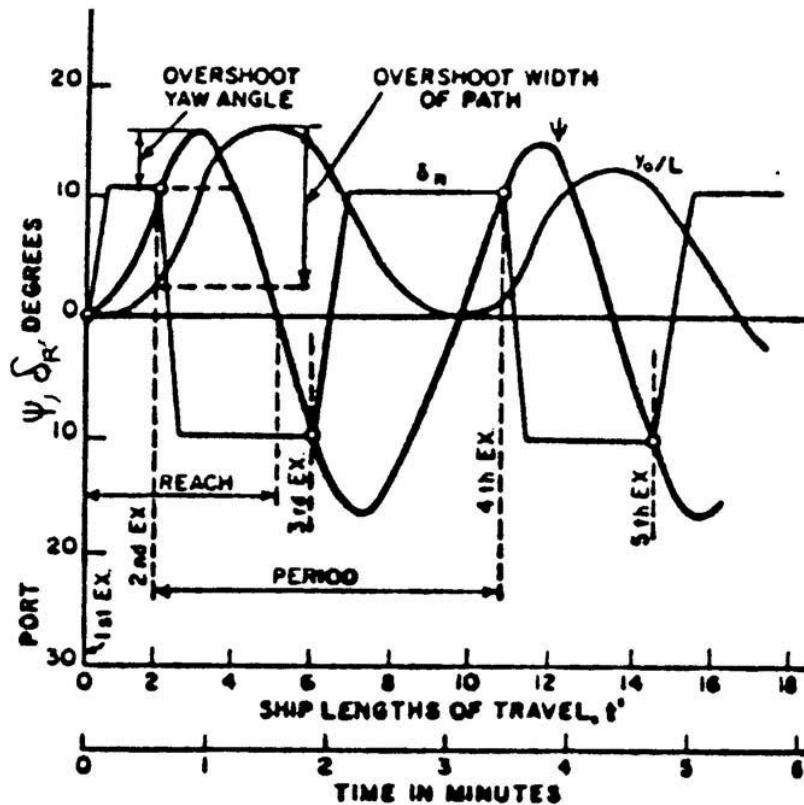
όπου $U = U(t)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα προχώρησης του πλοίου,
 T είναι η προσημασμένη ώση της έλικας (θετική προς τα εμπρός), και
 R είναι η αντίσταση του πλοίου (πάντοτε θετική).

Γενικώς, για ένα συγκεκριμένο συνδυασμό γάστρας-συστήματος προώσεως

$$T = T(w, U, n) \quad \text{και} \quad R = R(U), \quad (9)$$

όπου w ο συντελεστής ομόρρου και $n = n(t)$ οι στροφές της έλικας. Κατά την διάρκεια του ελιγμού η συνάρτηση $n(t)$ εξαρτάται από την παροχή καυσίμου. Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τις ανωτέρω συναρτήσεις, η εξίσωση (8) μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει το χρόνο του ελιγμού σταματήματος και την απόσταση που θα διανύσει το πλοίο στο χρόνο αυτό. Αν γνωρίζουμε μόνο τη ώση της έλικας σε ελεύθερη ροή, τότε αντικαθιστούμε το T , στην εξίσωση (8), από τον όρο $T(1-t)$, όπου t συντελεστής μείωσης ώσεως (thrust deduction coefficient).

Για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων που υπεισέρχονται στην εξίσωση (8) έχουν γίνει πειράματα με διάφορες γάστρες. Υπάρχουν σχετικά διαγράμματα ελίκων που αναφέρονται σε προσημασμένες ταχύτητες ροής και προσημασμένες στροφές περιστροφής. Επίσης, έχουν γίνει πειράματα για τον προσδιορισμό των συντελεστών αλληλεπιδράσεως w και t , σε ανάλογες συνθήκες.



Σχήμα 10. Οφιοειδής ελιγμός

| Type cond. | L × B × D | $\Delta \times d_m$ | trim (%) | V_{kt} | K' | T' | $F/L^2 d_m$ | $A_R/L d_m$ | δ |
|--------------------|-------------------|---------------------|----------|----------|------|------|-------------|-------------|----------|
| Cargo-boat/B* | 114 × 16.4 × 9.3 | 4,180 × 3.27 | 2.3 | 15.7 | 0.76 | 0.49 | 0.096 | 1/30.2 | 15 |
| do. | 152 × 20.6 × 12.7 | 8,828 × 4.02 | 2.1 | 17.2 | 0.74 | 0.64 | 0.093 | 1/36.4 | 15 |
| do. | 150 × 20.5 × 12.9 | 9,140 × 4.89 | 1.5 | 19 | 0.92 | 0.72 | 0.081 | 1/35.2 | 10 |
| Cargo-boat/H* | do.* | 13,840 × 7.05 | 0.5 | 18.5 | 1.00 | 1.22 | 0.085 | 1/46.8 | 10 |
| Cargo-boat/F* | do.* | 19,000 × 9.23 | 0.2 | 18 | 1.25 | 1.55 | 0.089 | 1/61.2 | 10 |
| do. | 157 × 19.6 × 12.5 | 16,000 × 8.25 | 0.4 | 17 | 1.29 | 1.48 | 0.077 | 1/69.4 | 10 |
| do. | 140 × 19 × 10.5 | 16,050 × 8.35 | 0.5 | 15 | 1.70 | 1.93 | 0.096 | 1/59.9 | 10 |
| do. | 133 × 18.6 × 10.4 | 15,160 × 8.10 | 0.8 | 14.5 | 1.69 | 2.77 | 0.103 | 1/65.4 | 10 |
| do. | 112 × 16.2 × 9.0 | 9,980 × 7.42 | 0.8 | 11.5 | 2.25 | 2.53 | 0.105 | 1/64.2 | 10 |
| do. | 86 × 12.5 × 6.5 | 4,493 × 5.66 | 0.3 | 8.5 | 2.07 | 2.06 | 0.106 | 1/64.2 | 10 |
| Oil-tanker/B | 216 × 30.6 × 15.4 | 21,114 × 4.89 | 2.0 | 18 | 0.79 | 0.51 | 0.104 | 1/33.6 | 15 |
| do. | 192 × 26.8 × 13.7 | 13,000 × 4.14 | 2.4 | 16 | 0.87 | 0.42 | 0.083 | 1/29.6 | 10 |
| Oil-tanker/F | 276 × 43.0 × 22.2 | 162,000 × 16.50 | 0 | 16.5 | 3.2 | 6.2 | 0.126 | 1/67.6 | 10 |
| do. | 257 × 38.8 × 19.6 | 120,800 × 14.78 | 0 | 16.5 | 3.2 | 6.0 | 0.121 | 1/70.9 | 10 |
| do. | 242 × 37.2 × 19.9 | 110,204 × 14.60 | 0 | 16 | 10 | 26 | 0.126 | 1/71.6 | 5 |
| do. | do.* | do.* | 0 | 16 | 2.8 | 6.0 | do.* | do.* | 10 |
| do. | 245 × 32.9 × 18.5 | 89,760 × 13.3 | 0 | 17.8 | 1.7 | 3.5 | 0.110 | 1/72.5 | 10 |
| do. | 220 × 31.1 × 16.1 | 67,200 × 11.65 | 0 | 16.5 | -54 | -140 | 0.116 | 1/77 | 5 |
| do. | do.* | do.* | 0 | 16.5 | 4.5 | 13 | do.* | do.* | 10 |
| do. | do.* | do.* | 0 | 16.5 | 2.0 | 4.2 | do.* | do.* | 15 |
| do. | do.* | do.* | 0 | 16.5 | 1.2 | 2.2 | do.* | do.* | 20 |
| do. | 210 × 30.5 × 15.3 | 60,000 × 11.5 | 0 | 17 | 3.0 | 6.1 | 0.115 | 1/74.1 | 10 |
| do. | 185 × 25.2 × 13.4 | 37,695 × 10.3 | 0.2 | 15.5 | 1.7 | 3.0 | 0.104 | 1/75.2 | 10 |
| do. | 154 × 20.0 × 11.5 | 20,583 × 9.02 | 0.2 | 12 | 2.3 | 3.0 | 0.094 | 1/71.9 | 10 |
| Whaler/arrival | 57 × 9.7 × 5.1 | 1,204 × 4.37 | 2.6 | 16.5 | 1.29 | 0.80 | 0.090 | 1/27.7 | 15 |
| Whaler/trial | 57 × 9.7 × 5.1 | 935 × 3.45 | 3.9 | 17.0 | 0.99 | 0.64 | 0.081 | 1/21.8 | 15 |
| Coast-guard cutter | 51.5 × 7.7 × 4.5 | 534 × 2.73 | 0.6 | 13 | 1.66 | 1.62 | 0.072 | 1/40 | 10 |
| Train-ferry/H | 111 × 17.4 × 6.8 | 5,370 × 4.78 | 0.2 | 14.5 | 1.44 | 1.51 | 0.089 | 1/30** | 15 |
| do. | 113 × 15.9 × 6.8 | 4,585 × 4.40 | 0.5 | 15 | 4.5 | 7.3 | 0.079 | 1/42*** | 15 |
| Passenger-boat | 80 × 13.4 × 6.2 | 2,325 × 3.88 | 2.0 | 17 | 0.97 | 1.66 | 0.091 | 1/31.9** | 20 |

* B: ballasted, H: half-loaded and F: full-loaded. do.*: the same ship that the above.

; twin-screw with twin-rudders, *: twin-screw with single rudder and the others single-single.

ΠΙΝΑΚΑΣ 10.1. Δείκτες ποιότητας πηδαλιουχίας (αδιάστατη ικανότητα στροφής $K' = Kl/U$, και αδιάστατος δείκτης ευστάθειας $T' = TU/L$) διαφόρων πλοίων από οριοειδή ελιγμό (Nomoto 1966).

13. Σχεδίαση πηδαλίου

Προκειμένου να επιτευχθεί ελεγχιμότητα των κινήσεων ενός πλοίου είναι απαραίτητη η ύπαρξη επιφανειών ελέγχου, οι οποίες μπορεί να αποτελούνται από μια κινητή επιφάνεια ή από συνδυασμό ακίνητων και κινητών μερών. Το πηδάλιο είναι η πλέον διαδεδομένη επιφάνεια ελέγχου, τουλάχιστον για τα περισσότερα εμπορικά πλοία.

Οι διαστάσεις μιας τυπικής εξ' ολοκλήρου κινητής επιφάνειας ελέγχου (Σχήμα 1)⁽¹⁾ εκφράζονται σε τρεις ορθογώνιες μεταξύ τους διευθύνσεις: διάσταση χορδής c παράλληλη στην κατεύθυνση της κίνησης, διάσταση ανοίγματος b κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης, διάσταση πάχους t κάθετη στην διεύθυνση του ανοίγματος και της χορδής. (Το επίπεδο ανοίγματος-χορδής συμπίπτει με το διάμηκες επίπεδο του πλοίου όταν η γωνία εκτροπής του πηδαλίου είναι μηδενική). Οι βασικές γεωμετρικές παράμετροι είναι:

- μήκος χορδής του άκρου του πηδαλίου που βρίσκεται κοντά στην γάστρα c_R ,
- μήκος χορδής του αντιθέτου άκρου c_T ,
- μέσο μήκος χορδής \bar{c} ,
- μέσο άνοιγμα \bar{b} ,
- γεωμετρικός λόγος επιμήκους $AR = \frac{\bar{b}^2}{S}$,
- μέσο πάχος \bar{t} ,
- λόγος πάχους-χορδής $\frac{\bar{t}}{\bar{c}}$,

προβεβλημένη επιφάνεια στο επίπεδο ανοίγματος-χορδής A_T .

Οι πιο κοινοί τύποι πηδαλίου που συναντώνται είναι οι εξής:

- α) Εξ' ολοκλήρου κινητό πηδάλιο (Σχήμα 2 a,b,c),
- β) Πηδάλιο που εκτός από το κινούμενο περιλαμβάνει και ακίνητο τμήμα, horn rudder (Σχήμα 2 d,e),
- γ) Πηδάλιο με δύο ανεξαρτήτως κινούμενα τμήματα, flap rudder (Σχήμα 2f).

Το πηδάλιο είναι ανωστική επιφάνεια σε κινούμενο ρευστό με μεταβλητή γωνία πρόσπτωσης. Κατά συνέπεια είναι δυνατή η δημιουργία κυκλοφορίας γύρω από το πηδάλιο και η παραγωγή υδροδυναμικής δύναμης και ροπής έπ' αυτού. Στο Σχήμα 3 φαίνεται η ανάλυση σε συνιστώσες της υδροδυναμικής δύναμης που ασκείται στο πηδάλιο όταν αυτό βρίσκεται σε λειτουργία στον ομόρρου του πλοίου και της έλικας. Τα σύμβολα που φαίνονται στο σχήμα είναι:

\vec{F} : ολική δύναμη ασκούμενη επί του πηδαλίου,

$$(\vec{F} = \vec{L} + \vec{D} = \vec{X} + \vec{Y} = \vec{F}_K + \vec{F}_A)$$

L : δύναμη ανώσεως, κάθετη στην διεύθυνση της κίνησης του νερού,

D : δύναμη αντίστασης, παράλληλη στην διεύθυνση της κίνησης του νερού,

Y : δύναμη κάθετη στον διαμήκη άξονα του πλοίου,

⁽¹⁾ Τα σχήματα βρίσκονται στο τέλος του εδαφίου.

X : δύναμη παράλληλη στον διαμήκη άξονα του πλοίου,
 F_K : δύναμη κάθετη στο επίπεδο συμμετρίας του πηδαλίου,
 F_A : δύναμη παράλληλη στο επίπεδο συμμετρίας του πηδαλίου,
 V : ολική ταχύτητα του σημείου Ο του πλοίου,
 V_Γ : ολική ταχύτητα του σημείου Γ του πλοίου,
 β : “γωνία πρόσπτωσης” της ροής στο πλοίο (drift angle),
 β_R : “γωνία πρόσπτωσης” της ροής στην περιοχή του πηδαλίου,
 a : αληθής γωνία πρόσπτωσης της ροής στο πηδάλιο,
 δ_R : γωνία εκτροπής του πηδαλίου,
 d : θέση του άξονα του πηδαλίου,
 CP_c : θέση του σημείου δράσης της υδροδυναμικής δύναμης επί του πηδαλίου.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων ροής του πηδαλίου και της γάστρας τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γωνία πρόσπτωσης της ροής στο πηδάλιο είναι $a = \delta_R - \beta_R$ και η άνωση ασκείται κάθετα στη διεύθυνση της V_Γ , οπότε:

$$Y_\delta \delta_R = \pm (L \cos \beta_R + D \sin \beta_R) = Y_{rudder}, \quad (1)$$

$$N_\delta \delta_R = Y_{rudder} x_R. \quad (2)$$

όπου x_R είναι η απόσταση του σημείου δράσης της δύναμης στο πηδάλιο από την αρχή των αξόνων του σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων στο πλοίο. Σημειώνεται εδώ ότι $L = L(a)$ και $D = D(a)$.

Εξαιτίας της σχετικής θέσης πηδαλίου, γάστρας, έλικας, η υπόθεση της μη αλληλεπίδρασης γάστρας-πηδαλίου-έλικας δεν ευσταθεί.

Η ύπαρξη του οριακού στρώματος της γάστρας έχει ως αποτέλεσμα το νερό γύρω από την πρύμνη του πλοίου να αποκτά μια κίνηση προς τα εμπρός (στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα του πλοίου). Επομένως, σ' αυτή την περιοχή η σχετική ταχύτητα (ως προς παρατηρητή σωματόδετο στο πλοίο) είναι μικρότερη από την ταχύτητα του πλοίου. Ο συντελεστής ομόρρου $w = \frac{V - V_A}{V}$ (V : ταχύτητα πλοίου, V_A : ταχύτητα προχώρησης) είναι αυτός που μετρά την μείωση αυτή της ταχύτητας. Πειραματικές μετρήσεις του συντελεστή αυτού σε διάφορα σημεία δίνουν μια εικόνα του πεδίου ταχύτητας που διαμορφώνεται στην πρύμνη. Τα αποτελέσματα αυτών των μετρήσεων έδειξαν ότι η μορφή του ομόρρου επηρεάζεται κυρίως από την μορφή του πρυμναίου τμήματος του σκάφους.

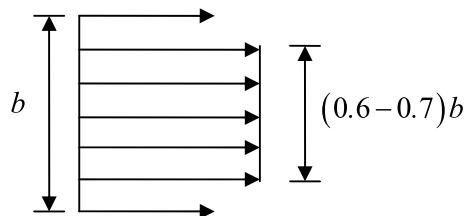
Από πειραματικές μετρήσεις σε σειρά μοντέλων (Harvald, 1983) έχει ληφθεί η ακτινική κατανομή του ομόρρου που φαίνεται στο Σχήμα 4. Όπως είναι φανερό απ' αυτή την κατανομή μπορεί να προκύψει η ακτινική κατανομή της αξονικής ταχύτητας. Τα μεγέθη που εμφανίζονται στα διαγράμματα του Σχήματος 4 είναι:

L : μήκος του μοντέλου,
 B : πλάτος του μοντέλου,

- D : διάμετρος της έλικας,
 R : ακτίνα έλικας,
 r : θέση του σημείου στο οποίο μετράται ο συντελεστής ομόρρου,
 δ : συντελεστής γάστρας.

Οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων (στην κατεύθυνση της ταχύτητας του πλοίου U) στην θέση της γραμμής συμμετρίας για δυο διαφορετικούς τύπους πρύμνης δείχνονται στο Σχήμα 5. Οι τιμές της ταχύτητας που αναγράφονται στο σχήμα είναι ενδεικτικές και έχουν ληφθεί από το PNA (Lewis 1989).

Η παρουσία της έλικας τώρα έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση της ροής στην περιοχή της. Πειράματα σε σήραγγα σπηλαιώσης έδειξαν ότι η περιοχή αυξημένης ταχύτητας ομόρρου είναι περίπου $0.82D$ όπου D είναι η διάμετρος της έλικας (φαινόμενο συστολής του ομόρρου της έλικας). Από εξέταση σειράς εγκαταστημένων συστημάτων πρόωσης/πηδαλιουχίας προκύπτει ότι ο λόγος της διαμέτρου της έλικας προς το άνοιγμα του πηδαλίου βρίσκεται στο διάστημα $0.75-0.85$. Η σχετική θέση τους είναι τέτοια ώστε, ο άξονας της έλικας να βρίσκεται κοντά στο μισό του ανοίγματος του πηδαλίου, ενώ η απόστασή τους κατά το διάμηκες είναι ίση με ποσοστό της ακτίνας της έλικας από 0.30 έως 1.0 . Με βάση τα προηγούμενα η επίδραση της έλικας στο πηδάλιο μπορεί να αναπαρασταθεί προσεγγιστικά από την ακόλουθη κατανομή ταχύτητας:



Ο λόγος της απόλυτης τιμής της ταχύτητας στην κεντρική περιοχή προς την τιμή των άκρων είναι περίπου 1.25 (Lewis 1989, Vol II).

Για να είναι δυνατή η σύγκριση των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται σε πηδάλια όμοια μεταξύ τους αλλά διαφορετικών διαστάσεων, και τα οποία λειτουργούν σε διαφορετικές ταχύτητες, είναι απαραίτητο αυτά τα μεγέθη να υπολογίζονται σε αδιάστατη μορφή. Τα σημαντικότερα αδιάστατα χαρακτηριστικά του πηδαλίου έχουν ως εξής:

$$\text{Συντελεστής άνωσης} \quad C_L = \frac{L}{(\rho/2)A_T U^2}, \quad (3)$$

$$\text{Συντελεστής αντίστασης} \quad C_D = \frac{D}{(\rho/2)A_T U^2}, \quad (4)$$

$$\text{Συντελεστής κάθετης δύναμης} \quad C_N = \frac{F_K}{(\rho/2)A_T U^2} = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha, \quad (5)$$

$$\text{Συντελεστής ροπής γύρω από τον άξονα του πηδαλίου} \quad C_{MH} = \frac{F_K (d - CP_{\bar{c}})}{(\rho/2)A_T U^2 \bar{c}}, \quad (6)$$

Συντελεστής ροπής γύρω από το 1/4 της χορδής
$$C_{M\bar{c}/4} = \frac{F_K (0.25\bar{c} - CP_{\bar{c}})}{(\rho/2)A_T U^2 \bar{c}}. \quad (7)$$

Στο παράρτημα αυτού του εδαφίου αναπτύσσονται εμπειρικοί τρόποι υπολογισμού των προηγούμενων χαρακτηριστικών του πηδαλίου για πρόσω και οπίσθια κίνηση.

Κατά τον σχεδιασμό του πηδαλίου υπάρχουν διάφοροι περιορισμοί που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Οι κυριότεροι απ' αυτούς είναι:

- (α) Γεωμετρικός περιορισμός. Η προβολή της επιφάνειας του πηδαλίου στο διάμηκες επίπεδο δεν πρέπει να ξεπερνά τα όρια που υπαγορεύονται από την μορφή της γάστρας.
- (β) Οικονομικός περιορισμός. Το πηδάλιο, ο άξονας και το μηχανήμα πηδαλιουχίας ως σύνολο, πρέπει να έχουν το μικρότερο δυνατό μέγεθος, βάρος, πολυπλοκότητα και αρχικό κόστος. Η απώλεια ταχύτητας από το όλο σύστημα πηδαλιουχίας πρέπει να είναι η μικρότερη δυνατή.
- (γ) Περιορισμοί απαιτήσεων. Ανεπιθύμητα φαινόμενα όπως επαγόμενες ταλαντώσεις στην γάστρα πρέπει να μένουν σε ανεκτά επίπεδα.

Από υδροδυναμική άποψη, κατά τον σχεδιασμό του πηδαλίου πρέπει να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με τα ακόλουθα:

- A. Τύπος πηδαλίου και θέση
- B. Αριθμός πηδαλίων
- C. Μέγεθος πηδαλίου
- D. Μέγιστη γωνία εκτροπής πηδαλίου
- E. Ρυθμός εκτροπής πηδαλίου
- F. Μορφή υδροτομής πηδαλίου

Στην συνέχεια θα αναλυθούν τα ανωτέρω.

A Τύπος και θέση πηδαλίου

Οι τύποι πηδαλίων που φαίνονται στο Σχήμα 2 έχουν χρησιμοποιηθεί ως μοναδικά ή πολλαπλά πηδάλια σε μονέλικά ή διπλέλικα πλοία. Ο τύπος πηδαλίου με δύο ανεξαρτήτως κινούμενα τμήματα χρησιμοποιείται όταν αρχικά υπάρχει έλλειψη ευστάθειας κατεύθυνσης. Τα κυριότερα μειονεκτήματα του είναι η πολυπλοκότητα, το κόστος και η μη επάρκειά του για όπισθεν κίνηση. Για τα περισσότερα συμβατικά πλοία το εξ' ολοκλήρου κινητό πηδάλιο είναι προτιμότερο. Για τα πλοία εκείνα που είναι ασταθή χωρίς πηδάλιο, η επιφάνεια πηδαλίου η αναγκαία για την επίτευξη ευστάθειας ευθύγραμμης κίνησης μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την επιφάνεια εκείνη που είναι αναγκαία για την επίτευξη αλλαγής πορείας. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο τότε η επιλογή του τύπου πηδαλίου με κινητό και ακίνητο τμήμα παρέχει λύση στο πρόβλημα.

Πειράματα και θεωρητικές αναλύσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για ένα δυναμικά ευσταθές πλοίο, σ' όλες τις ταχύτητες, οι πλευρικές δυνάμεις ελέγχου πρέπει να ασκούνται στην πρύμνη και όχι στην πλώρη. Από φυσική άποψη (βλ. Σχήμα 6) αυτό εξηγείται ως εξής. Μια πλευρική δύναμη ελέγχου στην πρύμνη έχει ως αποτέλεσμα: α) περιστροφή ως προς το μέσο νομέα (ή γενικότερα ως προς την αρχή του σωματόδετου στο πλοίο συστήματος συντεταγμένων) και β) μεταφορά. Όταν αυτές οι κινήσεις συνδυαστούν με την πρόσω κίνηση του πλοίου παράγουν μια γωνία

πρόσπτωσης της ροής στο πλοίο (drift angle) στην ίδια διεύθυνση, πράγμα που οδηγεί στην ανάπτυξη μιας μεγάλης υδροδυναμικής πλευρικής δύναμης και αντίστοιχης περιστροφικής ροπής στο πλοίο οι οποίες προκαλούν το στρίψιμο του πλοίου. Αντίθετα, αν η πλευρική δύναμη ελέγχου ενεργήσει στην πλώρη, οι συνεισφορές στην γωνία πρόσπτωσης της ροής στο πλοίο της περιστροφής και της μεταφοράς είναι σε διαφορετικές διευθύνσεις και ακυρώνουν η μια την άλλη.

Τοποθετώντας το πηδάλιο στην πρύμνη, στην περιοχή του ομόρρου της έλικας, παρατηρείται αύξηση της υδροδυναμικής δύναμης που αναπτύσσεται σ' αυτό. Ο λόγος είναι η διαφοροποίηση της κατανομής της ταχύτητας που φτάνει στο πηδάλιο εξαιτίας του φαινομένου συστολής του ομόρρου που αναφέρθηκε και παραπάνω. Σ' αυτή την περίπτωση το πηδάλιο ανακτά μέρος της περιστροφικής ενέργειας του ομόρρου, η οποία θα έμενε στο νερό. Υπάρχουν όμως και μερικά μειονεκτήματα σ' αυτή την τοποθέτηση. Το ένα είναι η πιθανότητα επαγόμενων ταλαντώσεων στο πλοίο. Για την αποφυγή αυτού του φαινομένου είναι σκόπιμο οι αποστάσεις έλικας-πηδαλίου να είναι περίπου ίσες με μια ακτίνα έλικας. Το δεύτερο μειονέκτημα είναι η πιθανότητα σπηλαιώσεως του πηδαλίου συνήθως σε πλοία υψηλών ταχυτήτων. Σ' αυτή την περίπτωση είναι καλύτερη η επιλογή δυο πηδαλίων.

B Αριθμός πηδαλίων

Η χρήση περισσότερων του ενός πηδαλίων μπορεί να αυξήσει την ελεγχιμότητα. Διπλά πηδάλια χρησιμοποιούνται σε διπλέλικα πλοία και όταν, εξαιτίας του μικρού βυθίσματος, είναι αδύνατη η επίτευξη των ελκτικών απαιτήσεων μ' ένα πηδάλιο.

C Μέγεθος πηδαλίου

Για τον καθορισμό του εμβαδού του πηδαλίου στο επίπεδο ανοίγματος-χορδής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο (Det Norske Veritas, DnV) για την ελάχιστη απαιτούμενη επιφάνεια:

$$A_T = \frac{TL_{BP}}{100} \left[1 + 25 \left(\frac{B}{L_{BP}} \right)^2 \right] \quad (8)$$

όπου

- A_T : εμβαδό της επιφάνειας του πηδαλίου,
- T : βύθισμα,
- L_{BP} : μήκος μεταξύ καθέτων,
- B : πλάτος.

Ο παραπάνω τύπος εφαρμόζεται μόνο σε περιπτώσεις όπου το πηδάλιο βρίσκεται ακριβώς πίσω από την έλικα. Για άλλες περιπτώσεις ο *DnV* προτείνει μια αύξηση στην επιφάνεια του πηδαλίου το λιγότερο 30%. Προκειμένου να ελεγχθεί αν είναι επαρκής η επιφάνεια του πηδαλίου που επιλέχθηκε, εξετάζουμε το πρόσημο των σταθερών $\sigma_{1,2}$, η σημασία των οποίων αναλύθηκε στην παράγραφο 8. Υποθέτοντας ότι ισχύουν οι παραδοχές της παραγράφου 6 οι σταθερές $\sigma_{1,2}$ δίδονται από τον εξής τύπο:

$$\sigma_{1,2} = \frac{-(-n'_z Y'_v - \Delta'_y N'_r) \pm \sqrt{(-n'_z Y'_v - \Delta'_y N'_r)^2 + 4\Delta'_y n'_z [-Y'_v N'_r - (\Delta'_y - Y'_r) N'_v]}}{2\Delta'_y n'_z} \quad (9)$$

όπου

$$\Delta' = \frac{\Delta}{(\rho/2)L^2T},$$

$$n'_z = I'_z - N'_r,$$

$$\Delta'_y = \Delta' - Y'_v.$$

Υπενθυμίζεται ότι οι υδροδυναμικοί συντελεστές που υπεισέρχονται στη σχέση (9) αναφέρονται στο σύστημα πλοίου-πηδαλίου και υπολογίζονται προσεγγιστικά ως αθροίσματα των αντίστοιχων συντελεστών γάστρας και πηδαλίου, μεμονωμένα. Η εξάρτηση των υδροδυναμικών συντελεστών του πηδαλίου από το εμβαδόν A_T έχει αναλυθεί στο εδάφιο 6.

Αν με την αρχικώς επιλεγείσα A_T προκύψει ότι $\sigma_{1,2} < 0$, τότε το κριτήριο της ευστάθειας κατεύθυνσης ικανοποιείται και η επιφάνεια A_T μπορεί να θεωρηθεί επαρκής. Αν κάποια από τις σταθερές $\sigma_{1,2}$ είναι θετική τότε είναι αναγκαία αύξηση της επιφάνειας του πηδαλίου. Συνιστάται να αποφεύγεται αύξηση της επιφάνειας του πηδαλίου πέραν του ορίου 2% της επιφάνειας της διαμήκους τομής της βυθισμένης γάστρας του πλοίου (PNA, Vol III).

Ένα άλλο σημαντικό μέγεθος που πρέπει κατόπιν να επιλεγεί είναι ο λόγος επιμήκους. Η επιλογή της επιφάνειας A_T , έτσι όπως έγινε προηγουμένως, και του ανοίγματος b , που προκύπτει από το όριο των ναυπηγικών γραμμών, οδηγεί σε δεδομένη τιμή για το λόγο επιμήκους.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η αποτελεσματικότητα του πηδαλίου δεν μεγαλώνει σημαντικά όταν αυξάνεται μόνο η χορδή του πηδαλίου. Έχουμε μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα όταν αυξάνεται το άνοιγμα του πηδαλίου. Όταν αυξάνεται η επιφάνεια του πηδαλίου χωρίς να αυξάνεται το άνοιγμα οδηγούμαστε σε μικρές τιμές του λόγου επιμήκους πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7, τη δραστική μείωση του συντελεστή άνωσης, δηλαδή τη μείωση της επαγόμενης δύναμης εξαιτίας της γωνίας εκτροπής του πηδαλίου. Σε ορισμένες περιπτώσεις διπλών πηδαλίων, υπάρχει η ελευθερία να αυξάνεται η επιφάνεια και ο λόγος επιμήκους ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Στο Σχήμα 8 φαίνεται η επίδραση του μεγέθους του πηδαλίου στην διάμετρο του κύκλου στροφής, για διάφορες γωνίες εκτροπής του πηδαλίου, και για μοντέλα με διαφορετικούς συντελεστές γάστρας C_B . Τα μοντέλα ανήκουν στη Σειρά 60. Φαίνεται ότι η καλύτερη συμπεριφορά εμφανίζεται όταν η επιφάνεια πηδαλίου βρίσκεται στο

$$\text{διάστημα: } \frac{1}{50}(LT) < A_T < \frac{1}{40}(LT).$$

D Μέγιστη γωνία εκτροπής

Είναι σημαντικό να διακρίνουμε τουλάχιστον τρεις έννοιες της “μέγιστης” γωνίας εκτροπής του πηδαλίου:

- a) Μέγιστη γωνία σχεδίασεως (design maximum). Η μέγιστη γωνία στην οποία το μηχάνημα πηδαλιουχίας μπορεί να στρέψει το πηδάλιο. Μια τυπική τιμή αυτής είναι περίπου 35° .
- b) Μέγιστη γωνία ελιγμών (maneuver maximum). Η μέγιστη γωνία στην οποία εκτρέπεται το πηδάλιο κατά την διάρκεια των ελιγμών.
- c) Μέγιστη χρήσιμη γωνία (maximum useful). Για την επίτευξη ορισμένων ελιγμών, όπως π.χ. ο κυκλικός ελιγμός υπάρχει μια γωνία εκτροπής, την οποία αν υπερβούμε δεν παρατηρούμε σημαντική βελτίωση των χαρακτηριστικών του ελιγμού.

Αποφάσεις που αφορούν τα a) και b) καθορίζουν το c).

Για πηδάλια που παρουσιάζουν απότομη μείωση της άνωσης μετά από κάποια συγκεκριμένη γωνία (stall angle), η μέγιστη χρήσιμη γωνία εκτροπής είναι αυτή η γωνία. Δεδομένου όμως ότι, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3, η γωνία πρόσπτωσης της ροής είναι μικρότερη από τη γωνία εκτροπής του πηδαλίου η μέγιστη χρήσιμη γωνία εκτροπής μπορεί να αυξηθεί και πέρα από την γωνία απώλειας άνωσης. Σύμφωνα με τον Tarlin (1960) η γωνία πρόσπτωσης της ροής στο πηδάλιο είναι περίπου ίση με τα 5/7 της γωνίας εκτροπής αυτού.

Τέλος για τον καθορισμό της μέγιστης γωνίας σχεδίασεως (αλλά και της μέγιστης χρήσιμης γωνίας) λαμβάνεται υπ' όψιν και η συμπεροφορά του πλοίου σε κυκλικό ελιγμό. Στο Σχήμα 9 φαίνονται πειραματικές μετρήσεις της γωνίας πρόσπτωσης της ροής στο πηδάλιο σαν συνάρτηση της γωνίας εκτροπής του πηδαλίου και της αδιάστατης διαμέτρου του κύκλου στροφής. Οι μετρήσεις πάρθηκαν από πειράματα με μοντέλα μονέλικων εμπορικών πλοίων.

Ε Ρυθμός εκτροπής πηδαλίου

Ενώ τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά του κυκλικού ελιγμού είναι εκείνα που οδηγούν στην επιλογή μέγιστης σχεδιαστικής γωνίας εκτροπής του πηδαλίου, στην επιλογή του ρυθμού εκτροπής οδηγούμαστε από τα ζητούμενα χαρακτηριστικά άλλων ελιγμών (zig-zag, χρόνος για συγκεκριμένη αλλαγή κατεύθυνσης, κτλ.).

Ο συνηθέστερος ρυθμός εκτροπής του πηδαλίου είναι, σύμφωνα με τους κανονισμούς των Νηογνομώνων, $2 \frac{1}{3}$ deg/sec (ανεξάρτητος από τις παραμέτρους του πλοίου). Πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι δεν υπάρχουν σημαντικές βελτιώσεις όταν ο ρυθμός εκτροπής είναι μεγαλύτερος από 2 deg/sec. Εξάλλου αυξάνοντας το ρυθμό εκτροπής, αυξάνεται η δύναμη και η ροπή που απαιτούνται για την περιστροφή του πηδαλίου, και οι οποίες αναπτύσσονται από το μηχανισμό πηδαλιουχίας.

Διαστατική ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ρυθμός εκτροπής είναι άμεσα συνδεδεμένος με το μέγεθος και την ταχύτητα του πλοίου. Αν ένας ρυθμός εκτροπής είναι αποδεκτός για κάποια δεδομένη σχεδίαση, τότε ο ρυθμός εκτροπής για όμοια πλοία διαφορετικού μεγέθους και ταχύτητας μπορεί να καθορισθεί ως εξής:

$$\dot{\delta}_{RA} \frac{L_A}{V_A} = \dot{\delta}_{RB} \frac{L_B}{V_B}, \quad (10)$$

όπου

- δ_R : ρυθμός εκτροπής,
 L : μήκος πλοίου,
 V : ταχύτητα πλοίου,
 A, B : διαφορετικά πλοία.

F Μορφή υδροτομής πηδαλίου

Συστηματικά πειράματα έχουν δείξει ότι συμμετρικές υδροτομές πηδαλίου τύπου συμμετρικών αεροτομών NACA έχουν την καλύτερη συμπεριφορά (Nomoto 1966). Για κατασκευαστικούς λόγους το χείλος εκφυγής του πηδαλίου πρέπει να έχει σημαντικό πάχος. Σε κάθε περίπτωση όμως, ο λόγος πάχος χορδής/μήκος χορδής δεν πρέπει να ξεπερνά το 0.25 για να αποφεύγονται φαινόμενα αποκόλλησης της ροής.

Οι υδροτομές (αεροτομές) NACA 0018 έως 0025 χρησιμοποιούνται συνηθέστερα διότι παρουσιάζουν υδροδυναμικά πλεονεκτήματα, όπως:

- μεγαλύτερη γωνία απώλειας άνωσης (stall angle),
- σχετικά σταθερή θέση του κέντρου πίεσης,
- σχετικά μικρή αύξηση της αντίστασης με το πάχος.

Ενδεικτικά διαγράμματα για τα αδιάστατα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά της υδροτομής (αεροτομής) NACA 0018 δίδονται στο παράρτημα του εδαφίου 6.

Χαρακτηριστικά ελιγμών πλοίου με δεδομένο πηδάλιο

Ύστερα από τον καθορισμό των βασικών γεωμετρικών παραμέτρων του πηδαλίου είναι σκόπιμο να ελέγχεται (το πηδάλιο) ως προς την συμπεριφορά του σε συγκεκριμένους ελιγμούς. Οι εμπειρικές εκφράσεις που ακολουθούν δίνουν μια πρώτη προσέγγιση για τα χαρακτηριστικά του κυκλικού ελιγμού (διάμετρος κύκλου στροφής (STD), τακτική διάμετρος (TD), προχώρηση (AD), μεταφορά (TR), και λόγος μείωσης ταχύτητας) (PNA, Vol III, 1989).

α) Μονέλικα πλοία

$$\frac{STD}{L} = 4.19 - \frac{203c_B}{\delta_R} + 47.4 \frac{Trim}{L} - \frac{13.0B}{L} + \frac{194}{\delta_R} - 35.8 \frac{SpCh}{LT} (ST - 1) + 3.82 \frac{SpCh}{LT} (ST - 2) + 7.79 \frac{A_B}{LT} + 0.70 \left(\frac{T}{T_L} - 1 \right) \left(\frac{\delta_R}{|\delta_R|} \right) (ST - 1) \quad (11)$$

$$\frac{TD}{L} = 0.910 \frac{STD}{L} + 0.424 \frac{V_A}{\sqrt{L}} + 0.675 \quad (12)$$

$$\frac{AD}{L} = 0.519 \frac{TD}{L} + 1.33 \quad (13)$$

$$\frac{TR}{L} = 0.497 \frac{TD}{L} - 0.065 \quad (14)$$

$$\frac{V_T}{V_A} = 0.074 \frac{TD}{L} + 0.149 \quad (15)$$

β) Διπλέλικο πλοία

$$\frac{STD}{L} = 0.727 - 197 \frac{c_B}{|\delta_R|} + 4.65 \frac{B}{L} + 41.0 \frac{Trim}{L} + 188 \frac{1}{|\delta_R|} - 218 \frac{SpCh}{LT} (NR - 1) + 3.20 \frac{V_A}{\sqrt{L}} + 25.56 \frac{A_B}{LT} \quad (16)$$

$$\frac{TD}{L} = 0.140 + 1.00 \frac{STD}{L} \quad (17)$$

$$\frac{AD}{L} = 1.100 + 0.514 \frac{TD}{L} \quad (18)$$

$$\frac{TR}{L} = -0.357 + 0.531 \frac{TD}{L} \quad (19)$$

$$\frac{V_T}{V_A} = 0.543 + 0.028 \frac{TD}{L} \quad (20)$$

Τα μεγέθη που εμφανίζονται είναι τα:

- ST*: τύπος πρύμνης (ST=1 για κλειστή πρύμνη, ST=2 για πρύμνη άβακος)
NR: αριθμός πηδαλίων
L: μήκος μεταξύ καθέτων,ft
c_B: συντελεστής γάστρας
δ_R: γωνία πηδαλίου, μοίρες (αρνητική αν είναι προς τα δεξιά)
B: πλάτος
A_B: βυθισμένη πρωραία επιφάνεια η οποία θεωρείται θετική αν εκτείνεται και πέραν της πρωραίας καθέτου
T: βύθισμα ελιγμού
T_L: σχεδιαστικό έμφορτο βύθισμα
V_A: ταχύτητα προχώρησης,knots
V_T: ταχύτητα κατά την στροφή,knots
Sp: άνοιγμα πηδαλίου
Ch: χορδή πηδαλίου
STD: μόνιμη διάμετρος του κύκλου στροφής
TD: τακτική διάμετρος
AD: προχώρηση για στροφή 90 μοιρών
TR: μεταφορά για στροφή 90 μοιρών
V_T / V_A: λόγος μείωσης ταχύτητας κατά την στροφή

Παράρτημα εδαφίου 13

Οι Whicker και Felhner το 1958 έχοντας υπολογίσει πειραματικά τα αδιάστατα χαρακτηριστικά διαφόρων μορφών πηδαλίων κατέληξαν στους ακόλουθους ημι-εμπειρικούς τύπους υπολογισμού των $C_L, C_D, C_{mc/4}, CP_{\bar{c}}, CP_{\bar{s}}$.

Συντελεστής άνωσης, C_L

$$C_L = \left(\frac{\partial C_L}{\partial a} \right)_{a=0} a + \frac{C_{DC}}{AR} \left(\frac{a}{57,3} \right)^2 \quad (21)$$

Όπου

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial a} \right)_{a=0} = \frac{0.9(2\pi)AR}{57.3 \left[\cos \Lambda \sqrt{\left(\frac{AR^2}{\cos^4 \Lambda} + 4 \right)} + 1.8 \right]} \quad (22)$$

$\left(\frac{\partial C_L}{\partial a} \right)_{a=0}$: η κλίση της καμπύλης του συντελεστή άνωσης συναρτήσει της γωνίας

πρόσπτωσης a , για $a=0$,

AR : λόγος επιμήκους,

Λ : η γωνία που σχηματίζει η ευθεία του 1/4 της χορδής με τον άξονα του πηδαλίου,

a : γωνία πρόσπτωσης της ροής σε μοίρες,

C_{DC} : συντελεστής αντίστασης εξαιτίας της ροής στα άκρα ο οποίος εξαρτάται από το σχήμα των άκρων και το λόγο c_T / c_R .

Τιμές αυτού του συντελεστή λαμβάνονται από το Σχήμα 10 που ακολουθεί.

Συντελεστής αντίστασης, C_D .

$$C_D = C_{do} + \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (23)$$

όπου

C_{do} : ελάχιστος συντελεστής αντίστασης διατομής, $C_{do} = 0.0065$ για NACA 0015

Συντελεστής ροπής γύρω από το 1/4 της χορδής

$$C_{mc/4} = \left[0.25 - \left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L} \right)_{C_L=0} \right] \left(\frac{\partial C_L}{\partial a} \right)_{a=0} a - \left[\frac{1}{2} \frac{C_{DC}}{AR} \left(\frac{a}{57.3} \right)^2 \right],$$

(24)

όπου

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L} \right)_{C_L=0} = \frac{1}{2} - \frac{1.11 \left[(AR^2 + 4)^{1/2} \right] + 2}{4(AR + 2)}. \quad (25)$$

Απόσταση κέντρου πίεσης από το χείλος πρόσπτωσης

$$CP_{\bar{c}} = \left(0.25 - \frac{C_{mc/4}}{C_N} \right) \bar{c}, \quad (26)$$

όπου

$$C_N = C_L \cos a + C_D \sin a. \quad (27)$$

Απόσταση κέντρου πίεσης από την ρίζα του πηδαλίου

$$CP_{\bar{s}} = \left(\frac{4}{3\pi} \right) \bar{b}. \quad (28)$$

Είναι φανερό εξαιτίας της μορφής των νομέων του πηδαλίου σε όπισθεν πορεία ότι οι προηγούμενες σχέσεις δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα σ' αυτή την περίπτωση. Εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η φόρμουλα του Joessel που βασίζεται σε πειραματικά αποτελέσματα που έγιναν με επίπεδο ορθογώνιο έλασμα. Ισχύουν τα εξής:

$$Q = 0.811 A_T u^2 w \sin a,$$

$$\frac{x}{w} = (0.195 + 0.305 \sin a),$$

όπου

Q : ροπή πηδαλίου με σημείο αναφοράς το σημείο πρόσπτωσης(lb*ft),

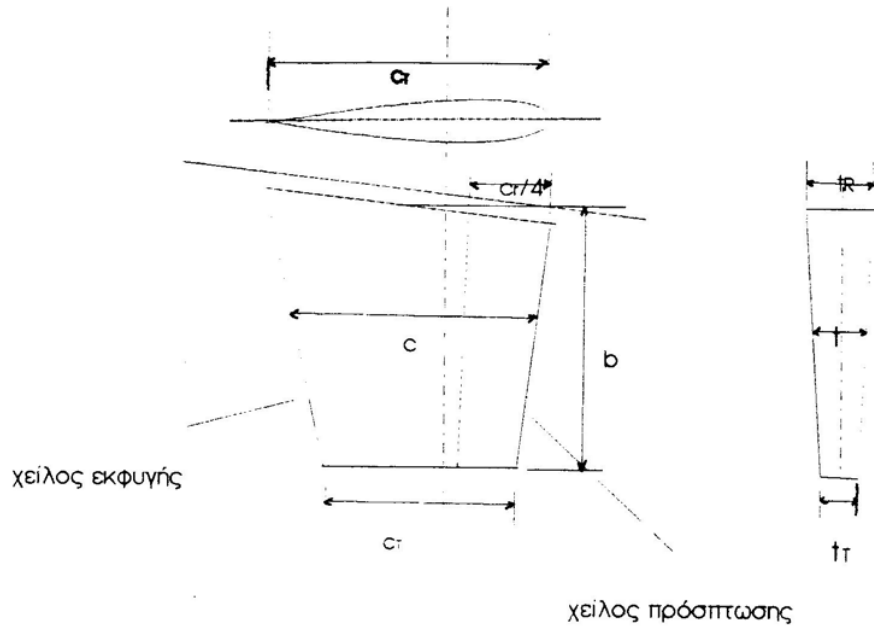
A_T : επιφάνεια πηδαλίου(ft*ft),

u : ταχύτητα πλοίου(fps),

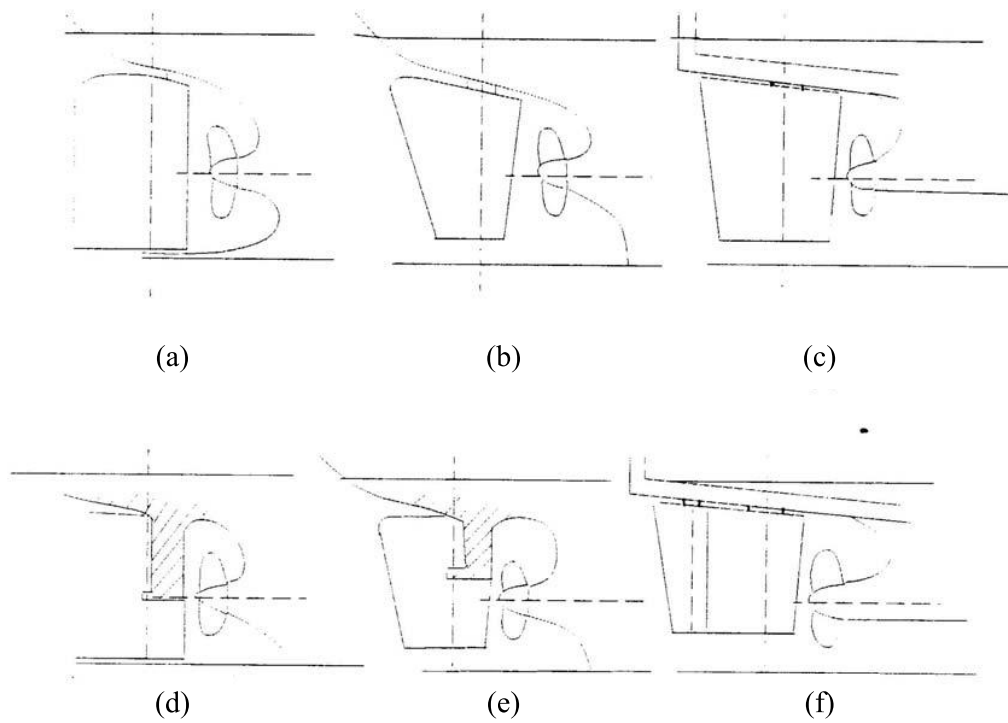
w : άνοιγμα πηδαλίου(ft),

a : γωνία πρόσπτωσης(deg),

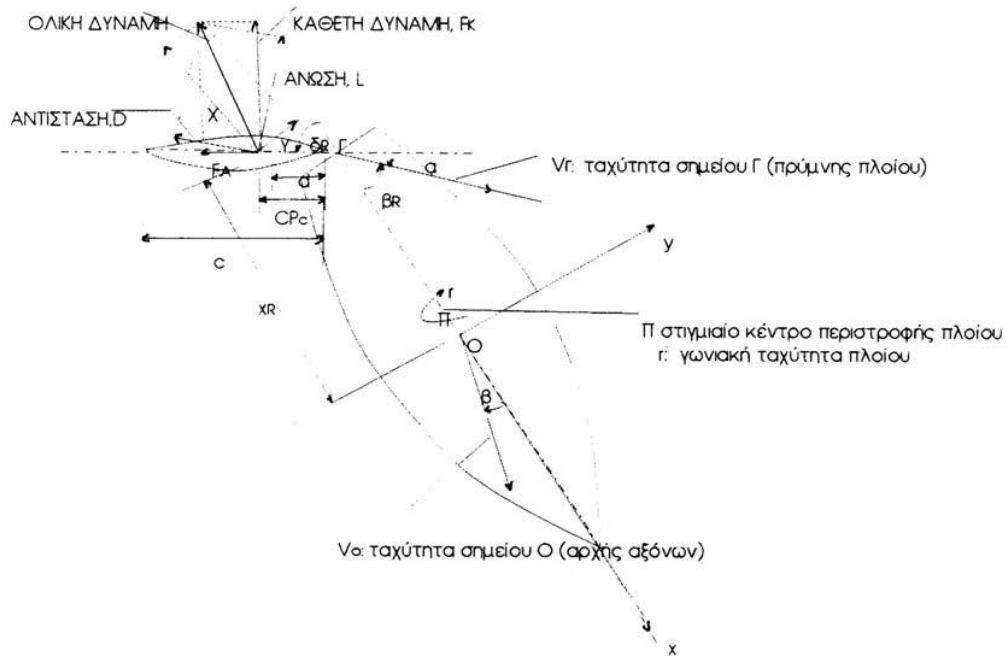
x : απόσταση του κέντρου πίεσης από το σημείο πρόσπτωσης(ft).



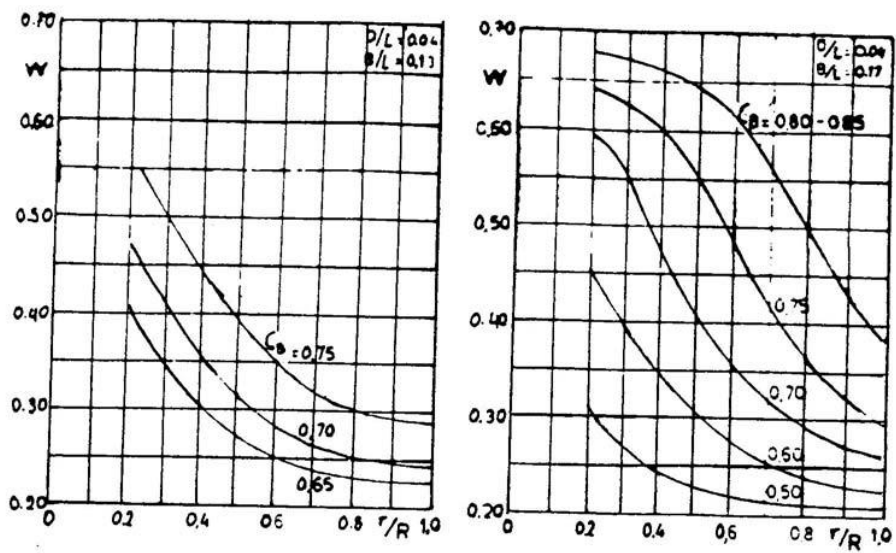
Σχήμα 1. Διαστάσεις μιας τυπικής επιφάνειας ελέγχου



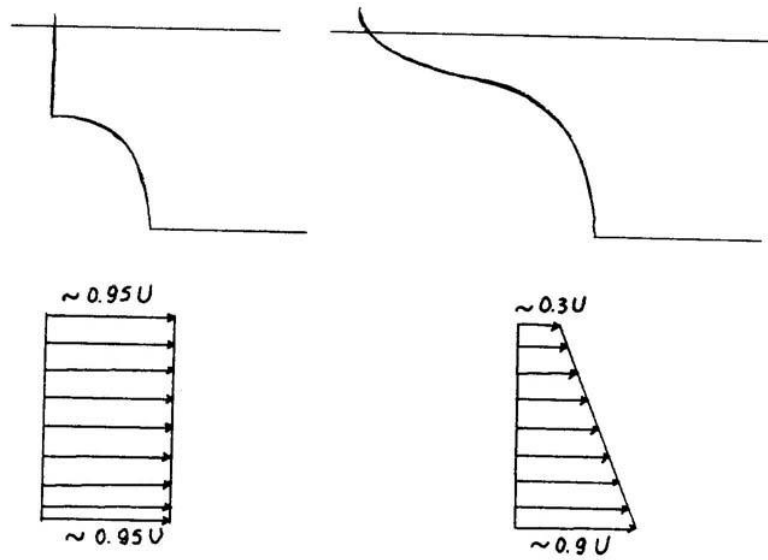
Σχήμα 2. Διάφοροι τύποι πηδαλίων



Σχήμα 3. Συνιστώσες της υδροδυναμικής δύναμης επί πηδαλιού



Σχήμα 4. Ακτινική κατανομή του ομόρρου σε μονέλικο μοντέλο πλοίου

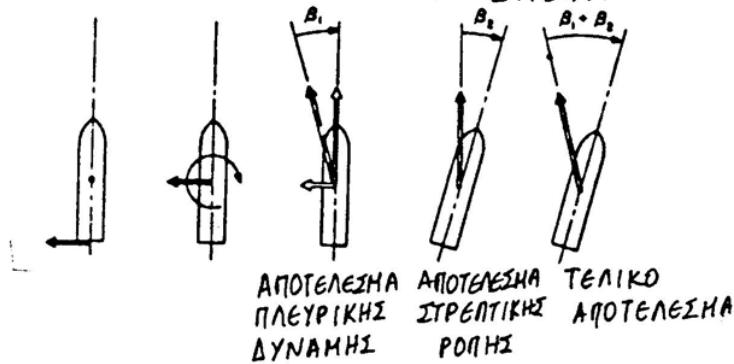


α) πρύμνη ανοικτού τύπου

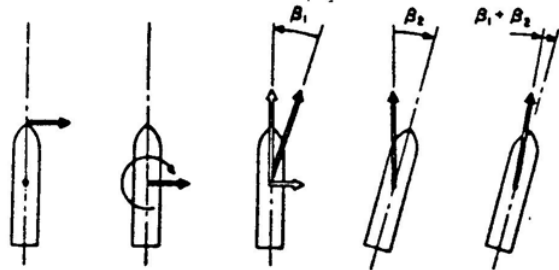
β) πρύμνη παραδοσιακού τύπου

Σχήμα 5. Κατανομή της αξονικής ταχύτητας ομόρρου στο επίπεδο συμμετρίας του πλοίου

ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΠΡΩΜΗ
 ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ
 Κ' ΣΤΡΕΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ

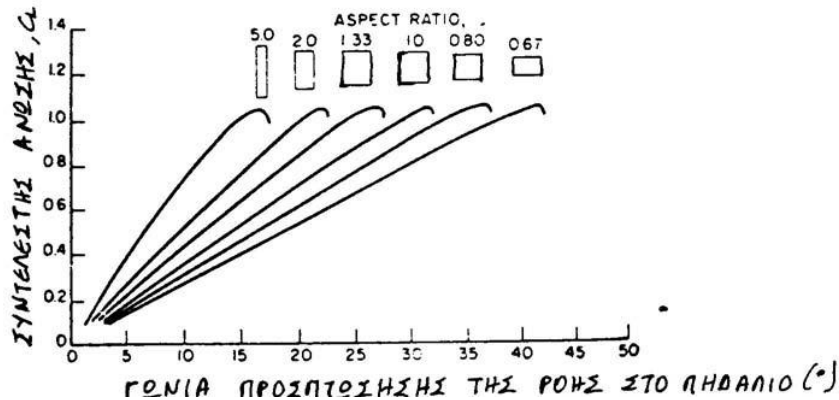


ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΠΛΩΡΗ..
 ΑΦΑΙΡΕΤΙΚΗ ΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ
 Κ' ΣΤΡΕΠΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ

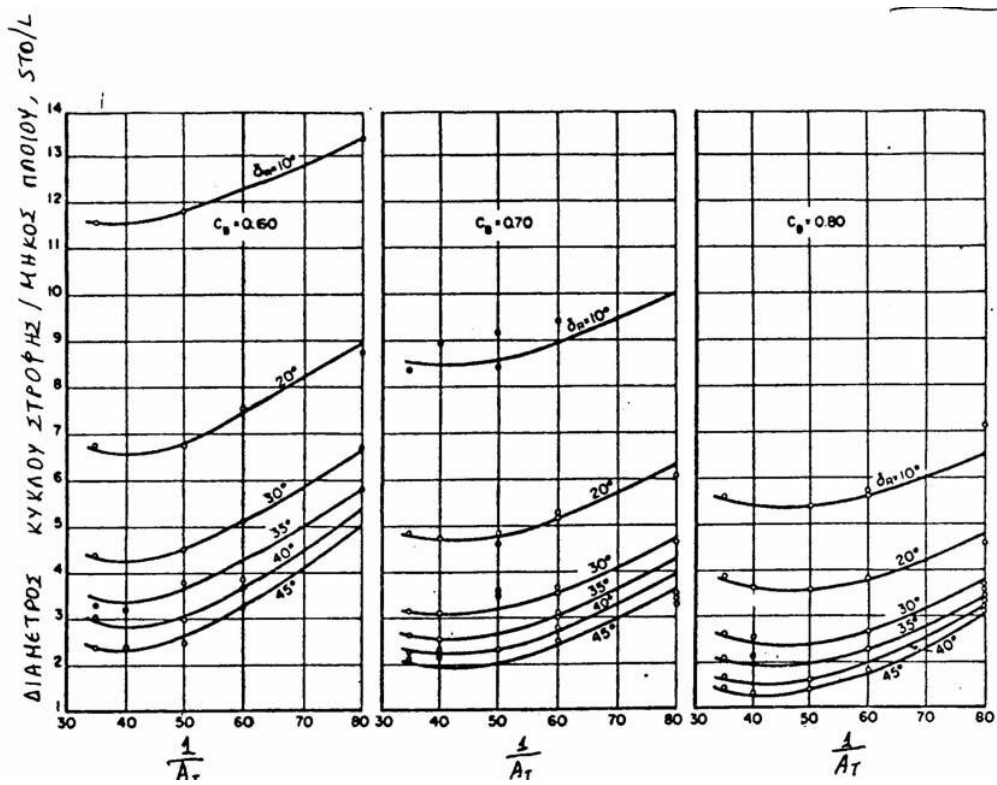


ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ
 ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΡΟΠΗ
 ΣΥΝΙΣΤΟΣΙΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ
 ΟΛΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
 Β ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΣΤΟ ΠΛΩΙΟ (DRIFT ANGLE)

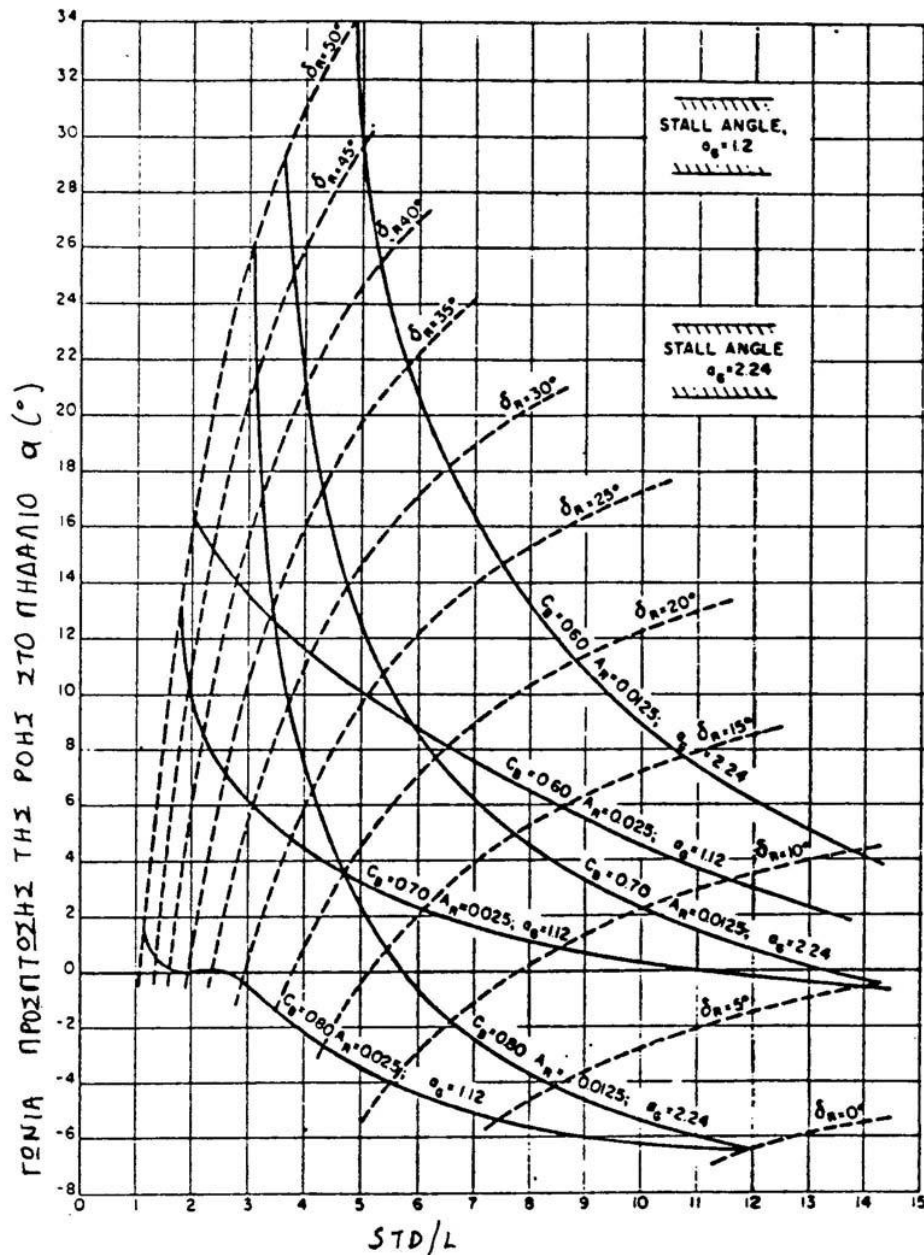
Σχήμα 6. Επίδραση της θέσης της στρεπτικής δύναμης



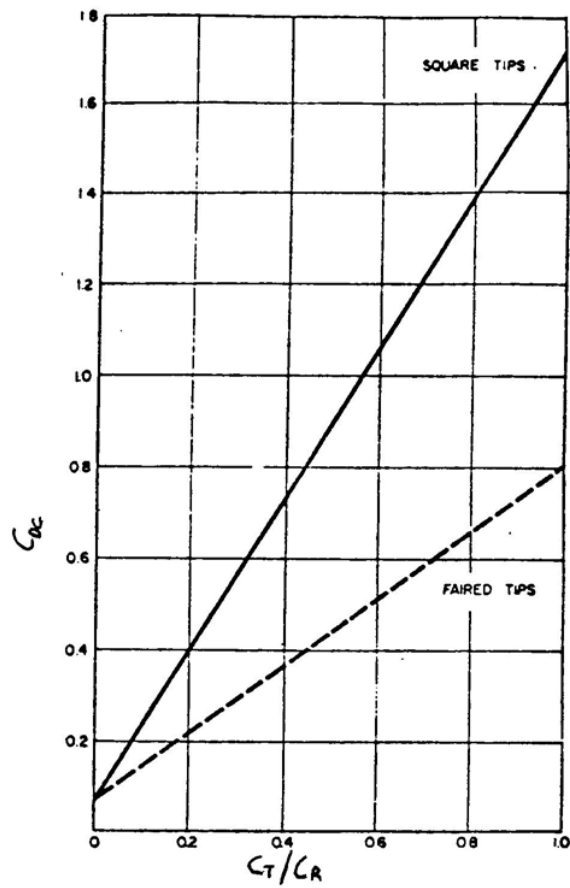
Σχήμα 7. Επίδραση του λόγου επιμήκους στον συντελεστή άνοσης



Σχήμα 8. Επίδραση της επιφάνειας και της γωνίας εκτροπής του πηδαλίου στην διάμετρο του κύκλου στροφής



Σχήμα 9. Σχέση της γωνίας πρόσπτωσης της ροής στο πηδάλιο και της γωνίας εκτροπής αυτού για συγκεκριμένη συμπεριφορά κατά τον κυκλικό ελιγμό (Πειραματικά αποτελέσματα, Lewis 1989)



Σχήμα 10. Επίδραση του σχήματος των άκρων και του λόγου c_T/c_R στον συντελεστή αντίστασης C_{DC}

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Abkowitz, M.A. (1969), *Stability and Motion Control of Ocean Vehicles*, MIT Press, Boston, Mass.
2. Bishop, R.E.D. and Parkinson, A.G. (1970), On the Planar Motion Mechanism Used in Ship Model Testing, *Phil. Trans. R. Soc. (A)*, 266,35-61.
3. Bishop, R.E.D., Burcher, R.K., Parkinson, A.G. and Price, W.G. (1974), Oscillatory Testing for the Assessment of Ship Manoeuvrability, *10th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Boston, Mass.
4. Clarke, D. and Gelding, P. (1982), The Application of Manoeuvring Criteria in Hull Design Using Linear Theory, *The Royal Institution of Naval Architects*.
5. Crane, C.L. and Landsburg, A.C. (1989), Controllability, *Principles of Naval Architecture*, Vol. III.
6. Fedyayevskiy, K.K. and Sobolev, G.V. (1964), *Control and Stability in Ship Design*, Joint Publication Research Service, Washington, D.C.
7. Harvald, S.A. (1983), *Resistance and Propulsion of Ships*.
8. Jacobs, W.R. (1966), Estimation of Stability Derivatives and Indices of Various Ship Forms, and Comparison With Experimental Results, *Journal of Ship Research*.
9. Lewis, E.V. (1989), *Principles of Naval Architecture*, Vol.II.
10. Landrini, M. and Campana, E.F. (1996), Steady Waves and Forces About a Yawing Flat Plate, *Journal of Ship Research*, Vol. 40, pp 179-192
11. Nomoto, K. (1966), Response Analysis of Manoeuvrability and its Application to Ship Design, Chapter 2 of *Researches on the Manoeuvrability of Ships in Japan*, pp 17-59 of Vol. 11 of the 60th Anniversary Series of the Society of Naval Architects of Japan, Tokyo.
12. Ogawa, A. and Kasai, H. (1978), On the Mathematical Model of Manoeuvring Motion of Ships.