



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ
ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΡΟΗ ΙΙΙ: ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
**ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΘΑΛΑΣΣΙΟ
ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ**

υπό

Γ.Α. ΑΘΑΝΑΣΟΥΛΗ, Καθηγητή ΕΜΠ
Κ.Α. ΜΠΕΛΙΜΠΑΣΑΚΗ, Καθηγητή ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2019

ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΘΑΛΑΣΣΙΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Κεφάλαιο 1:** Κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο και παράκτιο περιβάλλον (Φαινομενολογία)
- Κεφάλαιο 2:** Εισαγωγή στην φυσική της κυματικής κίνησης.
- Κεφάλαιο 3:** Γενικές αρχές της κυματικής και εφαρμογές αυτών
- Κεφάλαιο 4:** Βασικές εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών
- Κεφάλαιο 5:** Επιφανειακά υδάτινα κύματα σε υγρό σταθερού βάθους
- Κεφάλαιο 6:** Επιφανειακοί κυματισμοί βαρύτητας και ακουστικά κύματα. Λύσεις των κυματικών εξισώσεων σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα
- Κεφάλαιο 7:** Ανομοιογενείς κυματοδηγοί με μεταβαλλόμενα σύνορα. Κυματοδότηση στο θαλάσσιο περιβάλλον

**Κυματικά Φαινόμενα στο θαλάσσιο και παράκτιο περιβάλλον
(φαινομενολογία)**

- 1.1 Γενικά
- 1.2 Ανεμογενείς κυματισμοί. Κυματισμοί ανέμου και αποθάλασσεσ
- 1.3 Το παράκτιο περιβάλλον
- 1.4 Ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον
- 1.5 Διεγείροντα αίτια ήχου και θορύβου στη θάλασσα
- 1.6 Ακουστικές παράμετροι θαλασσίου περιβάλλοντος
 - 1.6.1 Κατακόρυφη κατανομή της θερμοκρασίας στη θάλασσα
 - 1.6.2 Αλατότητα του θαλασσινού νερού
 - 1.6.3 Ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα
 - 1.6.4 Φυσικά σύνορα του θαλάσσιου κυματοδηγού
 - 1.6.5 Γεωμετρική εξασθένηση της ακουστικής ενέργειας
 - 1.6.6 Απορρόφηση της ηχητικής ενέργειας από το θαλασσινό νερό

1.1 Γενικά

Στο θαλάσσιο περιβάλλον εξελίσσεται ταυτόχρονα ένα πλήθος κυματικών φαινομένων, αρκετά από τα οποία βρίσκονται σε ουσιώδη σύζευξη μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό αν λάβουμε υπ' όψη μας ότι:

- i) Το θαλασσινό νερό είναι ένα ελαφρά συμπιεστό, ανομοιογενές και αγώγιμο υγρό, το οποίο εδράζεται πάνω σ' ένα πολυστρωματοποιημένο (multilayered) παραμορφώσιμο στερεό πυθμένα (sea bed), και περατούται σε μία ελεύθερη επιφάνεια (free surface), δια της οποίας δέχεται την ηλιακή ακτινοβολία και την επίδραση του υπερκείμενου πεδίου του ανέμου, και
- ii) Η μάζα του θαλασσιου νερού βρίσκεται πάνω σε μία ελαφρά μαγνητισμένη, περιστρεφόμενη, περίπου σφαιρική μάζα (Γη), η οποία αλληλεπιδρά μέσω δυνάμεων βαρύτητας με άλλα ουράνια σώματα (κυρίως με τη Σελήνη και τον Ήλιο).

Χρησιμοποιώντας φαινομενολογικά κριτήρια, μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες κύριες κατηγορίες κυματικών φαινομένων στη θάλασσα¹ (βλ. σχετικά Phillips 1977, LeBlond and Mysak 1978):

- Επιφανειακά κύματα (surface waves)
- Εσωτερικά κύματα (internal waves)
- Γυροσκοπικά κύματα (inertial or gyroscopic waves)
- Πλανητικά κύματα (planetary or Rossby waves)
- Παλίρροιες (tides)
- Ακουστικά κύματα, που διαδίδονται στο εσωτερικό της υδάτινης μάζας (hydroacoustic waves) και είναι συζευγμένα με ακουστικά και ελαστικά κύματα που διαδίδονται στα υποστρώματα του πυθμένα.

Μία γενική εικόνα όλων των ανωτέρω φαινομένων δίνεται μέσω *του γενικού φάσματος των θαλάσσιων κυματισμών*, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1².

Όπως διακρίνουμε από το σχήμα αυτό οι *επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί* αφ' ενός μόν καταλαμβάνουν πολύ σημαντικό τμήμα του φάσματος θαλασσιών κυματισμών από σκοπιάς ενεργειακής πυκνότητας, αφ' ετέρου δε αντιστοιχούν σε περιόδους πολύ σχετικές με την πλειονότητα των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων στο θαλάσσιο και στο παράκτιο περιβάλλον. Εξετάζοντας αναλυτικότερα τους επιφανειακούς θαλάσσιους κυματισμούς, διακρίνουμε τις εξής κύριες κατηγορίες, ανάλογα με το αίτιο δημιουργίας τους:

- *Ανεμογενείς κυματισμοί*, δηλαδή κύματα ανέμου (wind waves), και αποθάλασσοι, (swell), οι οποίοι καταλαμβάνουν ένα μεγάλο τμήμα του φάσματος, που αντιστοιχεί σε περιόδους από $T=1$ sec έως $T=20$ sec έως $T=25$ sec, περίπου.
- Κύματα παραγόμενα από *κινήσεις επιπλεόντων ή βυθισμένων αντικειμένων* (body generated waves), τα οποία, γενικώς, αντιστοιχούν στις ίδιες περιόδους με τους ανεμογενείς κυματισμούς.
- *Κυματωγή* (surf beat) και *κύματα ιδιοταλαντώσεων λιμανιών και υφαλοκρηπίδας* (harbour resonance, seiche, shelf waves) που αντιστοιχούν σε περιόδους από $T=1$ min έως $T=40$ min, περίπου.
- *Σεισμογενείς κυματισμοί* (σεισμικά κύματα, tsunamis), οι οποίοι καταλαμβάνουν μεγάλο τμήμα του φάσματος που αντιστοιχεί σε περιόδους από $T=5$ min έως $T=2$ h, περίπου.

Εκτός των ανωτέρω, προς την πλευρά των πολύ μικρών περιόδων (μεγάλων συχνοτήτων) του φάσματος των επιφανειακών θαλασσιών κυματισμών διακρίνουμε τα

¹ Η διάκριση αυτή είναι αρκετά σχηματική και δεν περιλαμβάνει όλα τα φαινόμενα

² Όλα τα σχήματα παρατίθενται στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου

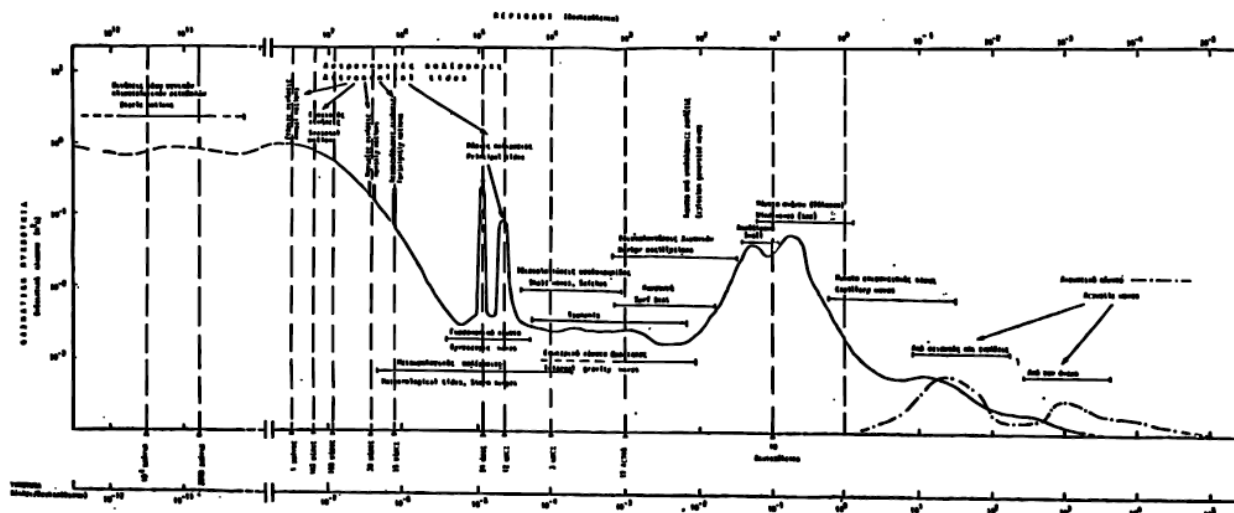
- *Κύματα επιφανειακής τάσης* (capillary waves), τα οποία καταλαμβάνουν το τμήμα του φάσματος που αντιστοιχεί σε περιόδους από $T=0.05$ sec έως $T=1$ sec, περίπου. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1, η ενέργεια πυκνότητα των κυμάτων επιφανειακής τάσεως είναι πολύ μικρή συγκριτικά με την πυκνότητα ενέργειας που μεταφέρουν οι ανεμογενείς κυματισμοί.

Από την ανωτέρω παρουσίαση καθίσταται φανερό ότι οι *ανεμογενείς θαλάσσιοι κυματισμοί* αποτελούν ένα από τα κυριότερα αίτια δυναμικής διέγερσης και φόρτισης των πλοίων και των θαλάσσιων κατασκευών εν γένει³. Πέραν αυτού όμως, οι ανεμογενείς κυματισμοί, διαδίδοντας μεγάλα ποσά ενέργειας (και, δευτερευόντως, μάζας) από την ανοικτή θάλασσα (όπου δημιουργούνται) προς τις ακτές, αποτελούν ένα πολύ σημαντικό παράγοντα που επιδρά στην διαμόρφωση των ακτών, στην ισορροπία του οικοσυστήματος στην παράκτια ζώνη, στην ρύπανση των ακτών κλπ. Επομένως, η μελέτη των μηχανισμών διάδοσης των κυματισμών αυτών και η εξέταση της αλληλεπίδρασης τους με το παράκτιο περιβάλλον αποτελεί θέμα ζωτικής σημασίας από οικονομική και κοινωνική άποψη.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ανεμογενείς θαλάσσιοι κυματισμοί (βλ. κατωτέρω Εδαφ. 1.1), και ιδιαίτερα τα κύματα ανέμου, λόγω της φύσεως του διεγείροντος αιτίου, χαρακτηρίζονται από έντονη έλλειψη κανονικότητας, χωρικά και χρονικά. Δηλαδή, η μορφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, το πεδίο ταχυτήτων και πιέσεων και τα λοιπά φυσικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το κυματικό πεδίο έχουν μη κανονικές μορφές. Η τοποθέτηση (διατύπωση), μελέτη και κατανόηση των σχετικών φυσικών φαινομένων απαιτεί την χρήση πιθανοθεωρητικών (στοχαστικών) μεθόδων. (Μεγάλο μέρος του μαθήματος 'Στοχαστική μοντελοποίηση και πρόβλεψη θαλασσιών συστημάτων' ασχολείται ακριβώς με τα θέματα αυτά). Σε ότι αφορά όμως τη βασική φυσική της διάδοσης των κυματισμών αυτών, μακριά από την περιοχή διέγερσης, οι *δυνάμεις βαρύτητας* έχουν τον κύριο ρόλο. Επιπροσθέτως, με την βοήθεια της *ανάλυσης Fourier*, οι σύνθετες κυματομορφές των κυματισμών ανέμου μπορούν να αναλυθούν σε υπέρθεση αρμονικών μορφών, κάθε μία από τις οποίες παρουσιάζει χωρική και χρονική κανονικότητα⁴. Κατά συνέπεια, η αιτιοκρατική (ντετερμινιστική) εξέταση της διάδοσης των θαλασσιών κυματισμών στα πλαίσια της θεωρίας των *επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας* (surface gravity waves) αποτελεί θεμελιώδες γνωστικό υπόβαθρο. Ως εκ τούτου, στο παρόν εισαγωγικό μάθημα θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της διάδοσης *επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας* από την ανοικτή θάλασσα προς την παράκτια ζώνη και της διαμόρφωσης του κυματικού πεδίου λόγω των επιδράσεων του πυθμένα, οι οποίες, όπως θα δούμε στην συνέχεια, είναι σημαντικότερες στο ρηχό νερό. Συνεχίζοντας, όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 1, την περιοχή των πολύ μικρών περιόδων του φάσματος θαλασσιών κυματισμών, η οποία αντιστοιχεί σε συχνότητες από 1Hz έως μερικές εκατοντάδες KHz, περίπου, καταλαμβάνουν τα *ακουστικά κύματα*. Τα ακουστικά κύματα είναι κύματα πίεσης που διαδίδονται στο εσωτερικό της θαλάσσιας μάζας. Σε αντίθεση με τους επιφανειακούς και ιδιαίτερα τους ανεμογενείς κυματισμούς, οι οποίοι μεταφέρουν κατά την διάδοσή τους σημαντικά ποσά ενέργειας (και, δευτερευόντως, μάζας), *τα ακουστικά κύματα μεταφέρουν ελάχιστη ενέργεια*, και ως εκ τούτου η επίδρασή τους στις κατασκευές και στο παράκτιο περιβάλλον είναι αμελητέα. Από την άλλη πλευρά όμως, τα ακουστικά κύματα έχουν την ιδιότητα να διαδίδονται σε μεγάλα βάθη, να διαπερνούν τον θαλάσσιο πυθμένα, και να διαδίδονται σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις στο θαλασσινό νερό, σε αντίθεση με τα ηλεκτομαγνητικά κύματα τα οποία αποσβένονται ταχύτατα. Κατ'αυτήν την έννοια, τα ακουστικά κύματα στη θάλασσα αναλαμβάνουν το ρόλο που έχουν τα ηλεκτομαγνητικά κύματα στην ατμόσφαιρα. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η *μεταφορά πληροφορίας* (επικοινωνία) στην θάλασσα, καθώς και η *διερεύνηση του θαλασσιού και υποθαλασσιού περιβάλλοντος*.

³ Άλλα αίτια δυναμικής φόρτισης των θαλάσσιων κατασκευών είναι ο άνεμος, τα θαλάσσια ρεύματα, και, ειδικά για τις σταθερές θαλάσσιες κατασκευές, οι σεισμοί.

⁴ Σημειώνεται ότι με την υπέρθεση αρμονικών που παρουσιάζουν τυχαία (random) διαφορά φάσης, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και τους πραγματικούς (μη-κανονικούς) θαλάσσιους κυματισμούς (irregular sea waves).



Σχήμα 1: Το γενικό φάσμα των θαλάσσιων κυματισμών

Το παρόν μάθημα αποσκοπεί στο να δώσει το θεμελιώδες μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται για την μελέτη των φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με την διάδοση των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας και των ακουστικών κυμάτων στο θαλάσσιο και παράκτιο περιβάλλον. Εκ πρώτης απόψεως τα δύο αυτά θέματα φαίνεται να έχουν μικρή συγγένεια μεταξύ τους. Οι επιφανειακοί κυματισμοί χαρακτηρίζονται από υψηλή πυκνότητα ενέργειας (*κύματα ενέργειας*), ενώ τα ακουστικά κύματα μεταφέρουν υψηλή πυκνότητα πληροφορίας (*κύματα πληροφορίας*). Από την άλλη πλευρά όμως, οι μαθηματικές μέθοδοι και τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί για την μοντελοποίηση και τη μελέτη των αντιστοίχων φαινομένων είναι (τουλάχιστον για την περίπτωση των γραμμικών κυματισμών) παρόμοιες, αν όχι ταυτόσημες. Αυτό μας επιτρέπει την ενιαία παρουσίαση και μελέτη των σχετικών μαθηματικών προβλημάτων.

Ένα επιπλέον κοινό χαρακτηριστικό των επιφανειακών κυματισμών και των ακουστικών κυμάτων στην θάλασσα, ιδιαίτερα σε περιοχές μικρού και ενδιάμεσου βάθους νερού, είναι το φαινόμενο της *κυματοδήγησης*. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μέσο διάδοσης (θαλασσινό νερό) περιορίζεται από δύο φυσικά σύνορα, την ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα, με αποτέλεσμα (και στις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις) το κυματικό φαινόμενο να εξελίσσεται κυρίως κατά την οριζόντια διάσταση, και, ως εκ τούτου, να διαδίδεται σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις.

1.2 Ανεμογενείς κυματισμοί. Κυματισμοί ανέμου και αποθάλασες

Οι ανεμογενείς κυματισμοί που παρατηρούνται σε μια συγκεκριμένη περιοχή, διακρίνονται σε

- *κυματισμούς ανέμου* (wind waves) ή *θάλασσες* (seas), οι οποίοι αντιστοιχούν σε περιόδους από $T=0.5$ sec έως $T=15$ sec, περίπου,

και σε

- *αποθάλασες* ή φουσκοθαλασσιές (swells), οι οποίοι αντιστοιχούν σε περιόδους από $T=10$ sec έως $T=30$ sec, περίπου.

Οι κυματισμοί ανέμου διεγείρονται απ' ευθείας από το υπερκείμενο τυρβώδες πεδίο ροής του ανέμου, ενώ οι αποθάλασες είναι το αποτέλεσμα της διάδοσης των πρώτων, που έχουν όμως παραχθεί από τη δράση του ανέμου σε άλλες περιοχές.

Στην περίπτωση των θαλασσών, οι κυματισμοί είναι έντονα “ανακατεμένοι” (confused), διαδίδονται προς διάφορες κατευθύνσεις (short-crested) (αν υπάρχει κύρια κατεύθυνση αυτή γενικά μεταβάλλεται χρονικά και χωρικά), ο λόγος ύψους προς μήκος κύματος είναι σχετικά μεγάλος και συχνά συμβαίνει θραύση των κυματισμών και εμφάνιση αφρού (whitecaps and spray). Ακόμη, η ροή στο νερό, κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, είναι ισχυρά στροβιλή λόγω της επίδρασης των διατμητικών τάσεων του τυρβώδους πεδίου του υπερκείμενου ανέμου.

Αντίθετα, στην περίπτωση των αποθαλασσών, οι κυματισμοί είναι περισσότερο ομαλοί και λείοι, έχουν σαφή κύρια κατεύθυνση διάδοσης (long-crested), και είναι περισσότερο επιμήκεις (μικρότερος λόγος ύψους προς μήκος κύματος). Ακόμη, εάν οι κυματισμοί δεν βρίσκονται κάτω από την επίδραση άλλου τοπικού πεδίου ανέμου ή άλλου αιτίου διέγερσης τύρβης, η ροή στο νερό μπορεί να θεωρηθεί μη τυρβώδης και αστρόβιλη, και συνήθως δεν συμβαίνει θραύση των κυματισμών. Ας σημειωθεί ότι, σε μια συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή, μπορεί να έχουμε είτε μόνο (τοπικούς) κυματισμούς ανέμου, είτε μόνο αποθάλασσες (αν δεν φυσά άνεμος), είτε ταυτόχρονη παρουσία κυματισμών ανέμου και αποθαλασσών. Επίσης, είναι δυνατόν να συνυπάρχουν περισσότερα από ένα συστήματα αποθαλασσών.

Σχετικά με το στάδιο ανάπτυξής τους οι ανεμογενείς κυματισμοί διακρίνονται σε *αναπτυσσόμενους* (developing seas/waves), *πλήρως ανεπτυγμένους* (fully developed or fully arisen seas) και *αποσβενδόμενους* (decaying seas). Προφανώς οι αποθάλασσες είναι αποσβενδόμενοι κυματισμοί που έχουν απομακρυνθεί από τον τόπο της δημιουργίας τους.

Η *φάση της γέννησης και ανάπτυξης* των κυματισμών ανέμου (generation of wind waves) είναι ένα εξαιρετικά περίπλοκο φυσικό φαινόμενο το οποίο δεν έχει κατανοηθεί πλήρως προς το παρόν. Στη διάρκεια αυτής της φάσης, μέσω των διατμηματικών και των ορθών τάσεων που εξασκεί το τυρβώδες πεδίο του ανέμου πάνω στην επιφάνεια του νερού, μεταφέρεται ορμή και ενέργεια από τον άνεμο στο νερό. Η έρευνα για την κατανόηση των φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με τη γέννηση και την ανάπτυξη των κυματισμών ανέμου άρχισε στις αρχές του αιώνα και συνεχίζεται μέχρι σήμερα με αυξανόμενη ένταση. Οι πρώτες εργασίες (Jeffreys 1925, Stanton 1937, Eckart 1953 και άλλες) παρουσιάζονται και σχολιάζονται στη συνθετική εργασία του Ursell (Ursell 1956). Το κύριο συμπέρασμα για το επίπεδο ανάπτυξης (state-of-the-art) μέχρι τότε μπορεί να διατυπωθεί πολύ συνοπτικά: “nothing very satisfying”. Το επόμενο έτος (1957) εμφανίστηκαν τα δύο πρώτα σημαντικά μοντέλα από τους Phillips και Miles. Ο πρώτος μελέτησε την επίδραση των ορθών τάσεων του πεδίου του ανέμου στο νερό και διατύπωσε το μοντέλο του συντονισμού (resonance model, Phillips 1957, 1958), και ο δεύτερος μελέτησε την επίδραση των διατμηματικών τάσεων του πεδίου του ανέμου στο νερό (μοντέλο της διατμηματικής ροής, (shear-flow model) Miles 1957, 1959, 1962). Μία πρώτη προσπάθεια συνδιασμού των δύο μοντέλων (combined model) έγινε από τον Miles (1960). Το επίπεδο ανάπτυξης μετά από τις εργασίες αυτές σχολιάζεται από το Lighthill (1962) και παρουσιάζεται με αρκετές λεπτομέρειες από τον Kinsman (1965). Μεταγενέστερες επισκοπήσεις δίνονται από τους Phillips (1967), Kitaigorodskii (1970), Barnett and Kenyon (1975), LeBlond and Mysak (1978), Blennerhassett (1980). Η σύγχρονη έρευνα σχετικά με τους μηχανισμούς γέννησης των κυμάτων από τον άνεμο περιλαμβάνει, εκτός από την θεωρητική μοντελοποίηση, και συστηματικές μετρήσεις, κυρίως σε εργαστηριακή κλίμακα, οι οποίες επιτρέπουν την εκτίμηση της σχετικής βαρύτητας (σημασίας) των διαφόρων παραγόντων που υπεισέρχονται στο φαινόμενο. Βλ. σχετικά Hsu et al. (1981, 1982, 1983), Papadimitrakis et al. (1986).

Στη *φάση της πλήρους ανάπτυξης* (saturation range) των κυματισμών ανέμου, η οποία σπάνια συμβαίνει στη φύση και μόνο “μερικώς” (Wiegel, 1964, p. 222), υπάρχει ενεργειακή ισορροπία (energy balance) ανάμεσα στο πεδίο του ανέμου και στο κυματικό πεδίο, με συνέπεια η ειδική ενέργεια του κυματικού πεδίου (ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας) να μην αυξάνεται περαιτέρω. Το φυσικό φαινόμενο της αλληλεπίδρασης ανέμου-θάλασσας είναι σημαντικά απλούστερο στην

περίπτωση των πλήρως ανεπτυγμένων κυματισμών (σε σχέση με την περίπτωση των αναπτυσσόμενων κυματισμών), και έχει μελετηθεί εκτενώς από πολλούς ερευνητές, μεταξύ των οποίων αναφέρουμε τους Neumann (1952), Phillips (1958, 1977, 1985), Kitaigorodskii (1962, 1970), Kitaigorodskii et al. (1975), Komen et al. (1984).

Καθώς οι κυματισμοί ανέμου απομακρύνονται από την περιοχή δημιουργίας τους μεταπίπτουν σε αποθάλασσες και αρχίζει η **φάση της αποσβεσης** τους. Στη διαμόρφωση και απόσβεση των αποθαλασσών συμβάλλουν: το φαινόμενο διασποράς (dispersion), που οφείλεται στην επίδραση της ελεύθερης επιφάνειας, η γεωμετρική διασπορά της ενέργειας λόγω της διδιάστατης διάδοσης (geometric spreading), η βαθμιαία κατανάλωση της ενέργειας από τις συνεκτικές τάσεις (viscous dissipation), και, ειδικά στις ρηχές θάλασσες, η απόσβεση λόγω της επίδρασης του πυθμένα. Στις βαθιές θαλάσσιες περιοχές, οι αποθάλασσες διαδίδονται κατά μήκος των μέγιστων κύκλων της Υδρόγειας Σφαίρας, και μπορεί να διασχίσουν τεράστιες αποστάσεις πριν αποσβεθούν σημαντικά. Οι Munk et al. (1963) ανίχνευσαν στις ακτές της Καλιφόρνιας αποθάλασσα που οφείλονταν σε καταιγίδα στην περιοχή της Μαδαγασκάρης. (Ο σχετικός μέγιστος κύκλος περνάει νότια από την Αυστραλία και τη Νέα Ζηλανδία). Αντίστοιχα αποτελέσματα έχουν επίσης δημοσιευθεί από τους Barber and Ursell (1948). Στο **Σχήμα 2** δίνεται η μέση περίοδος και το σημαντικό ύψος κύματος μιας αποθάλασσας συναρτήσει της απόστασης από την εστία διέγερσης των κυματισμών (decay distance) (Myers et al. 1969). Μια άλλη ιδιότητα των αποθαλασσών είναι ότι δεν επηρεάζονται σημαντικά από τους τοπικούς ανέμους των περιοχών από όπου περνούν (Snodgrass et al. 1966). Το γεγονός αυτό οφείλεται στη διαφορετική φασματική σύσταση των κυματισμών ανέμου και των αποθαλασσών.

1.3 Το παράκτιο περιβάλλον

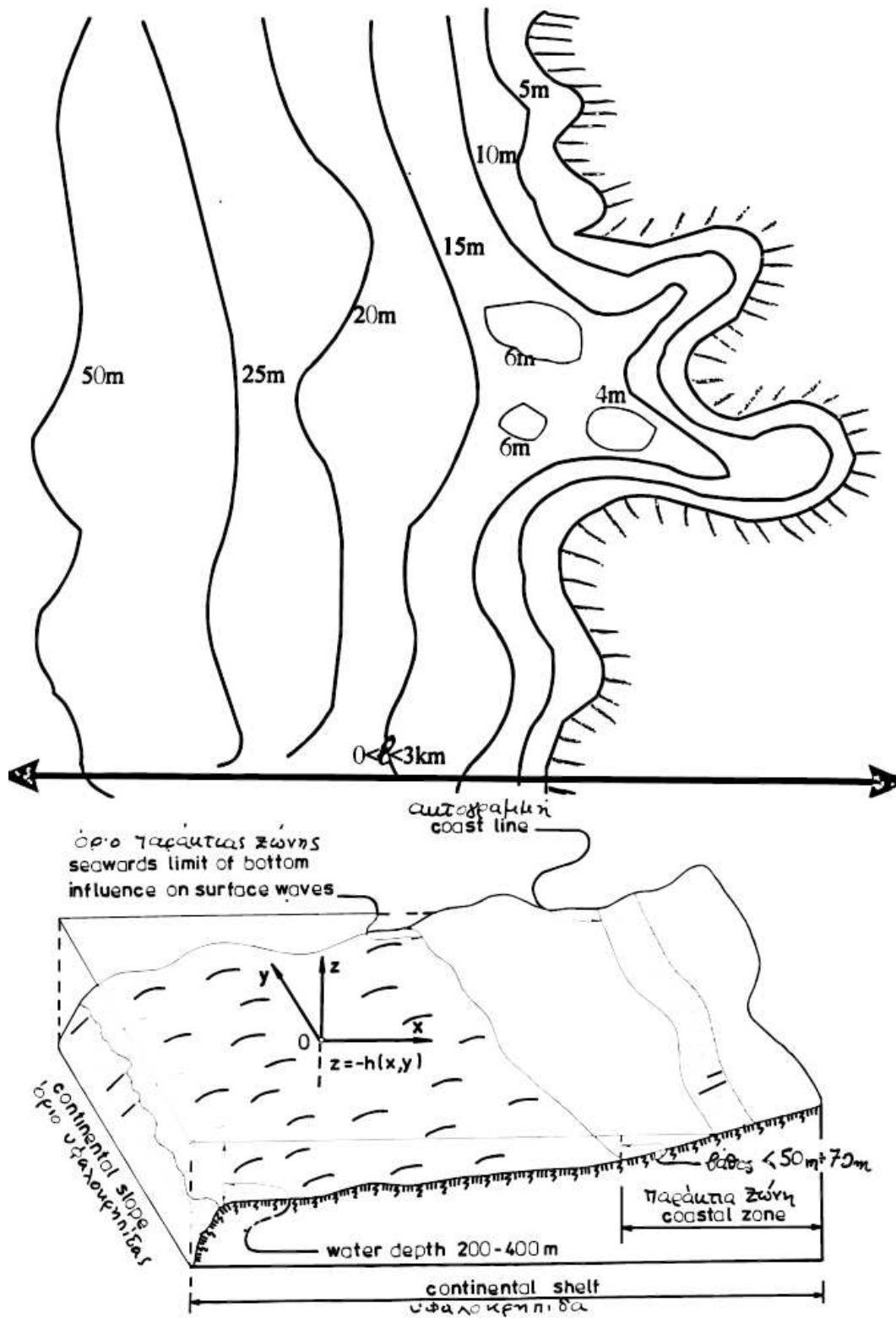
Ο κυματικός χαρακτήρας των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας είναι πολύ σημαντικός πάνω και κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού (δικαιολογώντας έτσι και τον όρο 'επιφανειακός') και εξασθενεί με σχετικά γρήγορο ρυθμό καθώς το βάθος αυξάνεται. Έτσι, καθώς οι κυματισμοί βαρύτητας διαδίδονται από την περιοχή μεγάλου βάθους (όπου κυρίως αναπτύσσονται) προς τις (γειτονικές ή και πιο απομακρυσμένες) ακτές έρχονται σε σημαντική αλληλεπίδραση με τον θαλάσσιο πυθμένα. Επιπροσθέτως, καθώς το βάθος του νερού ελαττώνεται τα φαινόμενα μη γραμμικότητας και διασποράς που σχετίζονται με τους επιφανειακούς κυματισμούς βαρύτητας καθίστανται ολοένα και πιο σημαντικά. Τα ανωτέρω έχουν ως άμεσο αποτέλεσμα η βαθυμετρία της θαλάσσιας περιοχής κοντά στις ακτές και οι μεταβολές αυτής να αποτελούν (φυσικές) παραμέτρους πρώτιστης σημασίας σε σχέση με την διαμόρφωση του κυματικού πεδίου.

Γνωρίζοντας ότι στην περίπτωση των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας το κυματικό πεδίο παρουσιάζει πολύ γρήγορο ρυθμό εξασθένησης με το βάθος, με την βοήθεια της σχέσεως διασποράς⁵ στο βαθύ νερό

$$\lambda = \left(\frac{g}{2\pi} \right) T^2 \approx 1.56 T^2$$

μπορούμε να καθορίσουμε σε πρώτο βαθμό τα (μέσα) όρια έκτασης της παράκτιας ζώνης από την ακτή προς την ανοικτή θάλασσα (βαθύ νερό).

⁵ Η σχέση (ή εξίσωση) διασποράς εισάγει έναν περιορισμό μεταξύ της περιόδου (T) και του μήκους κύματος (λ), η οποία πρακτικά δηλώνει ότι δεν είναι δυνατή η διάδοση κυματισμών βαρύτητας που αντιστοιχούν σε αυθαίρετες επιλογές (T, λ). Θα επανέλθουμε στην απόδειξη της σχέσης αυτής σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 2: Περιοχή υφαλοκρηπίδας και παράκτια ζώνη

Για παράδειγμα, στον Ελληνικό θαλάσσιο χώρο (αλλά και στην ευρύτερη περιοχή της Μεσογείου) η πλειονότητα (99%) των ανεμογενών κυματισμών αντιστοιχεί σε μέσες περιόδους από $T=2\text{sec}$ έως $T=10\text{sec}$. Επειδή το μήκος κύματος των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο της περιόδου, τα αναμενόμενα μήκη κύματος στο βαθύ νερό που αντιστοιχούν στο ανωτέρω διάστημα των περιόδων είναι $\lambda < 150\text{m}$. Γνωρίζοντας ότι το κυματικό πεδίο αποσβένεται σε βάθος νερού που αντιστοιχεί, πρακτικά, σε μισό μήκος κύματος, μια πρώτη εκτίμηση του βάθους νερού στα όρια μεταξύ της παράκτιας ζώνης και της ανοικτής θάλασσας

είναι $h < 70m$. Χρησιμοποιώντας μια τυπική τιμή για την μέση κλίση πυθμένα από 2 % έως 3 % καταλήγουμε στην ακόλουθη εκτίμηση για την μέγιστη οριζόντια έκταση της παράκτιας ζώνης από την ακτή: $l < 3 km$, βλ., π.χ., και Σχήμα 2.

Στις περισσότερες γεωγραφικές περιοχές, η γεωμετρία του θαλάσσιου πυθμένα παρουσιάζει σχετική κανονικότητα, βλέπε Σχήμα 2. Η μέση κλίση του πυθμένα κοντά στην ακτή και στην γενικότερη περιοχή της υφαλοκρηπίδας κυμαίνεται από 2% έως 5%. Μετά την υφαλοκρηπίδα και προς την περιοχή των μεγάλων βαθών, η μέση κλίση του πυθμένα αυξάνεται σημαντικά (και έχει, γενικώς, τιμές μεγαλύτερες από 10% έως 15%).

Η δυναμική των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας στην περιοχή της παράκτιας ζώνης είναι πιο πλούσια σε φυσικά φαινόμενα, και ως εκ τούτου παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον εξέτασης, Massel (1989). Στην περιοχή αυτή συναντώνται όλα τα χαρακτηριστικά κυματικά φαινόμενα, και συγκεκριμένα

- ανάκλαση (reflection) και διάθλαση (refraction) των κυματισμών, καθώς και τροποποίηση του πλάτους των κυματισμών λόγω ρήγωσης (shoaling),
- αλληλεπίδραση με την τρισδιάστατη βαθυμετρία και φαινόμενα περίθλασης ή σκέδασης των κυματισμών (diffraction),
- διασπορά των κυματισμών (dispersion),

καθώς επίσης και σημαντικά μη γραμμικά φαινόμενα, όπως:

- τριβή πυθμένα και εξασθένηση της ροής της κυματικής ενέργειας (bottom friction and wave energy dissipation),
- μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαφορετικών κυματικών συνιστωσών, και μεταφορά ενέργειας από μια αρχική ζώνη συχνοτήτων του φάσματος των κυματισμών προς μικρότερες και μεγαλύτερες συχνότητες (non-linear interactions),
- δημιουργία (κυματογενών) ρευμάτων (wave induced currents) και μεταφορά μάζας,
- θραύση των κυματισμών κοντά στην ακτή (wave breaking).

1.4 Ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον

Τα ακουστικά κύματα (acoustic waves), τα οποία παράγουν την αίσθηση του ήχου στο ανθρώπινο αντί, είναι κύματα συμπίεσης (διαταραχές πίεσης), που διαδίδονται μέσα σε ένα ακουστικό μέσο. Το ακουστικό μέσο (ή μέσο διάδοσης του ήχου) μπορεί να είναι ρευστό (υγρό ή αέριο), στερεό ή και συνδυασμός των ανωτέρω. Αντίστοιχα με τα ακουστικά είναι τα υπερηχητικά κύματα (ultrasonic waves) και υποηχητικά κύματα (infrasonic waves), των οποίων οι συχνότητες είναι εκτός των ορίων της ανθρώπινης ακοής (υψηλότερες ή χαμηλότερες, αντίστοιχα).

Η διάδοση των ακουστικών κυμάτων βρίσκει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στη θάλασσα. Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί ένα φυσικό κυματοδηγό, ο οποίος περιορίζεται άνωθεν από την ελεύθερη επιφάνεια και κάτωθεν από το θαλάσσιο πυθμένα. Λόγω του γεγονότος αυτού, και επειδή η απορρόφηση της ακουστικής ενέργειας (ισχύος) από το θαλασσινό νερό είναι πού μικρή, τα ακουστικά κύματα μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις μέσα στη θάλασσα (ως πολλές εκατοντάδες χιλιόμετρα). Γι' αυτό το λόγο, ακουστικά κύματα χρησιμοποιούνται στη θάλασσα για βαθυμετρήσεις, ανίχνευση και παρακολούθηση αντικειμένων, υποθαλάσσια τηλεπικοινωνία και

μετάδοση πληροφοριών, τομογραφική διερεύνηση των θαλασσιών μαζών και του πυθμένα της θάλασσας και πολλές άλλες εφαρμογές, βλ., π.χ., Brekhovskikh & Lysanov (1982), Urlick (1975).

1.5 Διεγείροντα αίτια του ήχου και θορύβου στην θάλασσα

Η διέγερση των ακουστικών κυμάτων στο θαλάσσιο περιβάλλον προέρχεται είτε από το θόρυβο περιβάλλοντος (ambient noise) είτε από κάποια συγκεκριμένη υδροακουστική εφαρμογή. Οι όροι *ήχος* και *θόρυβος* χρησιμοποιούνται εδώ για να δηλώσουν την διάκριση ανάμεσα σε ένα διαμορφωμένο ηχητικό σήμα (ήχος), το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει μια ή περισσότερες κύριες αρμονικές και τα πολλαπλάσια αυτών, και ένα ηχητικό σήμα με περισσότερο ακανόνιστα χαρακτηριστικά (θόρυβος), στο οποίο δεν διακρίνεται κάποια διαμόρφωση ή άλλη κανονικότητα, αντίστοιχα.

Θόρυβος περιβάλλοντος

Σε ότι αφορά τον θόρυβο περιβάλλοντος στην θάλασσα αυτός κυρίως οφείλεται είτε σε φυσικά αίτια, είτε σε άλλες ανθρώπινες δραστηριότητες που δεν σχετίζονται με κάποια συγκεκριμένη υδροακουστική εφαρμογή.

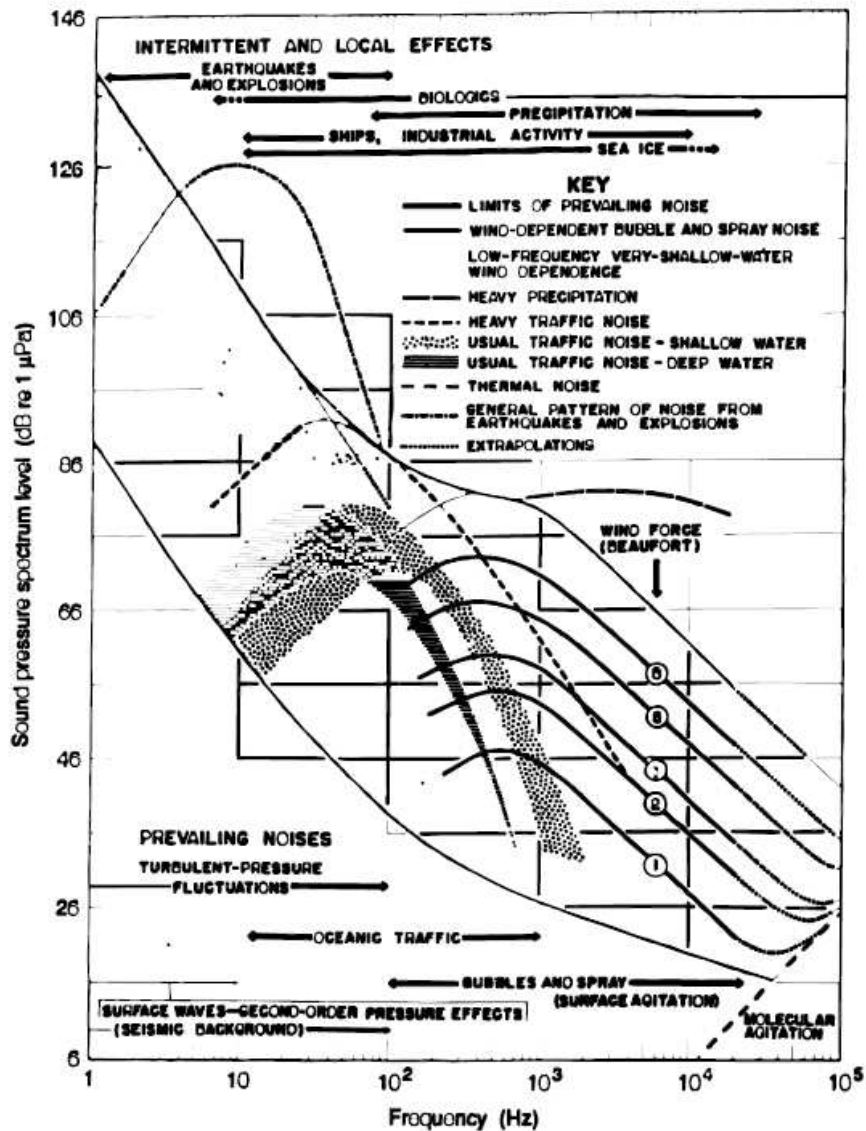
Ο θόρυβος περιβάλλοντος αποτελεί ουσιαστικό χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας θαλάσσιας περιοχής, περιέχοντας μια πληθώρα πληροφοριών για την κατάσταση θάλασσας στην συγκεκριμένη περιοχή, την κατάσταση της ατμόσφαιρας άνωθεν αυτής, τις τεκτονικές διεργασίες στον θαλάσσιο πυθμένα κλπ.

Η γενική μορφή του φάσματος του θορύβου περιβάλλοντος εικονίζεται στο Σχήμα 3, Wenz (1962).

Πιο συγκεκριμένα, στην περιοχή των πολύ χαμηλών συχνοτήτων (0.1 Hz έως 10 Hz) η κύρια πηγή του θορύβου περιβάλλοντος είναι οι σεισμοί, οι εκρήξεις υποθαλασσιών ηφαιστίων, και οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις θαλασσιών κυματισμών βαρύτητας.

Στην περιοχή των μεσαίων χαμηλών συχνοτήτων (50 Hz έως 300 Hz) η κύρια πηγή του θορύβου περιβάλλοντος είναι οι θαλάσσιοι πλόες. Ανάλογα με την ύπαρξη κανονικής ή αυξημένης κυκλοφορίας πλοίων στην ευρύτερη εξεταζόμενη περιοχή, το φάσμα θορύβου περιβάλλοντος διαμορφώνεται όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2, με γραμμοσκίαση και με διακεκομμένη γραμμή, αντίστοιχα.

Στην ευρύτερη περιοχή των συχνοτήτων από 1 Hz έως 50 kHz μεγάλο τμήμα του φάσματος θορύβου περιβάλλοντος προέρχεται από την κατάσταση της θάλασσας και της ατμόσφαιρας (τον καιρό) στην εξεταζόμενη περιοχή. Πιο συγκεκριμένα, στην περιοχή από 1 Hz έως 100 Hz μεγάλο τμήμα του θορύβου περιβάλλοντος προέρχεται από τους θαλάσσιους ανεμογενείς κυματισμούς και από τις δευτεροτάξιες μεταβολές της πίεσης στο πεδίο κυματισμών. Στην περιοχή συχνοτήτων από 100 Hz έως 10 kHz ο θόρυβος περιβάλλοντος προέρχεται από την αλληλεπίδραση της αέριας μάζας με την θάλασσα, την γένεση και την θραύση των κυματισμών, και από την θραύση των φυσαλλίδων αέρα, οι οποίες παγιδεύονται στο επιφανειακό στρώμα νερού.



Σχήμα 3: Το γενικό φάσμα θορύβου περιβάλλοντος

Υδροακουστικές εφαρμογές

Σε ότι αφορά τις υδροακουστικές εφαρμογές, οι περιοχές συχνοτήτων των ακουστικών κυμάτων που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές καλύπτουν ένα ευρύτατο φάσμα, που αρχίζει από υποπολλαπλάσια του Hz και φτάνει ως πολλά KHz. Ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων, οι εφαρμογές των ακουστικών κυμάτων στη θάλασσα ταξινομούνται ως εξής:

- (i) *Πολύ χαμηλές συχνότητες (0.1-10Hz)*: Χρησιμοποιούνται σε σεισμικές εφαρμογές, στις οποίες το ενδιαφέρον στρέφεται στη διερεύνηση του πυθμένα της θάλασσας. Η έρευνα του πυθμένα έχει ως στόχο τη μελέτη των υποστρωμάτων που τον αποτελούν και την ανίχνευση τυχόν ασυνεχειών. Έτσι, γίνεται γνωστή η σύστασή του, διαπιστώνεται η δυνατότητα θεμελίωσης υποθαλασσιών κατασκευών, ανιχνεύονται υποθαλάσσια κοιτάσματα πετρελαίου κ.λ.π.

- (ii) *Μεσαίες συχνότητες (10Hz-1KHz)*: Δύο μεγάλες περιοχές εφαρμογών που χρησιμοποιούν αυτές τις συχνότητες είναι η Θαλάσσια Ακουστική Τομογραφία (Ocean Acoustic Tomography) και η παθητική ακρόαση.

Η αρχή της ακουστικής τομογραφίας βασίζεται στο γεγονός ότι, καθώς κάποιο ηχητικό σήμα διαδίδεται στο θαλάσσιο περιβάλλον επηρεάζεται και διαμορφώνεται από τις ακουστικές παραμέτρους του περιβάλλοντος, αποθηκεύοντας έτσι πληροφορίες για την δομή και τη σύσταση της θαλάσσιας μάζας απ'όπου διέρχεται. Καταγράφοντας το διαμορφωμένο ηχητικό σήμα που φθάνει σε μια ορισμένη θέση, με κατάλληλη επεξεργασία μπορούμε να ανακτήσουμε ένα μέρος από τις πληροφορίες που περιέχει..

Τα παθητικά συστήματα ακρόασης αξιοποιούν τους ήχους που φτάνουν σε κάποιο δέκτη που παρακολουθεί το θόρυβο της θάλασσας. Τα ακουστικά κύματα που συλλαμβάνονται έχοντας διανύσει πολλές εκατοντάδες (ή και χιλιάδες) χιλιόμετρα στη θάλασσα μεταφέρουν πληροφορίες για σεισμούς, εκρήξεις ηφαιστειών και μακρινές καταιγίδες. Επίσης, στις συχνότητες αυτές (κυρίως στην περιοχή 50-300Hz), είναι αισθητός ο θόρυβος από την κίνηση των πλοίων (ship traffic noise), τον επιφανειακό άνεμο και τα κύματα ελεύθερης επιφάνειας, τις βροχοπτώσεις και άλλα μετεωρολογικά φαινόμενα

- (iii) *Υψηλές συχνότητες (1 KHz-μερικές δεκάδες KHz)*: Χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση αντικειμένων (echo location) από “ενεργά” (active) συστήματα (τα οποία είναι γνωστά και ως SONAR), για βαθυμετρήσεις (echo sounding), ανίχνευση κοπαδιών από ψάρια, στην υποβρύχια αρχαιολογία, στον εντοπισμό υποβρυχίων, torpilών και άλλων υποθαλάσσιων στόχων από πλοία του Πολεμικού Ναυτικού.

- (iv) *Πολύ υψηλές συχνότητες (ως 300KHz περίπου)*: Σ' αυτήν την περιοχή συχνοτήτων γίνεται η υποθαλάσσια επικοινωνία και μετάδοση πληροφοριών. Είναι γνωστό ότι στον αέρα, ως μέσο τηλεπικοινωνίας και μεταφοράς πληροφοριών, χρησιμοποιούνται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Όμως στο νερό παρουσιάζουν μεγάλη απόσβεση και δεν διαδίδονται παρά μόνο σε πολύ μικρές αποστάσεις. Έτσι το ρόλο που παίζουν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στον αέρα παίζουν στο νερό τα ακουστικά κύματα, τα οποία, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, διαδίδονται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις, Jensen *et al* (1994). Δύο σημαντικές εφαρμογές της διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στην υποθαλάσσια επικοινωνία και μετάδοση πληροφοριών είναι:

- α) ομιλία, π.χ. συνομιλία ανάμεσα σε δύτες, και
- β) μεταφορά δεδομένων από κατάλληλα όργανα (telemetry).

1.6 Ακουστικές παράμετροι θαλασσιού περιβάλλοντος

Οι σημαντικότερες φυσικές παράμετροι οι οποίες επηρεάζουν την διάδοση των ακουστικών κυμάτων στην θάλασσα είναι: η θερμοκρασία και η αλατότητα του θαλασσινού νερού, η ταχύτητα του ήχου στο νερό, η πυκνότητα του νερού και η ύπαρξη διαστρωματώσεων της στήλης του νερού, η γεωμορφολογία και η σύσταση του θαλάσσιου πυθμένα, καθώς και η κατάσταση της θάλασσας από άποψη κυματισμών.

Λόγω της μεγάλης σημασίας που παρουσιάζουν οι ανωτέρω φυσικές παράμετροι στην διάδοση του ήχου στη θάλασσα θα αναπτυχθούν λεπτομερέστερα στην συνέχεια.

1.6.1 Κατακόρυφη κατανομή της θερμοκρασίας στη θάλασσα

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται μια τυπική μορφή της κατακόρυφης κατανομή της θερμοκρασίας στη στήλη του θαλασσινού νερού. Όπως προκύπτει από το σχήμα αυτό, η θερμοκρασία παρουσιάζει μέγιστο κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού.

Το πρώτο στρώμα κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια πάχους μερικών δεκάδων έως περίπου εκατό μέτρων ονομάζεται στρώμα αναμειξέως. Στην περιοχή αυτή η δράση των θαλασσιών κυματισμών συντελεί σε μια εξισορρόπηση της θερμοκρασίας του νερού σε σταθερά επίπεδα. Τα επίπεδα αυτά διαφοροποιούνται ανάλογα με την εποχή, αλλά και την ώρα της ημέρας, Ειδικότερα, κατά τους θερινούς μήνες, αλλά και κατά τις θεμότερες ώρες της ημέρας, το κατακόρυφο προφίλ της θερμοκρασίας του θαλασσινού νερού παρουσιάζει μια τοπική αύξηση κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια (θερινό προφίλ στο Σχήμα 4). Κατά τους χειμερινούς μήνες η μέση θερμοκρασία του θαλασσινού νερού στο στρώμα αναμειξέως παραμένει σταθερή με μια πολύ μικρή τάση ελάττωσης κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια.

Κάτωθεν του στρώματος αναμειξέως υπάρχει η κύρια θερμοκλιής ζώνη, η οποία συνήθως έχει πάχος αρκετές εκατοντάδες μέτρα, όπου η θερμοκρασία ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό, λόγω της ελάττωσης του βάθους και, κατά συνέπεια, της ελάττωσης της ροής της θερμότητας από την ελεύθερη επιφάνεια. Σε πολύ μεγαλύτερα βάθη, κάτωθεν της κύριας θερμοκλιούς, ευρίσκεται η ισοθερμική ζώνη. Στην περιοχή αυτή η θερμοκρασία του νερού σταθεροποιείται στους 3°C, περίπου, ως αποτέλεσμα της θερμοδυναμικής ισορροπίας του θαλασσινού νερού σε πολύ μεγάλη πίεση.

Ενδεικτικά, στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται η μέση ετήσια κατανομή της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου κατά μήκος μιάς τομής Ατλαντικό Ωκεανό, από τον Νότιο έως τον Βόρειο Πόλο.

1.6.2 Αλατότητα του θαλασσινού νερού

Η αλατότητα του θαλασσινού νερού δηλώνει την μέση περιεκτικότητα των διαλυμένων αλάτων σε αυτό, και κυμαίνεται από 30 ‰ έως 45 ‰. Η αλατότητα έχει την τάση να ελαττώνεται με το βάθος χωρίς όμως να παρουσιάζει την έντονη διαστρωμάτωση που παρουσιάζει η κατακόρυφη κατανομή της θερμοκρασίας. Επίσης, η αλατότητα είναι σημαντικά εξαρτώμενη από την ευρύτερη γεωγραφική περιοχή, π.χ. η μέση επιφανειακή αλατότητα του Ατλαντικού (34-36 ‰) είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της Μεσογείου (36‰ στις δυτικές περιοχές -39‰ στις ανατολικότερες περιοχές), και η τελευταία είναι σημαντικά μικρότερη από την αλατότητα της Ερυθράς θάλασσας. Εκτός αυτού, η αλατότητα παρουσιάζει εντονότερη διακύμανση στην παράκτια ζώνη, όπου π.χ. κοντά στις εκβολές μεγάλων ποταμών το θαλασσινό νερό εμπλουτίζεται με γλυκό νερό με αποτέλεσμα την έντονη πτώση της αλατότητας.

Ενδεικτικά, στο Σχήμα 6 παρουσιάζεται η μέση ετήσια κατανομή της αλατότητας σε μέρη τοις χιλίοις κατά μήκος μιάς τομής Ατλαντικό Ωκεανό, από τον Νότιο έως τον Βόρειο Πόλο.

1.6.3 Ταχύτητα του ήχου στη θάλασσα

Η κατανομή της ταχύτητας του ήχου στην θάλασσα μάζα. επηρεάζει σε μέγιστο βαθμό τα φαινόμενα διάδοσης του ήχου στην θάλασσα. Γενικώς, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε οποιοδήποτε ακουστικό μέσο είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται με την πυκνότητα και την συμπίεστικότητα του ακουστικού μέσου. Στη θάλασσα η πυκνότητα του νερού επηρεάζεται κυρίως από τη (στατική) πίεση, την αλατότητα και την θερμοκρασία του νερού. Ετσι, η ταχύτητα του ήχου στην θάλασσα είναι αύξουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας της αλατότητας, καθώς επίσης και της

υδροστατικής πίεσης. Επειδή η υδροστατική πίεση αυξάνεται γραμμικά με το βάθος, η ταχύτητα του ήχου στην θάλασσα είναι άξουσα συνάρτηση του βάθους.

Μία απλή έκφραση για την εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου στην θάλασσα από τις ανωτέρω παραμέτρους δίδεται από την ακόλουθη σχέση, Clay & Medwin (1977),

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z$$

όπου c η ταχύτητα του ήχου στο θαλάσσινο νερό σε m/sec, T η θερμοκρασία του νερού σε βαθμούς Κελσίου, S η αλατότητα του νερού σε ποσοστό επί τοις χιλίοις (‰ ή ppt), και z το βάθος σε m. Όπως προκύπτει και από την ανωτέρω σχέση, η ταχύτητα του ήχου στο θαλασσινό νερό παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις και, γενικώς, λαμβάνει τιμές εντός των ορίων από $c=1450$ m/s έως $c=1570$ m/s. Παρ' όλα αυτά, όπως θα δούμε και στην συνέχεια, οι διακυμάνσεις αυτές, και ιδιαίτερα η δημιουργία τοπικών ελαχίστων της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου $c(z)$ σε κάποιο βάθος, έχουν ως αποτέλεσμα πολύ σημαντικές τροποποιήσεις στην μορφή διάδοσης του ήχου στην θάλασσα. Το γεγονός αυτό οφείλεται, κυρίως, στα φαινόμενα διάθλασης τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα με τις μεταβολές της ταχύτητας του ήχου.

Επιπροσθέτως, η κατανομή της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό, πέραν της εξάρτησης της εκ των ανωτέρω παραμέτρων, παρουσιάζει συγκεκριμένη εποχιακή και ημερήσια μεταβλητότητα, καθώς και γεωγραφική μεταβλητότητα (δηλαδή μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο).

Μία τυπική μορφή της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στην θάλασσα παρουσιάζεται στο Σχήμα 7. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα αυτό η ταχύτητα του ήχου παρουσιάζει εντονότερη μεταβολή στο ανώτερο στρώμα του νερού. Στην περιοχή αυτή μερικών μέτρων έως μερικών δεκάδων μέτρων βάθους κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας η ταχύτητα του ήχου μεταβάλλεται σημαντικά τόσο κατά την διάρκεια της μέρας, όσο και εποχιακά. Στις θερμότερες ώρες της ημέρας και κατά τους θερινούς μήνες, όταν η κατάσταση της θάλασσας είναι σχετικά ήρεμη, η τοπική αύξηση της θερμοκρασίας του νερού κοντά στην επιφάνεια έχει σαν αποτέλεσμα την αντίστοιχη αύξηση της ταχύτητας του ήχου.

Το πρώτο στρώμα νερού κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια παχους μερικών δεκάδων ονομάζεται στρώμα αναμειξέως. Στην περιοχή αυτή, η θερμοκρασία του νερού είναι σταθερή, γεγονός που οφείλεται στην δράση των κυματισμών. Κατά συνέπεια, στην περιοχή αυτή η ταχύτητα του ήχου παραμένει σταθερή ή αυξάνεται με πολύ μικρό ρυθμό, λόγω της αυξήσεως της υδροστατικής πίεσης με το βάθος. Ακριβώς κάτω από το στρώμα αναμειξέως ευρίσκεται η κύρια θερμοκλινής, μία περιοχή βαθών στην οποία η θερμοκρασία του νερού και κατά συνέπεια και η ταχύτητα του ήχου ελαττώνονται με σταθερό ρυθμό καθώς το βάθος αυξάνεται.

Σε αρκετά μεγαλύτερα βάθη, κάτωθεν της κύριας θερμοκλινούς, η θερμοκρασία του θαλασσινού νερού σταθεροποιείται περίπου στους 3°C, και παύει να μεταβάλλεται με το βάθος. Στη περιοχή αυτή, η οποία ονομάζεται ισοθερμική ζώνη, η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται με μικρό και σταθερό ρυθμό με το βάθος, λόγω της διαρκούς αυξήσεως της υδροστατικής πίεσης.

Ενδεικτικά, στο Σχήμα 8 εικονίζεται η ανωτέρω εξάρτηση της ταχύτητας του ήχου από την τυπική κατακόρυφη κατανομή της θερμοκρασίας και το βάθος, για σταθερή αλατότητα. Από το Σχήμα 8 παρατηρούμε την χαρακτηριστική εμφάνιση δύο τοπικών ελαχίστων στην τυπική κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου. Ένα πρώτο τοπικό ελάχιστο παρατηρείται στην θέση της ελεύθερης επιφάνειας (ή κοντά σε αυτήν), και ένα γενικό ελάχιστο παρατηρείται σε βάθος που αντιστοιχεί κοντά στο βαθύτερο όριο της κύριας θερμοκλινούς ζώνης. Αυτό συμβαίνει διότι μεταξύ της κυρίας θερμοκλινούς ζώνης, όπου η ταχύτητα του ήχου ελαττώνεται με το βάθος, και της ισοθερμικής ζώνης, όπου η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται με το βάθος, υπάρχει κάποια θέση στην

οποία η κατανομή της ταχύτητας του ήχου παρουσιάζει ελάχιστο. Το βάθος που αντιστοιχεί στην θέση αυτή ορίζει τον άξονα του βαθέος υποβρυχίου ακουστικού καναλιού (deep Underwater Sound Channel).

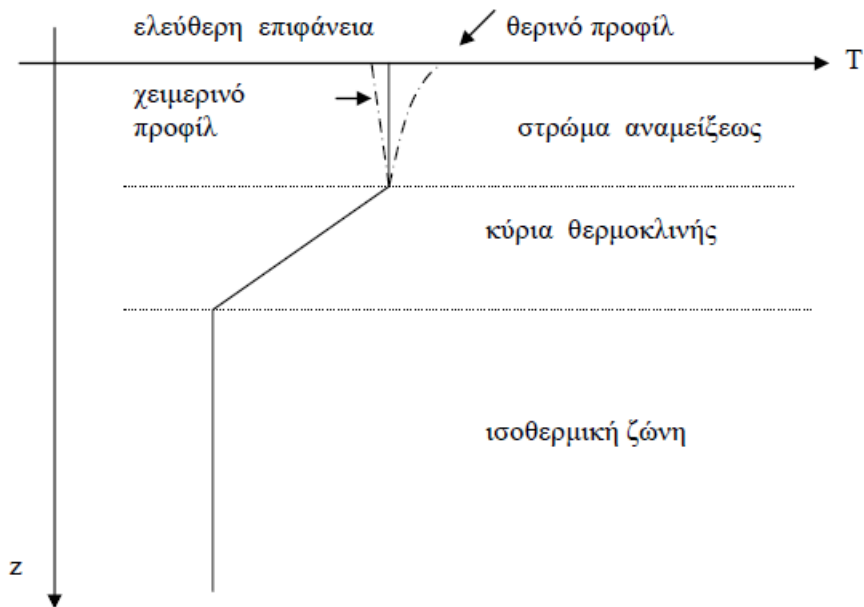
Η σημασία των ανωτέρω τυπικών χαρακτηριστικών της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό γίνεται εμφανής με την βοήθεια του Σχήματος 9. Στο σχήμα αυτό, που ονομάζεται **διάγραμμα ηχητικών ακτίνων**, εικονίζεται η μορφή των χαρακτηριστικών γραμμών διάδοσης του ήχου στην θάλασσα, οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα ηχητικό σήμα το οποίο εκπέμπεται την ηχητική πηγή με συγκεκριμένη γωνία εκπομπής. Επίσης, στο αριστερό μέρος του ίδιου σχήματος εικονίζεται και η τυπική κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου, η οποία θεωρείται οριζοντίως αμετάβλητη, και η οποία παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στην ελεύθερη επιφάνεια και ένα ολικό ελάχιστο σε βάθος περίπου 300m (θέση υποβρυχίου ακουστικού καναλιού).

Στην περίπτωση του Σχήματος 9(α), η ηχητική πηγή ευρίσκεται σε μικρό βάθος (περίπου 50 m) κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια, και εκπέμπει μια δέσμη ηχητικών ακτίνων. Παρατηρούμε από το σχήμα αυτό ότι λόγω της συγκεκριμένης μορφής του κατακόρυφου προφίλ της ταχύτητας του ήχου ένα σημαντικό τμήμα της ηχητικής ενέργειας από την πηγή περιορίζεται κατά την διάδοση του σε ένα στρώμα νερού κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια (στο παράδειγμα το στρώμα αυτό έχει πάχος περίπου 100 m). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός **επιφανειακού ηχητικού καναλιού** (surface duct), στο οποίο η ένταση του ηχητικού σήματος θα είναι αυξημένη, και ως εκ τούτου στην ζώνη αυτή το ηχητικό σήμα θα διανύσει μεγάλη απόσταση προτού να αποσβεσθεί. Η παραπάνω μορφή αποτελεί μία από τις χαρακτηριστικές μορφές διάδοσης του ήχου στην θάλασσα.

Επίσης, με την βοήθεια του ανωτέρω παραδείγματος, είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε την ύπαρξη ενός άλλου χαρακτηριστικού φαινομένου κατά την διάδοση του ήχου στη θάλασσα, όπως είναι η εμφάνιση **ζώνης σκιάς**. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, εξ'αιτίας της καμπύλωσης των ηχητικών ακτίνων λόγω διάθλασης, οι ηχητικές ακτίνες δεν διαδίδονται στην περιοχή που εκτείνεται από 5km έως 15 km από την πηγή και σε βάθος από 100m έως 300m, περίπου.

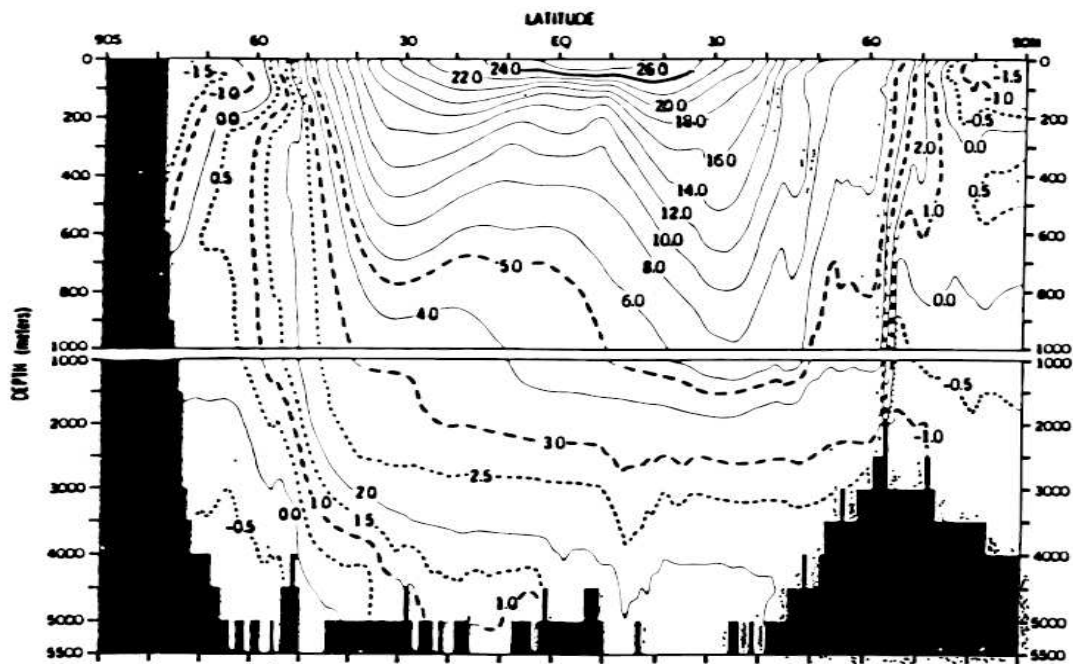
Στην περίπτωση του Σχήματος 9(β), η ηχητική πηγή εκπέμπει σε βάθος κοντά στον άξονα του υποβρυχίου ακουστικού καναλιού, ο οποίος αντιστοιχεί στην θέση του ολικού ελαχίστου της ταχύτητας του ήχου, και ο οποίος ευρίσκεται περίπου 300 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια. Παρατηρούμε από το σχήμα αυτό ότι ένα σημαντικό τμήμα της ηχητικής ενέργειας από την πηγή περιορίζεται κατά την διάδοση του σε ένα στρώμα νερού γύρω από τον άξονα του **υποβρυχίου ακουστικού καναλιού**. Για τους ίδιους όπως και προηγουμένως λόγους, η ένταση του ηχητικού σήματος στο υποβρύχιο ακουστικό κανάλι θα είναι σημαντικά αυξημένη, και ως εκ τούτου στην ζώνη αυτή το ηχητικό σήμα θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση προτού να αποσβεσθεί.

Η ανωτέρω συζήτηση για τις χαρακτηριστικές μορφές διάδοσης του ήχου στο θαλάσσιο περιβάλλον αφορά κυρίως το βαθύ νερό. Καθώς το βάθος του νερού ελαττώνεται η επίδραση του θαλάσσιου πυθμένα στην διάδοση του ήχου καθίσταται ολοένα και πιο σημαντική. Στην ζώνη της υφαλοκρηπίδας, όπου το βάθος νερού είναι μικρότερο από 300m έως 500m, η χαρακτηριστική μορφή διάδοσης του ήχου περιλαμβάνει πολλαπλές ανακλάσεις της δέσμης των ηχητικών ακτίνων από την ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα. Με αυτήν την έννοια, στην ανωτέρω περιοχή, η ελεύθερη επιφάνεια και ο πυθμένας, ως φυσικά σύνορα του θαλάσσιου κυματοδηγού, καθίστανται πολύ σημαντικά.



Σχήμα 4. Τυπική μορφή της κατακόρυφης κατανομής θερμοκρασίας θαλασσινού νερού

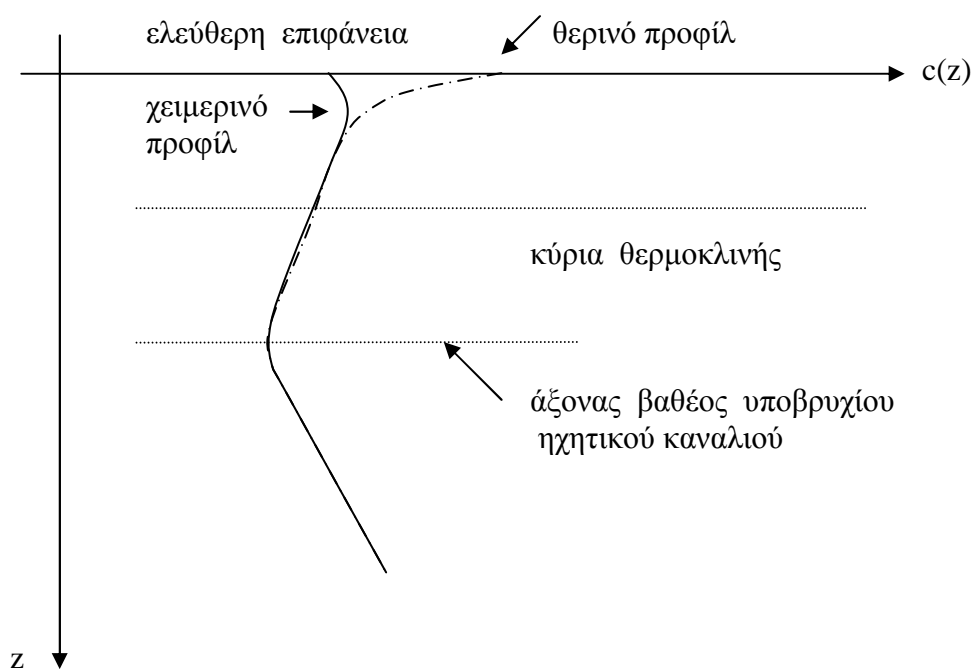
Κλείνοντας το εδάφιο αυτό, στο Σχήμα 10 παρουσιάζονται ενδεικτικά οι μέσες εποχιακές κατακόρυφες κατανομές της ταχύτητας του ήχου στην θαλάσσια περιοχή μεταξύ Λέσβου και Χίου. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 10(α,β,γ,δ) παρουσιάζονται τα κατακόρυφα προφίλ της ταχύτητας του ήχου στην ανωτέρω περιοχή κατά τον Χειμώνα, την Άνοιξη, το Θέρος και το Φθινόπωρο, αντίστοιχα. Όπως παρατηρούμε από τα σχήματα αυτά, οι χαρακτηριστικές εποχιακές μεταβολές της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου συμβαίνουν στο ανώτερο στρώμα νερού πάχους 200m. Κάτωθεν του στρώματος αυτού, το οποίο για την συγκεκριμένη περιοχή αντιστοιχεί κοντά στο βάθος του υποβρύχιου ακουστικού καναλιού, η κατανομή της ταχύτητας του ήχου είναι πρακτικά ανεξάρτητη από την εποχή, και εξαρτάται μόνο από το βάθος. Τέλος, στο Σχήμα 11 εικονίζεται η μέση εποχιακή κατανομή της ταχύτητας του ήχου κατά τους μήνες Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο, κατά μήκος μιας τομής στον Ατλαντικό Ωκεανό. Παρατηρούμε στο σχήμα αυτό την θέση του υποβρύχιου ηχητικού καναλιού (έντονη αξονική γραμμή) καθώς και τα όρια του επιφανειακού ηχητικού καναλιού (έντονη διακεκομμένη γραμμή).



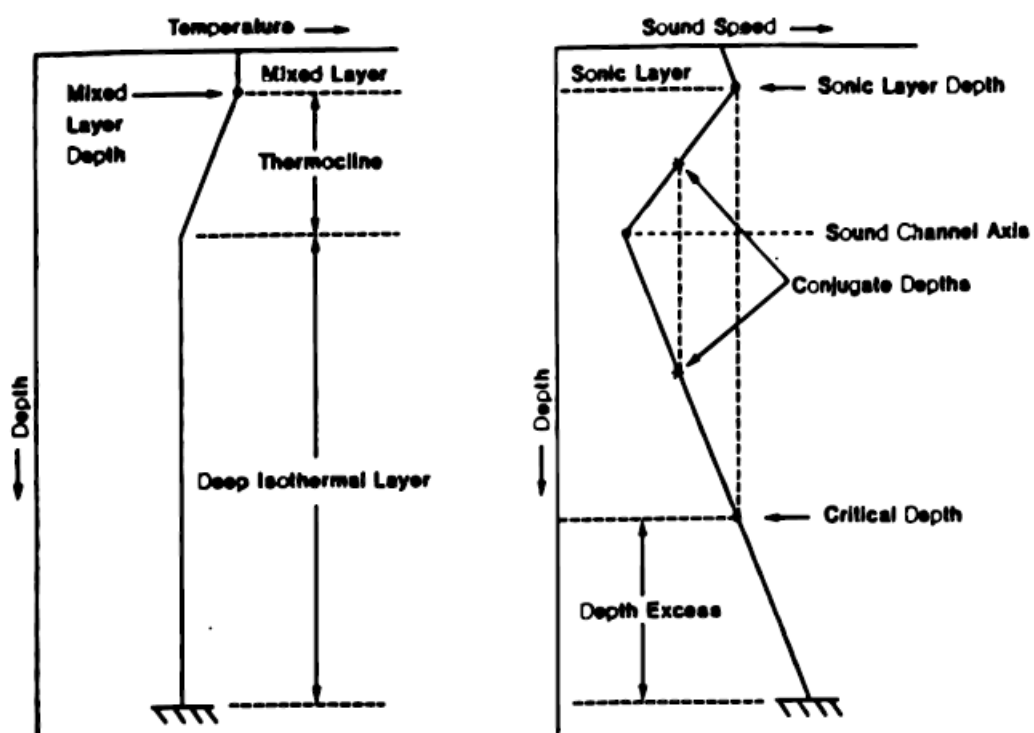
Σχήμα 5: Μέση ετήσια κατανομή θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου κατά μήκος μιας τομής στον Ατλαντικό Ωκεανό. Η κατακόρυφη κλίμακα στο επάνω τμήμα του σχήματος είναι ανά 100m, ενώ στο κάτω τμήμα είναι ανά 500m.



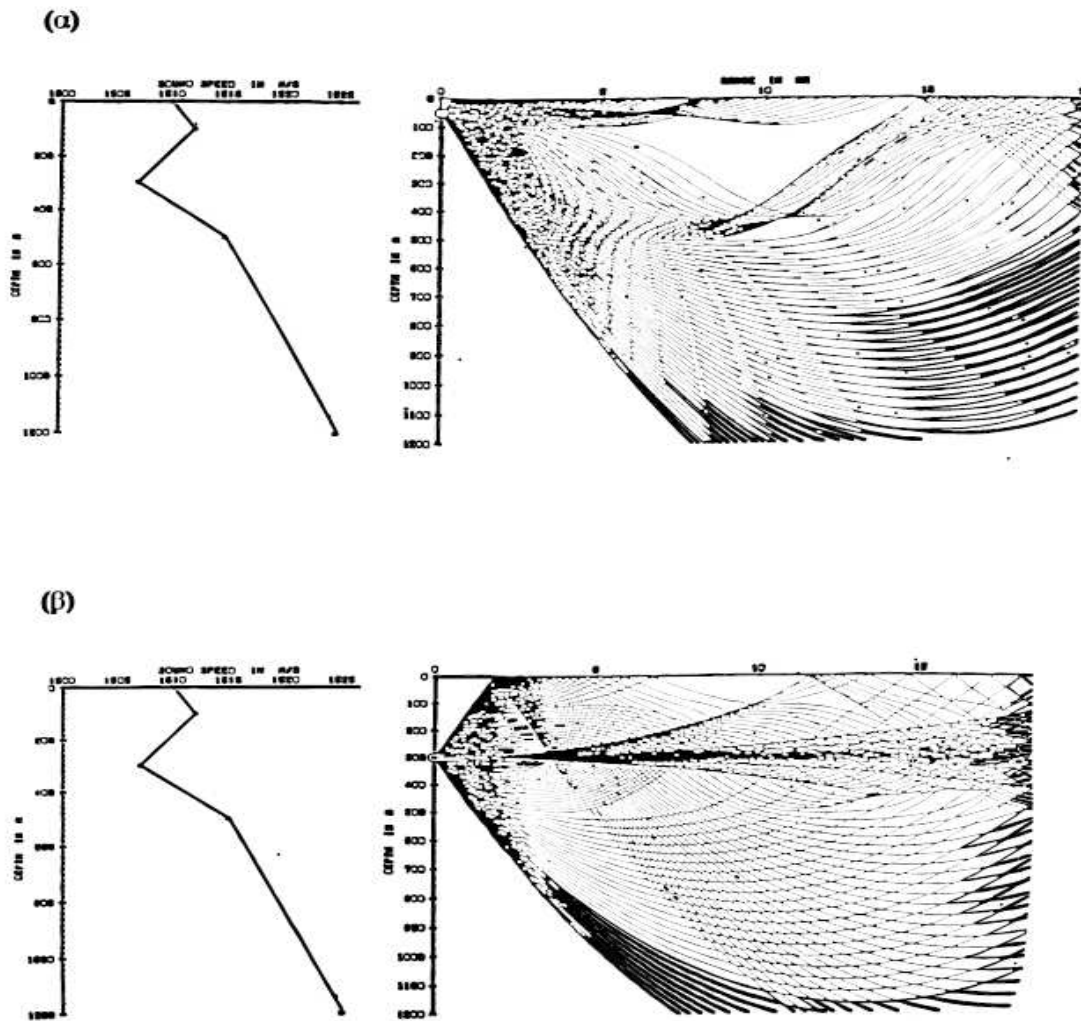
Σχήμα 6: Μέση ετήσια κατανομή της αλατότητας επί τοις χιλίοις (‰) κατά μήκος μιας τομής στον Ατλαντικό Ωκεανό. Η κατακόρυφη κλίμακα στο επάνω τμήμα του σχήματος είναι ανά 100m, ενώ στο κάτω τμήμα είναι ανά 500m.



Σχήμα 7: Τυπική μορφή της κατακόρυφης κατανομής της ταχύτητας του ήχου στο θαλασσινό νερό.



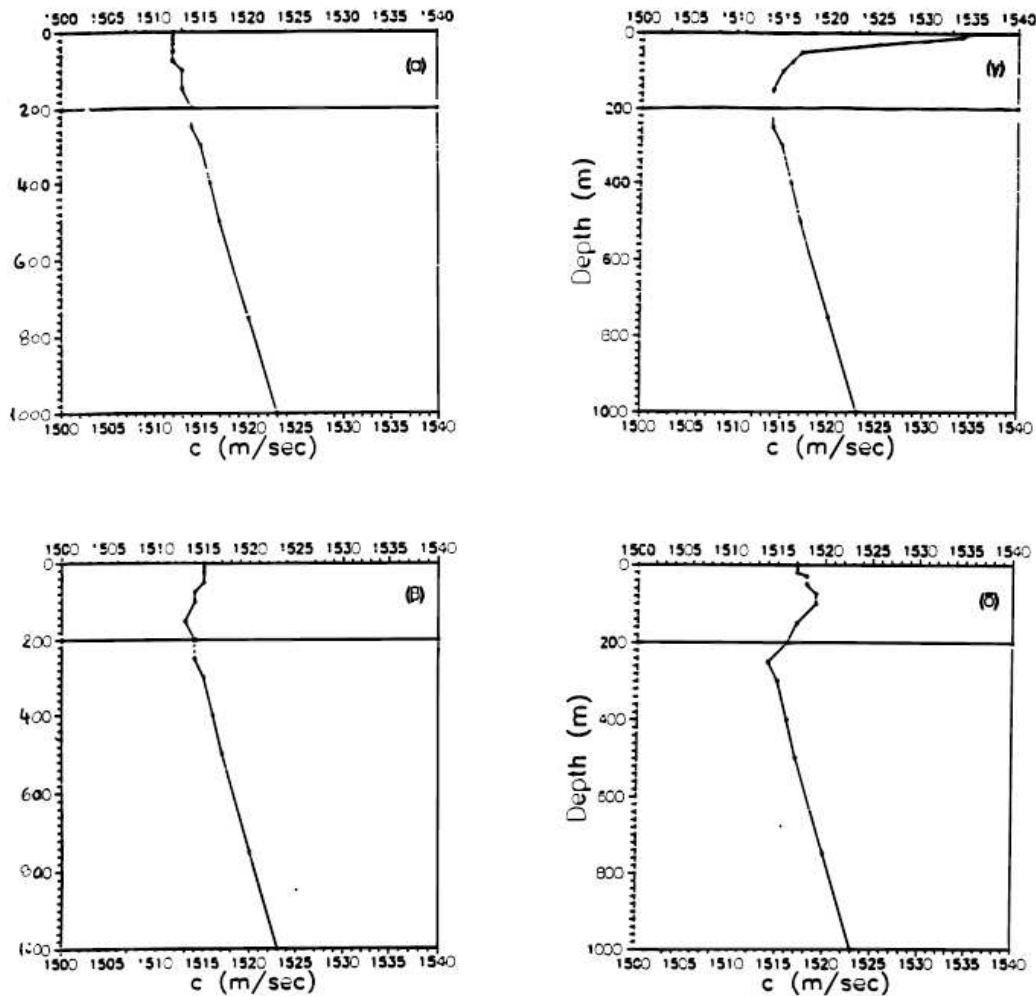
Σχήμα 8: Σχέση ανάμεσα στην κατακόρυφη κατανομή θερμοκρασίας και στην ταχύτητα του ήχου, για σταθερή αλατότητα.



Σχήμα 9: Διαγράμματα ηχητικών ακτίνων που ξεκινούν από σημειακή πηγή. (α) Βάθος πηγής 50m. (β) Βάθος πηγής 300m. Στο αριστερό μέλος των σχημάτων αυτών παρουσιάζεται το κατακόρυφο προφίλ της ταχύτητας του ήχου.

1.6.4 Φυσικά σύνορα του θαλάσσιου κυματοδηγού

Ο θαλάσσιος ακουστικός κυματοδηγός δημιουργείται από δύο φυσικά σύνορα: την ελεύθερη επιφάνεια και τον πυθμένα. Τα φυσικά αυτά σύνορα έχουν την ιδιότητα να περιορίζουν την κατακόρυφη έκταση του ακουστικού μέσου (θαλασσινό νερό) και με αυτόν τον τρόπο να υποβοηθούν τη διάδοση των ακουστικών κυμάτων σε μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις στο θαλασσινό νερό, ιδιαίτερα στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας.

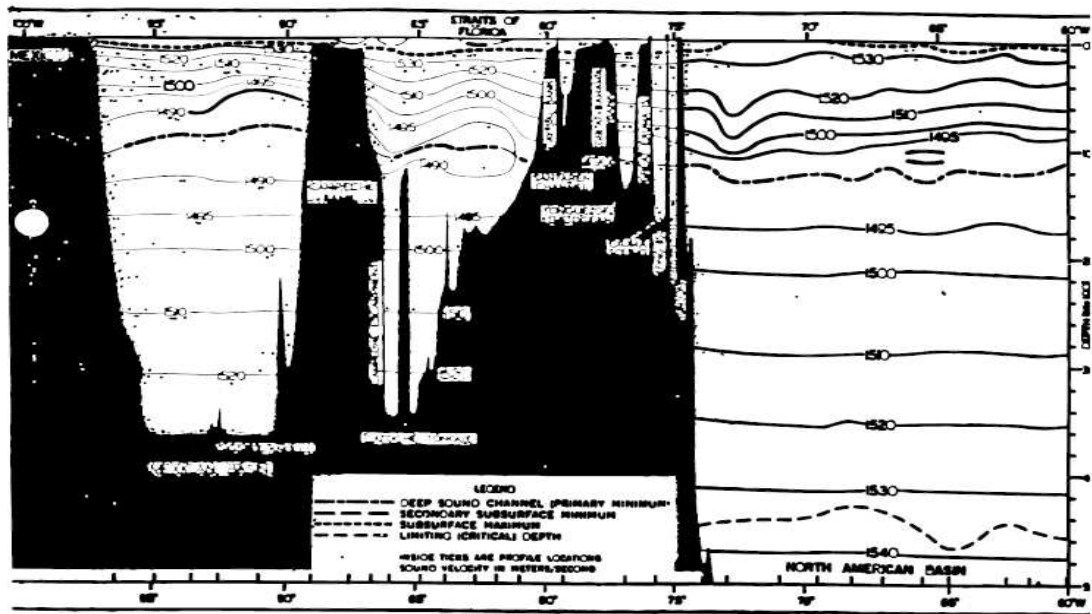


Σχήμα 10: Κατακόρυφα προφίλ της ταχύτητας του ήχου στην θαλάσσια περιοχή μεταξύ Λέσβου και Χίου. (α) Χειμών, (β) Άνοιξη, (γ) Θέρος, (δ) Φθινόπωρο. Οι εποχιακές μεταβολές στην ταχύτητα του ήχου συμβαίνουν στο ανώτερο στρώμα του θαλασσινού νερού. (Στην συγκεκριμένη περίπτωση το στρώμα αυτό έχει πάχος 200m).

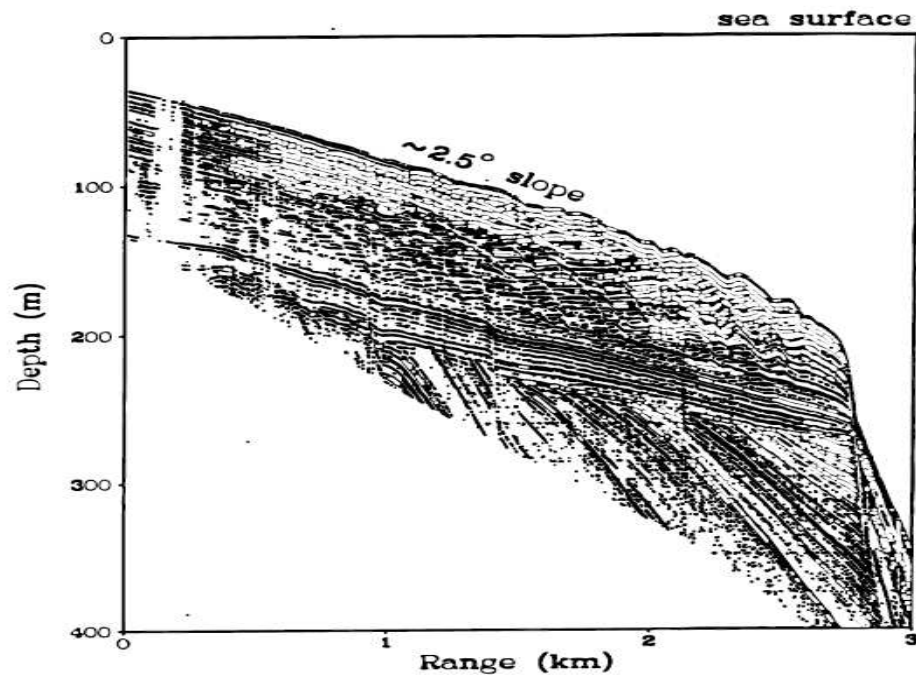
Η *ελεύθερη επιφάνεια* αποτελεί γενικώς ένα σύνορο με πολύ καλές ανακλαστικές ιδιότητες. Τα υδροακουστικά κύματα τα οποία προσπίπτουν στην ήρεμη ελεύθερη επιφάνεια ανακλώνται σχεδόν πλήρως, και με αυτό τον τρόπο η ακουστική ενέργεια που προσπίπτει στην ελεύθερη επιφάνεια ανακλάται χωρίς μεγάλες απώλειες και συνεχίζει την διάδοση της στην θαλάσσια μάζα.

Στην περίπτωση που η ελεύθερη επιφάνεια είναι ταραγμένη, όπως συμβαίνει εξ' αιτίας των επιφανειακών κυματισμών, η δημιουργία φυσαλίδων αέρα (από την θραύση των κυματισμών και την ανάμιξη του αέρα) που παγιδεύονται σε ένα πρώτο στρώμα νερού μικρού πάχους έχει σαν αποτέλεσμα την τοπική σκέδαση ενός τμήματος της ακουστικής ενέργειας. Παρά το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή οι απώλειες είναι κάπως αυξημένες, σημαντικό τμήμα της ηχητικής ενέργειας που προσπίπτει στην ελεύθερη επιφάνεια ανακλάται πίσω προς την θαλάσσια μάζα.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί ο *θαλάσσιος πυθμένας* είναι μια επιφάνεια με σχετικά μικρή μέση κλίση στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας (δηλαδή σε βάθη νερού μικρότερα από 200 - 300 m), η οποία συνήθως κυμαίνεται από 2% έως 3%.



Σχήμα 11: Μέση κατανομή της ταχύτητας του ήχου σε m/sec κατά μήκος μιας τομής στον Ατλαντικό Ωκεανό κατά τους μήνες Φεβρουάριο, Μάρτιο και Απρίλιο. Η κατακόρυφη κλίμακα του σχήματος είναι ανά 100m.



Σχήμα 12: Σεισμογραφική απεικόνιση του θαλάσσιου πυθμένα και τε ματάσεων του σε παράκτια περιοχή της Μεσογείου.

Ενδεικτικά, στο Σχήμα 12 παρουσιάζονται τα γεωλογικά χαρακτηριστικά του θαλάσσιου πυθμένα σε μια περιοχή της Μεσογείου, από την ακτή (βάθος νερού 35 m περίπου) έως και μετά το όριο της υφαλοκρηπίδας. Παρατηρούμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα ότι στο όριο της υφαλοκρηπίδας η κλίση πυθμένα μεταβάλλεται σχετικώς απότομα από γωνία περίπου 2.5° (κλίση 4.3%) στην περιοχή της υφαλοκρηπίδας σε γωνία περίπου 27° (κλίση 50%) στην περιοχή νερού μεγάλου βάθους.

Η δομή του θαλάσσιου πυθμένα εξαρτάται βεβαίως από τα τοπικά γεωλογικά χαρακτηριστικά της κάθε γεωγραφικής περιοχής, γενικώς όμως μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μια σειρά (διαστρωμάτωση) από ιζήματα τα οποία ευρίσκονται υπερκείμενα στο στερεό υπόστρωμα, βλέπε, π.χ., και Σχήμα 12.

Ο τυπικός χαρακτηρισμός των ακουστικών ιδιοτήτων των ιζημάτων γίνεται με βάση την ισοδύναμη περιεκτικότητα τους σε άμμο, πηλό και άργιλο. Ενδεικτικά στον Πίνακα 1, καταγράφονται τυπικές τιμές της πυκνότητας και της ταχύτητας του ήχου για διάφορα υλικά, σε σχέση και με το πορώδες του κάθε υλικού.

Υλικό	Πορώδες (%)	Πυκνότητα (kg/m ³)	Ταχύτητα ήχου (m/sec)
Άργιλος	70	1280	1500
Πηλός	55	1600	1600
Άμμος	45	1900	1700
Χαλίκι	35	2000	1750
Πέτρες	25	2100	2000
Ασβεστόλιθος	-	2400	3000

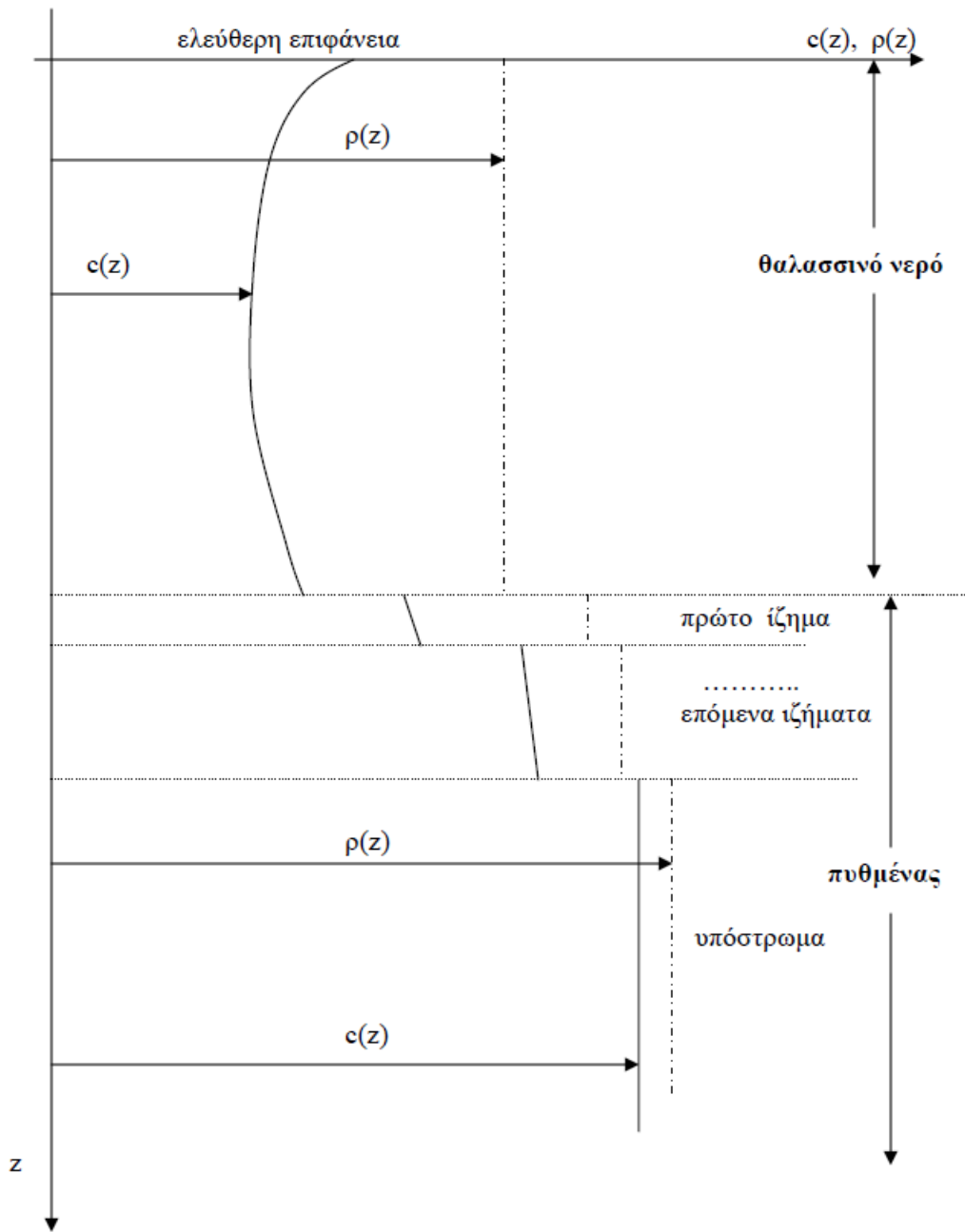
Πίνακας 1. Τυπικές τιμές της πυκνότητας και της ταχύτητας του ήχου για διάφορα υλικά, σε σχέση με το πορώδες του κάθε υλικού.

Ο θαλάσσιος πυθμένας είναι ακουστικά διαπερατό υλικό. Κατά συνέπεια, ένα (συνήθως σημαντικό) τμήμα της ακουστικής ενέργειας που μεταφέρει ένα ηχητικό κύμα και το οποίο προσπίπτει στον πυθμένα ανακλάται πίσω προς την θάλασσα μάζα ενώ το υπόλοιπο διαπερνά τον θαλάσσιο πυθμένα και διαδίδεται μέσα σε αυτόν. Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις ένα γενικό ακουστικό μοντέλο του θαλάσσιου κυματοδηγού, το οποίο συμπεριλαμβάνει και τον ακουστικό πυθμένα, είναι όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 13.

1.6.5 Γεωμετρική εξασθένηση της ηχητικής ενέργειας

Στην υδροακουστική ασχολούμαστε με τη μελέτη φαινομένων διάδοσης του ήχου σε μεγάλες αποστάσεις στη θάλασσα. Λόγω των μεγάλων αποστάσεων η ακουστική πίεση που σχετίζεται με ένα διαδιδόμενο ηχητικό σήμα καλύπτει ένα σημαντικό εύρος τιμών, και συγκεκριμένα λαμβάνει πολύ μεγάλες (σχετικά) τιμές κοντά στην πηγή (ή στο διεγείρον αίτιο γενικότερα), και πέφτει σε πολύ χαμηλά επίπεδα σε μεγάλες αποστάσεις από αυτή. Σε ένα ιδανικό θαλάσσιο κυματοδηγό η μείωση της εντάσεως ενός ηχητικού σήματος είναι αντιστρόφως ανάλογη της οριζοντίου αποστάσεως από την πηγή. Το αποτέλεσμα αυτό συνάγεται από τον ορισμό της *έντασης* που είναι 'η διαδιδόμενη ακουστική ισχύς ανά μονάδα επιφανείας', με την παρατήρηση ότι καθώς η οριζόντια απόσταση που διατρέχεται από ένα σήμα κατά την μετάδοση του αυξάνεται, η παράπλευρη επιφάνεια απ' όπου εξέρχεται η ακουστική ενέργεια αυξάνεται αναλογικά.

Επιπροσθέτως, η ικανότητα καταγραφής των σύγχρονων οργάνων μέτρησης υδροακουστικών χαρακτηριστικών καλύπτει ένα μεγάλο εύρος τιμών. Για παράδειγμα, αναφέρουμε εδώ ότι η ανθρώπινη αντίληψη για τον ήχο κυμαίνεται σε ένα εύρος από 20μPa (1Pa=1Nt/m²) έως 200 Pa, περίπου, καλύπτει δηλαδή ένα εύρος της τάξης του 10⁷.



Σχήμα 13: Πολυστρωματοποιημένο ακουστικό μοντέλο θαλασσίου περιβάλλοντος

Εξ αιτίας όλων των ανωτέρω, στην υδροακουστική είναι πολύ βολικώτερο να δουλέψουμε με σχετικές παρά με απόλυτες μονάδες μέτρησης, και μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμική παρά γραμμική κλίμακα. Χρησιμοποιείται για τον σκοπό αυτό ως σχετική μονάδα μέτρησης της έντασης του ακουστικού πεδίου το decibel που ορίζεται από την σχέση

$$L_I [dB] = \pm 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right),$$

Η χρήση των προσήμων (\pm) στην ανωτέρω σχέση έχει να κάνει με το αν στην συγκεκριμένη εφαρμογή μετράμε εξασθένηση της ηχητικής εντάσεως (οπότε χρησιμοποιείται το πρόσημο μείον) ή ενίσχυση του σήματος (οπότε χρησιμοποιείται το πρόσημο συν). Επίσης, για την εξαγωγή του τελικού αποτελέσματος είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιηθεί μια στάθμη αναφοράς (I_{ref}). Συχνά χρησιμοποιείται στην ακουστική η τιμή $I_{ref} = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$. Στην περίπτωση αυτή ένα σήμα που καταγράφεται σε κάποια θέση με ένταση $I = 10^{-10} \text{ Wm}^{-2}$ θα λέμε ότι έχει ένταση $20 \text{ dB re } 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$. Ο όρος 're 10^{-12} Wm^{-2} ' χρησιμοποιείται για να δηλώσει την στάθμη αναφοράς.

Το decibel χρησιμοποιείται στις υδροακουστικές εφαρμογές και ως σχετική μονάδα μέτρησης της πίεσης του ακουστικού πεδίου. Επειδή η ένταση του ηχητικού πεδίου είναι ανάλογη με το τετράγωνο της πίεσης, χρησιμοποιείται η ακόλουθη σχέση

$$L_p [dB] = \pm 10 \log_{10} \left(\frac{P^2}{P_{ref}^2} \right) = \pm 20 \log_{10} \left(\frac{P}{P_{ref}} \right),$$

όπου στην περίπτωση αυτή η στάθμη αναφοράς λαμβάνεται συνήθως ίση με $P_{ref} = 1 \mu\text{Pa} = 10^{-6} \text{ Nm}^{-2}$.

1.6.6 Απορρόφηση της ηχητικής ενέργειας από το θαλασσινό νερό

Καθώς ένα ηχητικό κύμα διαδίδεται στο θαλασσινό νερό, τμήμα της ακουστικής ισχύος που μεταφέρει απορροφάται, με την έννοια ότι μετατρέπεται σε θερμότητα. Το ποσοστό αυτό εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την συχνότητα του κύματος, με αποτέλεσμα (όπως θα γίνει πιο φανερό στην συνέχεια) τα περισσότερα υψίσυχνα κύματα να αποσβένονται με σημαντικά γρηγορότερο ρυθμό απ'ότι τα χαμηλόσυχνα κύματα στο θαλασσινό νερό.

Ο *συντελεστής απορρόφησης* (attenuation coefficient) χαρακτηρίζει το ποσοστό απορρόφησης της ακουστικής ενέργειας στο θαλασσινό νερό ανά μονάδα αποστάσεως διάδοσης. Συνήθως ο συντελεστής αυτός εκφράζεται σε μονάδες dB/km. Στο Σχήμα 14 παρουσιάζεται η τυπική μορφή του συντελεστή απορρόφησης της ηχητικής ενέργειας στο θαλασσινό νερό συναρτήσει της συχνότητας, όπως αυτός προκύπτει από τον ακόλουθο (εμπειρικό) τύπο των Francois και Garrison (1982), για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας, της αλατότητας, του βάθους και του pH του θαλασσινού νερού:

$$a [dB / km] = \left(A_1 + A_2 \frac{F_2}{(F_2)^2 + f^2} + A_3 \frac{F_3}{(F_3)^2 + f^2} \right) \cdot f^2.$$

Στην ανωτέρω σχέση οι επιμέρους επιδράσεις από την περιεκτικότητα του θαλασσινού νερού σε γλυκό νερό, σε διαλυμένα άλατα και από την οξύτητα δίδονται ως ακολούθως:

Επιδράσεις γλυκού νερού (T : Θερμοκρασία σε deg C)

$$A_1 = 4.94 \cdot 10^{-4} - 2.6 \cdot 10^{-5} T + 9.1 \cdot 10^{-7} T^2 - 1.5 \cdot 10^{-8} T^3$$

Επιδράσεις MgSO_4 s (S : Αλατότητα (ppt), z : Βάθος (m), T : Θερμοκρασία)

$$F_2 = \frac{8.17 \cdot 10^{[8-1990/(273+T)]}}{1+0.0018(S-35)}$$

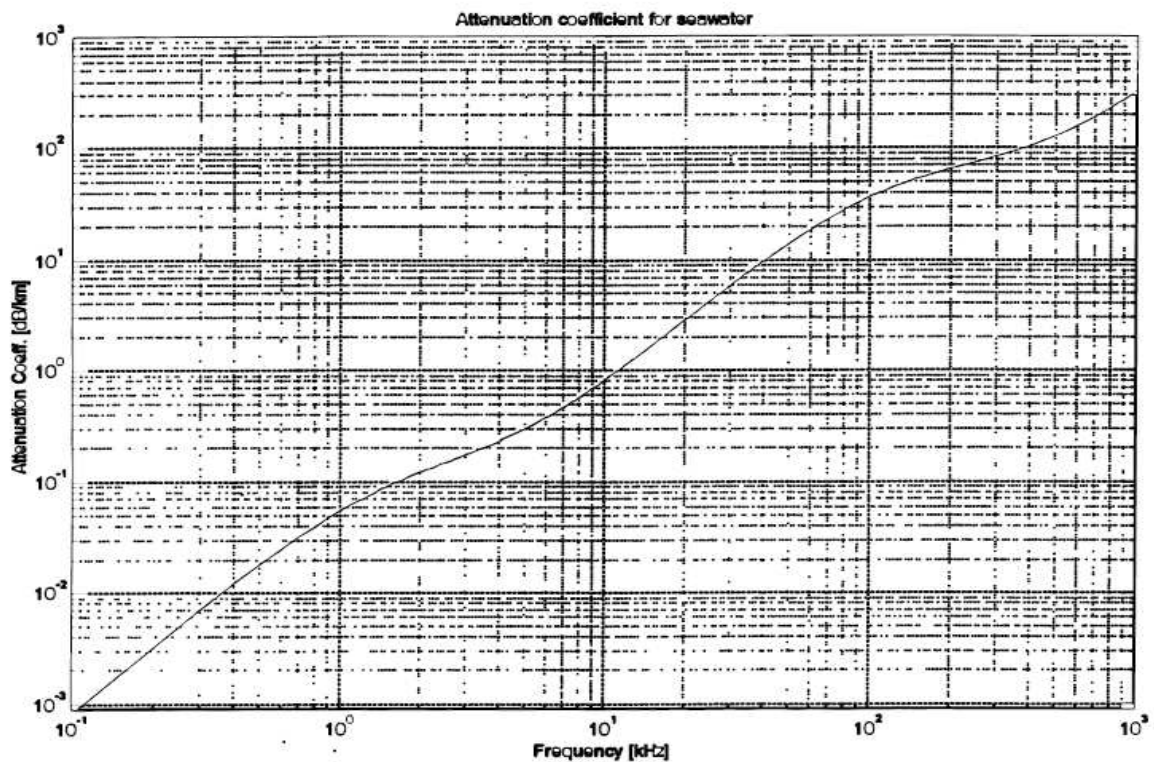
$$A_2 = \frac{21.44S(1+0.025T)}{1412+3.21T+1.19S+0.0167z}$$

Επιδράσεις βορικού οξέως (pH)

$$F_3 = 2.8\sqrt{S/35} \cdot 10^{[4-1245/(273+T)]}$$

$$A_3 = \frac{8.86}{1412+3.21T+1.19S+0.0167z} \cdot 10^{[0.78pH-5]}$$

Ευκολα αντιλαμβάνεται κανείς από το Σχήμα 14 τις δραματικές επιπτώσεις της συχνότητας στην απόσβεση ενός ηχητικού κύματος στην θάλασσα. Για παράδειγμα, αύξηση της συχνότητας από 1 kHz σε 10 kHz έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του συντελεστή απορρόφησης κατά περίπου 15 φορές !!



Σχήμα 14: Συντελεστής απορρόφησης του θαλασσινού νερού, όπως υπολογίζεται από την εμπειρική σχέση των Francois & Garrison (1982) για θερμοκρασία θαλασσινού νερού $T = 15^\circ C$, αλατότητα $S = 35\text{‰}$, $pH = 7.8$, και σε βάθος νερού 10m.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Brekhovkikh, L.M., Lysanov, Yu., 1982, *Fundamentals of ocean acoustics*, Springer-Verlag.
- Clay, C.S., Medwin, H., 1997, *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*, Wiley-Interscience.
- Dingemans, M.W., 1996, *Water wave propagation over uneven bottoms*, World Scientific, Advanced Series in Ocean Engineering, Vol. 13.
- Etter, P.C., 1991, *Underwater acoustic modeling*, Elsevier
- Francois, R.W., Garrison, G.R., 1982, Sound absorption based on ocean measurements, *Journal of the Acoustical Soc. of America*, **72**, pp. 1879-1890.
- Jensen, F.B., Kuperman, W.A., Porter, M.B., Schmidt, H., 1994, *Computational ocean acoustics*, AIP Series in Modern Acoustics and Signal Processing
- Le Blond, P.H., Mysak, L.A., 1978, *Waves in the ocean*, Elsevier Oceanography Series.
- Massel, S.R., 1989, *Hydrodynamics of coastal zones*, Elsevier Oceanography Series.
- Phillips, O.M., 1977, *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge University Press.
- Urlick, R.J., 1983, *Principles of underwater sound*, Mc Graw Hill.
- Wentz, G.M., 1962, *Acoustic ambient noise in the ocean: spectra and sources*, *Journal of the Acoustical Soc. of America*, **34**, pp. 1936-1956.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

- 2.1 Κύματα και κυματομορφές
- 2.2 Παραδείγματα κυματικών εξισώσεων σε μια χωρική διάσταση
- 2.3 Απλές μαθηματικές τεχνικές για τη μελέτη της μονοδιάστατης κυματικής κίνησης
- 2.4 Κυματική διάδοση σε δύο και τρεις χωρικές διαστάσεις
- 2.5 Απλές λύσεις κυματικών εξισώσεων σε δύο και τρεις διαστάσεις
- 2.6 Θεμελιώδεις λύσεις. Συναρτήσεις Green
- 2.7 Διάδοση του ήχου σε ομογενές περιβάλλον
- 2.8 Σκέδαση σε μη φραγμένο χωρίο
- 2.9 Αριθμητική λύση με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων

Σε ένα εισαγωγικό μάθημα κυματικής είναι φυσικό να ξεκινάει κανείς δίδοντας διάφορα παραδείγματα κυματικής κίνησης σε συγκεκριμένα απλά συστήματα, όπως π.χ., σειρά υλικών σημείων συνδεομένων μεταξύ τους με ελατήρια, τεντωμένο σχοινί, χορδή κιθάρας, ηχητικός σωλήνας κ.λπ.. Το μάθημα που υποστηρίζουν αυτές οι σημειώσεις απευθύνεται σε φοιτητές που έχουν διδαχθεί Γενική Φυσική σε Πανεπιστημιακό επίπεδο, και γνωρίζουν καλά Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό συναρτήσεων μιας και πολλών μεταβλητών. Επομένως, μια αναλυτική συζήτηση απλών παραδειγμάτων θα ήταν μάλλον μια ανιαρή επανάληψη γνωστών πραγμάτων, η οποία θα μείωνε το ενδιαφέρον του ακροατή (αναγνώστη) και θα κλόνηζε την προσδοκία της απόκτησης νέας γνώσης.

Από την άλλη μεριά, ένα προχωρημένο μάθημα κυματικής θα έχανε μεγάλο μέρος της ουσίας του και του ενδιαφέροντός του, αν εστιάζετο αποκλειστικά στην ανάλυση σε βάθος της κυματικής κίνησης σε ειδικές (πιθανώς δύσκολες ή περίπλοκες) περιπτώσεις, τονίζοντας έτσι την ετερότητα (διαφορετικότητα) μάλλον, παρά το κοινό υπόβαθρο των φυσικών εννοιών και των μαθηματικών μεθόδων, που εφαρμόζονται σε όλα (σχεδόν) τα κυματικά προβλήματα.

Στο παρόν κεφάλαιο προσπαθούμε να ανταποκριθούμε στην ανάγκη μιας γενικής εισαγωγής στη μελέτη της κυματικής κίνησης με έμφαση στις ιδέες, χωρίς όμως να αποφύγουμε το τμήμα του μαθηματικού φορμαλισμού που είναι ουσιώδες. Στο εδάφιο 2.1 δίδεται έμφαση στη μελέτη *της κινηματικής της κυματικής κίνησης*, δηλαδή στη τη μελέτη της μορφής και της δομής των συναρτήσεων χώρου-χρόνου οι οποίες αναπαριστούν κυματικές κινήσεις. Οι βασικές ιδέες και οι βασικές μαθηματικές τεχνικές της κυματικής κινηματικής είναι ανεξάρτητες της δυναμικής του εκάστοτε κυματικού φαινομένου, με συνέπεια να εφαρμόζονται (σχεδόν) σε όλα τα κυματικά προβλήματα.

Το εδάφιο 2.2 αρχίζει με την κινηματική παραγωγή της εξίσωσης D' Alembert ($\eta_{,tt} - c^2 \cdot \eta_{,xx} = 0$). Αποδεικνύεται δηλαδή ότι κάθε κυματική διαταραχή η οποία διαδίδεται αναλλοίωτη (διατηρεί τη μορφή της), και με σταθερή ταχύτητα, οφείλει να ικανοποιεί την εξίσωση D' Alembert. Καταδεικνύονται έτσι οι εξής δύο, εξαιρετικά σημαντικές, θέσεις: (i) η κύρια πληροφορία την οποία εισάγουν οι δυναμικοί νόμοι σε κυματικά φαινόμενα που διέπονται από την εξίσωση D' Alembert αφορά την σταθερά c (ταχύτητα διάδοσης του κύματος), που υπεισέρχεται στην εξίσωση, και (ii) η εξίσωση D' Alembert⁽¹⁾ είναι συμβατή μόνο με μια πολύ απλουστευμένη κινηματική. Θα πρέπει λοιπόν να υπάρχει πλήθος άλλων κυματικών εξισώσεων, οι οποίες να είναι συμβατές με τη γενικότερη κινηματική της κυματικής κίνησης. Στη συνέχεια του εδαφίου 2.2 παρουσιάζεται ένας μεγάλος αριθμός κυματικών εξισώσεων⁽²⁾ οι οποίες περιγράφουν ελαστικά, ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά και υδάτινα κύματα, και συζητούνται οι ομοιότητες και οι διαφορές τους. Δεν δίδεται εδώ αναλυτική παραγωγή των εξισώσεων αυτών από τους αντίστοιχους φυσικούς νόμους (πράγμα το οποίο σε μερικές περιπτώσεις είναι εξαιρετικά επίπονο και μακροσκελές), αλλά περιγράφονται με σαφήνεια οι φυσικοί χαρακτήρες των φαινομένων που μοντελοποιούνται μέσω των εξισώσεων.

Στο εδάφιο 2.3 παράγονται και σχολιάζονται απλές λύσεις ορισμένων απλών κυματικών εξισώσεων. Με τη βοήθεια αυτών, διάφορα φαινόμενα, τα οποία συζητήθηκαν προηγουμένως μόνον ποιοτικά, ποσοτικοποιούνται και καθίστανται σαφέστερα.

Το εδάφιο 2.4 είναι αφιερωμένο στη μελέτη τριών γενικών αρχών της κυματικής: της αρχής της υπέρθεσης, της αρχής των Huygens-Fresnel, και της αρχής των Ήρωνος-Fermat. Οι αρχές διατυπώνονται προσεκτικά, σε διάφορα επίπεδα περιπλοκότητας και γενικότητας, και εφαρμόζονται σε απλά (αλλά και σε ... όχι απλά και άρα περισσότερο ενδιαφέροντα) παραδείγματα. Επίσης, συζητείται το πεδίο εφαρμογής τους, και τονίζεται ότι η εφαρμοσιμότητά τους είναι ανεξάρτητη από το είδος των κυμάτων (ακουστικά, υδάτινα, ηλεκτρομαγνητικά, κ.λπ.), εξαρτάται δε από μαθηματικές συνθήκες οι οποίες μπορεί να ισχύουν (ή να μην ισχύουν) σε κάθε είδους φυσικό φαινόμενο. Μεγαλύτερη έμφαση δίδεται στην αρχή των Ήρωνος-Fermat (αρχή του Στασίμου Χρόνου), για δύο λόγους. Αφ' ενός, διότι η αρχή αυτή χρησιμοποιείται συστηματικά σε προβλήματα κυματικής διάδοσης στο περιβάλλον⁽³⁾ (υδρόσφαιρα, ατμόσφαιρα, γαιόσφαιρα), και, αφετέρου, διότι διατυπώνεται ως μεταβολική αρχή (η πρώτη μεταβολική αρχή που συναντάμε σ' αυτό το βιβλίο⁽⁴⁾). Έτσι, με αυτήν την ευκαιρία, παρουσιάζουμε μια αρκετά διεξοδική τοποθέτηση και ανάλυση των συναφών μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν και στη συνέχεια, σε σχέση με άλλες μεταβολικές αρχές που θα συναντήσουμε (π.χ., την αρχή του Hamilton).

Τέλος, στο εδάφιο 2.5 μελετώνται τέσσερα γενικά κυματικά φαινόμενα: η ανάκλαση, η διάθλαση, η περίθλαση και η συμβολή των κυμάτων.

2.1 Κύματα και κυματομορφές

Το παρόν εδάφιο είναι διαρθρωμένο ως μια σειρά ερωτήσεων και απαντήσεων. Κατά κανόνα, οι απαντήσεις είναι συνοπτικές και γενικές, και αποσκοπούν κυρίως (όπως και ολόκληρο το κεφάλαιο αυτό) στο να βοηθήσουν τον αναγνώστη:

- i) Να διαβλέψει την ενότητα και γενικότητα διαφόρων εννοιών, αρχών και μαθηματικών χειρισμών, που υπεισέρχονται λίγο ως πολύ σε κάθε περίπτωση κυματικής κίνησης,
- ii) Να αποκαταστήσει ορισμένες συνηθισμένες παρανοήσεις και περιοριστικές οπτικές, που οφείλονται στην αποσπασματική εισαγωγή εννοιών και μεθόδων στα πλαίσια μιας πρώτης εισαγωγής σε κυματικά φαινόμενα και, τέλος,
- iii) Να διευρύνει τον αντιληπτικό του ορίζοντα, εισάγοντας και σχολιάζοντας έννοιες και φαινόμενα που συνήθως δεν αναφέρονται σε εισαγωγικό επίπεδο.

Ας σημειωθεί, πάντως, ότι στα πλαίσια ορισμένων απαντήσεων, αναπτύσσονται απλά αλλά σημαντικά μαθηματικά εργαλεία, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον στη συνέχεια, και εισάγονται (με σαφήνεια και πληρότητα) θεμελιώδεις έννοιες της κυματικής, η γνώση των οποίων είναι απολύτως απαραίτητη για την αφομοίωση της ύλης που ακολουθεί.

2.1.1 Γενικά

Ερώτηση Γ.1: Τί είναι κύμα;

Κύμα είναι οποιαδήποτε διαταραχή που διαδίδεται στο χώρο με πεπερασμένη ταχύτητα.

Ανάλογα με τις συνθήκες τα κύματα μπορούν να διαδίδονται σε μία, δύο ή τρεις διαστάσεις.

Ερώτηση Γ.2: Τί λογής είναι η διαταραχή που διαδίδεται;

Η διαταραχή που διαδίδεται μπορεί να είναι *οποιασδήποτε φύσεως*. Παραδείγματα δίδονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 1: Μερικά είδη κυμάτων

<i>Είδος διαταραχής</i>	<i>Ονομασία κύματος</i>
Μετατόπιση υλικού στοιχείου	Μηχανικά κύματα
Μεταβολή των χαρακτηριστικών του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) πεδίου	H/M κύματα
Μεταβολή της θερμοκρασίας	Θερμικά κύματα
Μεταβολή της συγκέντρωσης μιας φάσεως σε πολυφασικό σύστημα	Χημικά κύματα
Μεταβολή της ροής των αυτοκινήτων σε ένα οδικό σύστημα	Κυκλοφοριακά κύματα
Μεταβολή της πυκνότητας του πληθυσμού ενός είδους σε ένα οικοσύστημα	Πληθυσμικά κύματα
Μεταβολή της πιθανότητας εμφάνισης μιας κατάστασης	Κύματα πιθανότητας

Σχόλιο 1: Τα κύματα πιθανότητας μπορούν να εμφανισθούν τόσο σε κβαντομηχανικά όσο και σε κλασσικά συστήματα.

Σχόλιο 2: Τα κύματα πιθανότητας μπορούν να θεωρηθούν ως μία μετακατηγορία κυμάτων, που αφορά οποιαδήποτε κατηγορία διαταραχής. Δηλαδή, μπορεί να έχουμε ντετερμινιστικά μηχανικά κύματα και στοχαστικά μηχανικά κύματα, ντετερμινιστικά H/M κύματα και στοχαστικά H/M κύματα κ.ο.κ.

Ερώτηση Γ.3: Πώς διαφοροποιούνται τα μηχανικά κύματα σε σχέση με την κατάσταση (αέριο, υγρό, στερεό) του μέσου διάδοσης;

Θα πρέπει κατ' αρχήν να διευκρινήσουμε με ποιόν τρόπο θεωρούμε (φανταζόμαστε, μοντελοποιούμε) το υλικό μέσο διάδοσης. Γενικώς, υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης: η *διακριτή θεώρηση* και η *συνεχής θεώρηση*. Σύμφωνα με την πρώτη θεώρηση το υλικό μέσο νοείται ως σύστημα διακριτών υλικών στοιχείων, στα οποία αντιστοιχούν διακεκριμένες μάζες m_i , $i=1,2,\dots$, και τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με κάποιον τρόπο (αμελητέα αλληλεπίδραση στα αέρια, συγκεκριμένοι μηχανισμοί αλληλεπίδρασης στα υγρά και τα στερεά).

Σύμφωνα με τη δεύτερη θεώρηση, του *συνεχούς μέσου*, η μάζα του υλικού μέσου θεωρείται συνεχώς κατανομημένη στο χώρο και περιγράφεται με τη βοήθεια της πυκνότητάς της $\rho(\mathbf{r}, t)$, η οποία νοείται ως συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση ως προς τη χωρική μεταβλητή $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Και στην περίπτωση αυτή μιλάμε για υλικά στοιχεία, η μάζα των οποίων εκφράζεται όμως από τη σχέση $dm = \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$, όπου $d\mathbf{r} = dx_1 dx_2 dx_3$ είναι ο στοιχειώδης όγκος τον οποίο καταλαμβάνουν. Στη θεώρηση αυτή, η μετακίνηση των υλικών στοιχείων εκφράζεται επίσης μέσω μιας συνεχούς ή κατά τμήματα συνεχούς συναρτήσεως $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}, t)$, και αντιστοίχως εκφράζονται η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η πίεση, η θερμοκρασία, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις που αναπτύσσονται στο συνεχές υλικό μέσο. Ας

σημειωθεί εδώ ότι, στα πλαίσια διαφόρων μοντελοποιήσεων, η χωρική μεταβλητή r μπορεί να θεωρηθεί είτε μονοδιάστατη (οπότε συνήθως συμβολίζεται με x), είτε διδιάστατη ($r = (x_1, x_2) = (x, y)$), είτε τριδιάστατη, όπως προαναφέρθηκε. Διακρίνουμε έτσι, **μονοδιάστατα**, **διδιάστατα** και **τριδιάστατα υλικά μέσα**⁽⁵⁾. Η θεώρηση του **συνεχούς μέσου** είναι πολύ ικανοποιητική για τη μελέτη όλων σχεδόν των κυματικών φαινομένων που εξελίσσονται σε μεσαίες και μεγάλες κλίμακες χώρου, όπως είναι τα κύματα που αναπτύσσονται και διαδίδονται στο περιβάλλον. Περισσότερα σχετικά με τη θεώρηση (μοντελοποίηση) αυτή θα αναπτυχθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Επιστρέφουμε τώρα στην Ερώτηση 3, **έχοντας κατά νου την εικόνα του τριδιάστατου συνεχούς μέσου**. Το αέριο υλικό μέσο αντιδρά μόνο στις μεταβολές του όγκου του. Ως εκ τούτου, στα αέρια διαδίδονται μόνο **κύματα πίεσεως**, τα οποία ονομάζονται και **ακουστικά κύματα**, εφ' όσον τα κύματα αυτά, σε μια ευρεία περιοχή συχνοτήτων, διεγείρουν το αισθητήριο της ακοής.

Κύματα πίεσεως αναπτύσσονται και διαδίδονται και στα υγρά και τα στερεά, δεδομένου ότι και αυτά αντιδρούν στις μεταβολές του όγκου τους. Τα στερεά αντιδρούν όμως σε κάθε μεταβολή του σχήματός τους. Ως εκ τούτου, σε αυτά διαδίδονται και **διατμητικά κύματα** (shear waves), τα οποία δεν συνδέονται με μεταβολές πίεσεως, αλλά μόνο με μεταβολές του σχήματος των υλικών στοιχείων. Διατμηματικά κύματα αναπτύσσονται και στα υγρά όταν η εσωτερική τριβή δεν είναι αμελητέα. Δεν διαδίδονται όμως σε μεγάλες αποστάσεις επειδή η ενέργεια απορροφάται από τις διατμηματικές τάσεις, οι οποίες, στα υγρά, είναι ανάλογες με την κλίση (βαθμίδα, gradient) της ταχύτητας.

Τέλος, τόσο τα υγρά όσο και τα στερεά, έχουν την ιδιότητα να εμφανίζουν διαχωριστικές ή/και ελεύθερες επιφάνειες. Η **διαχωριστική επιφάνεια** (ή **διεπιφάνεια**) αποτελεί το σύνορο μεταξύ δύο περιοχών υλικού μέσου με διαφορετικές ιδιότητες, π.χ. διαφορετική πυκνότητα. Η **ελεύθερη επιφάνεια** αποτελεί το σύνορο στο οποίο περατούται το υλικό μέσο, είναι δηλαδή μια διεπιφάνεια μεταξύ του μέσου και του κενού. Η ύπαρξη διεπιφανειών και ελευθέρων επιφανειών επιτρέπει τη δημιουργία μιας ειδικής κατηγορίας μηχανικών κυμάτων, που διαδίδονται μόνον κατά μήκος αυτών των επιφανειών, και τα οποία ονομάζονται **κύματα διεπιφάνειας** ή **κύματα ελεύθερης επιφάνειας**, αντιστοίχως.

Η ανωτέρω συζήτηση, σχετικά με τα διάφορα είδη διαταραχής που εμφανίζονται στην περίπτωση διάδοσης μηχανικών κυμάτων δια μέσου αερίων, υγρών ή στερεών, συνοψίζεται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Μηχανικά κύματα

Είδος διαταραχής	Ονομασία κύματος
Μεταβολή όγκου (σε αέρα, υγρά, στερεά)	Κύματα πίεσεως ή ακουστικά κύματα ή P -κύματα (pressure waves ή acoustic waves ή P -waves)
Μεταβολή σχήματος (δηλ. μεταβολή διατμητικών παραμορφώσεων-τάσεων) (σε στερεά)	Διατμητικά κύματα ή S -κύματα (shear waves)
Μεταβολή βαθμίδας ταχύτητας (δηλ. μεταβολή διατμητικών τάσεων) (σε υγρά)	Διατμητικά κύματα ή S -κύματα (shear waves)
Μεταβολή σχήματος της διεπιφάνειας μεταξύ στερεών, υγρών ή υγρού-στερεού	Κύματα διεπιφάνειας (Interfacial waves)
Μεταβολή σχήματος της ελεύθερης επιφάνειας υγρού ή στερεού	Επιφανειακά κύματα (surface waves) Υδάτινα κύματα (water waves) (στο νερό) Κύματα Rayleigh (στα στερεά)

Ερώτηση Γ.4: Υπάρχουν, μήπως, κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη που διαδίδονται μαζί με τη διαταραχή, σε κάθε περίπτωση κυματικής κίνησης;

Πράγματι, υπάρχουν δύο τέτοια μεγέθη και αυτά είναι: *ενέργεια* και *πληροφορία*. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση κυματικής κίνησης λαμβάνει χώρα

- Διάδοση ενέργειας και
- Διάδοση πληροφορίας.

Αν και σχεδόν πάντοτε οι δύο αυτοί χαρακτήρες συνυπάρχουν, σε αρκετές περιπτώσεις (εφαρμογές) ένας εξ αυτών είναι ο επικρατέστερος και χαρακτηρίζει το αντίστοιχο κυματικό φαινόμενο. Με αυτήν την έννοια μπορούμε να μιλάμε για

- Κύματα ενέργειας και
- Κύματα πληροφορίας (ή σήματα).

Ως κύματα ενέργειας μπορούμε, π.χ., να θεωρήσουμε τους ανεμογενείς θαλάσσιους κυματισμούς και τα σεισμικά κύματα. Ως κύματα πληροφορίας μπορούμε, να θεωρήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (π.χ. στις ραδιοφωνικές συχνότητες) και τα ακουστικά κύματα. Βεβαίως, και τα θαλάσσια και τα σεισμικά κύματα μεταφέρουν πληροφορία (μπορείτε να δώσετε παραδείγματα;), καθώς επίσης και τα ηλεκτρομαγνητικά και τα ακουστικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια!

Σχόλιο: Καμιά φορά, σε εισαγωγικά βιβλία γενικής κυματικής, με σκοπό να τονισθεί το γεγονός ότι η κυματική μετάδοση δεν συνδέεται ουσιαστικά με μεταφορά μάζας, αναφέρεται ότι κατά τη διάδοση της κυματικής διαταραχής δεν συμβαίνει μεταφορά μάζας. Αυτό, αν και αποτελεί το γενικό κανόνα, δεν είναι πάντοτε σωστό. Για παράδειγμα, κατά τη διάδοση υδατίνων κυμάτων στην επιφάνεια της θάλασσας συμβαίνει και μεταφορά μάζας! Κατά συνέπεια, η σωστή διατύπωση είναι ότι, *η μεταφορά μάζας δεν αποτελεί ουσιώδες κυματικό χαρακτηριστικό*.

Ερώτηση Γ.5: Ποιά είναι η μορφή της διαδιδόμενης διαταραχής; Ποιά είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της μορφής μιας κυματικής διαταραχής;

Απάντηση: Γενικώς, **η μορφή της διαδιδόμενης διαταραχής μπορεί να είναι οποιαδήποτε**. Για λόγους μεθοδολογικούς είναι όμως σκόπιμο να διακρίνουμε και να σχολιάσουμε τέσσερεις συγκεκριμένους τύπους κυματικών διαταραχών (κυματομορφών):

- Αρμονική κυματομορφή,**
- Περιοδική κυματομορφή,**
- Εντοπισμένη κυματομορφή** (ή **κυματοπακέτο** ή **κυματοπαλμός**),
- Κρουστική κυματομορφή.**

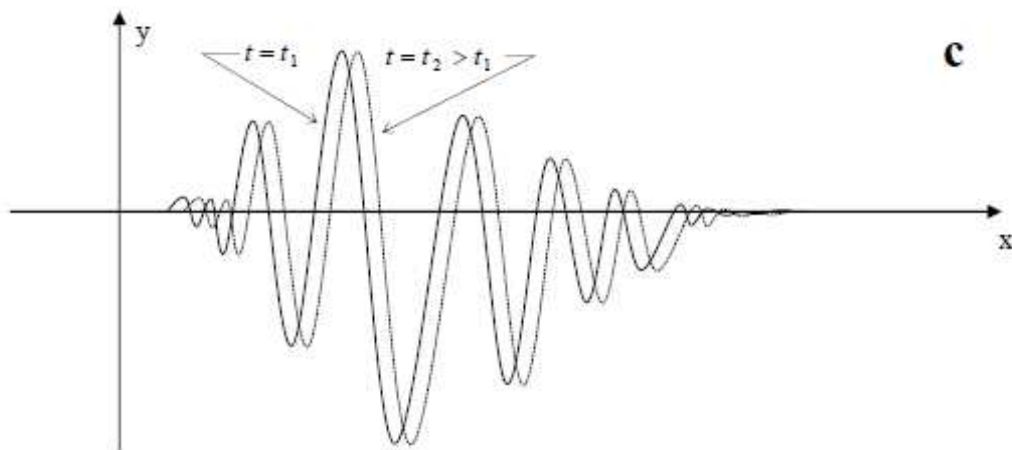
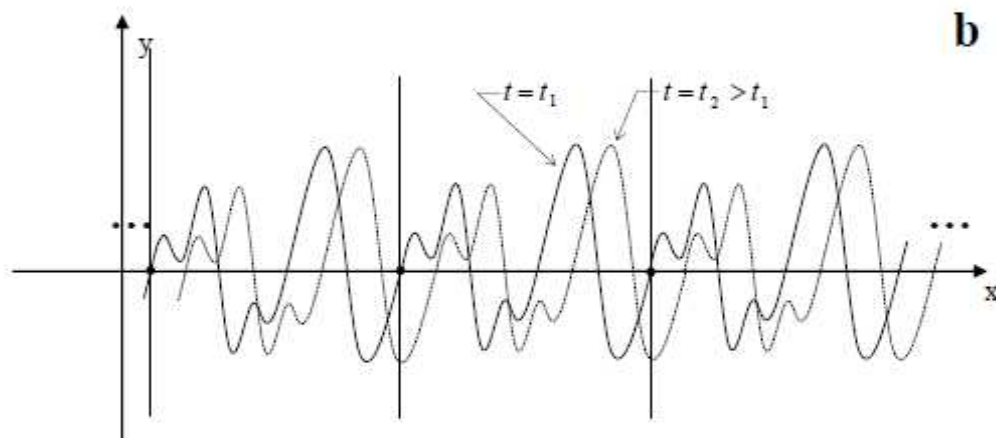
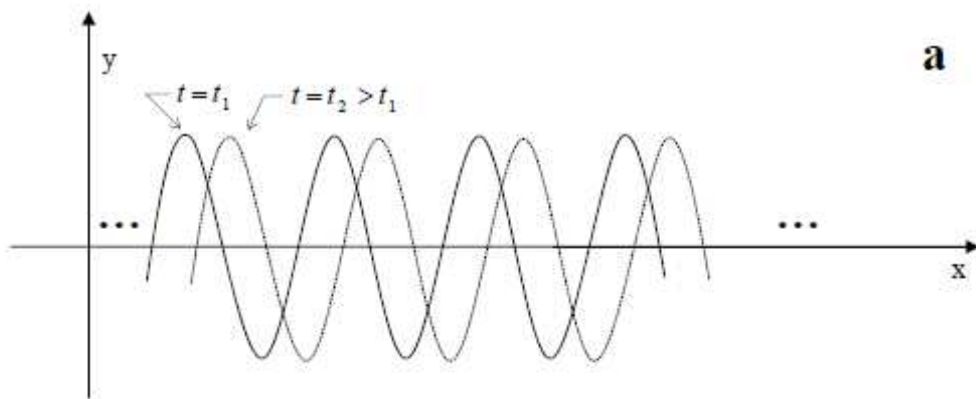
Δύο διαδοχικά στιγμιότυπα μιας αρμονικής, μιας περιοδικής και μιας εντοπισμένης κυματομορφής φαίνονται στο Σχήμα 1. Μην ξεχνάτε ότι οι κυματομορφές "τρέχουν" στο χώρο, καθώς περνά ο χρόνος! Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται σκαρίφημα και φωτογραφία υδραυλικού άλματος (hydraulic jump, bore), το οποίο αποτελεί παράδειγμα κρουστικής κυματομορφής, που εμφανίζεται στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού ή σε εσωτερική διαχωριστική επιφάνεια στρωματοποιημένου υγρού.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι περιοδικές κυματομορφές αναπαρίστανται με τη βοήθεια **σειρών αρμονικών κυματομορφών** (σειρών Fourier), ενώ οι εντοπισμένες κυματομορφές αναπαρίστανται με τη βοήθεια **ολοκληρωμάτων αρμονικών κυματομορφών** (ολοκληρωμάτων Fourier).

Ως κύρια χαρακτηριστικά της μορφής μιας κυματικής διαταραχής συνήθως αναφέρονται το μήκος κύματος, η περίοδος κύματος, και το πλάτος κύματος. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι τα χαρακτηριστικά αυτά είναι σαφώς και μονοσημάντως ορισμένα μόνο στην περίπτωση περιοδικών (άρα και αρμονικών) κυματομορφών.

Στην περίπτωση αυτή, το **μήκος κύματος** ορίζεται ως η περίοδος (ως προς τη χωρική μεταβλητή) του "στιγμιότυπου" της κυματομορφής που λαμβάνεται για $t = t_0 = \text{σταθ.}$. Η **περίοδος κύματος** ορίζεται ως η περίοδος της ταλάντωσης που επάγει η κυματική διαταραχή σε μια σταθερή θέση στο χώρο $x = x_0 = \text{σταθ.}$. Το **πλάτος κύματος** ορίζεται ως η μέγιστη απόκλιση από τη θέση ισορροπίας (μέση θέση ή κατάσταση του συστήματος όταν δεν διαδίδεται η κυματική διαταραχή). Η γενίκευση των ανωτέρω κυματικών χαρακτηριστικών σε **σχεδόν περιοδικά κύματα** είναι άμεση, αν ερμηνεύσουμε την περιοδικότητα τοπικά και κατά προσέγγιση. Βέβαια, στην περίπτωση αυτή, τα κυματικά χαρακτηριστικά (μήκος κύματος, περίοδος, πλάτος κύματος) θα μεταβάλλονται στο χώρο και στο χρόνο.

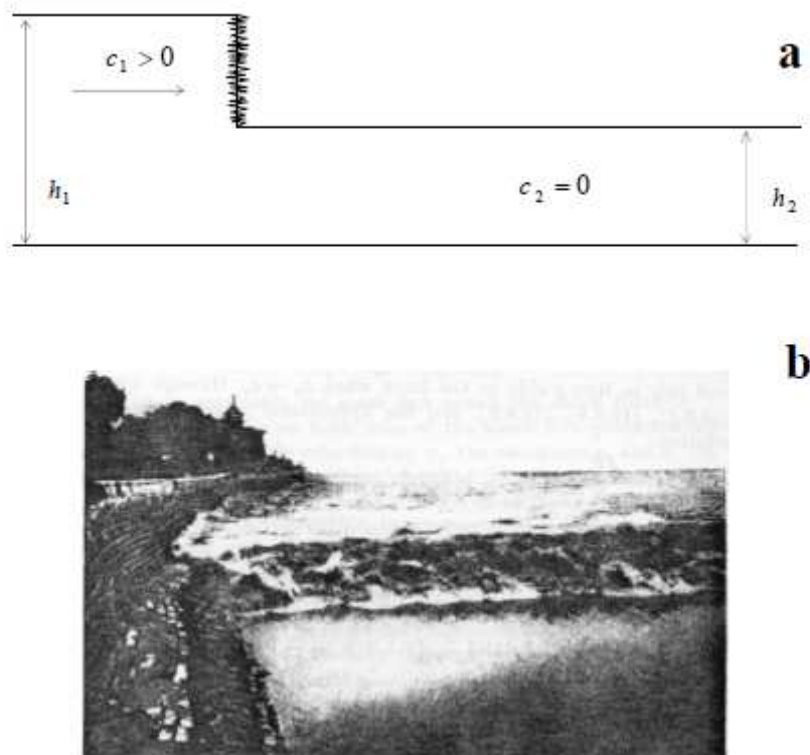
Η γενίκευση των εννοιών του μήκους, της περιόδου και του πλάτους του κύματος σε ορισμένες γενικότερες (ακανόνιστες) κυματομορφές είναι δυνατή (και χρήσιμη), αλλά αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα, η λύση του οποίου εξαρτάται από τη φύση της κυματικής διαταραχής και από τη μαθηματική μοντελοποίηση που χρησιμοποιείται. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τους **ανεμογενείς θαλάσσιους κυματισμούς**, οι οποίοι μοντελοποιούνται ως **στοχαστικές διαδικασίες** (στοχαστικές ή τυχαίες κυματομορφές). Στην περίπτωση αυτή οι έννοιες του μήκους, της περιόδου και του πλάτους κύματος ορίζονται και πάλι, αλλά τώρα με τη μορφή τυχαίων μεταβλητών! Με τη θεώρηση αυτή και τις εφαρμογές της θα ασχοληθούμε στο μάθημα "Στοχαστική μοντελοποίηση και πρόβλεψη θαλασσίων συστημάτων".



Σχήμα 1 (2.1): Αρμονική (a), περιοδική (b) και εντοπισμένη (c) κυματομορφή

Πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι σε ορισμένες κυματομορφές οι έννοιες αυτές (μήκος, πλάτος και περίοδος κύματος) δεν έχουν νόημα. Σχετικά παραδείγματα είναι οι κρουστικές κυματομορφές, όπως, επί παραδείγματι, το υδραυλικό πλήγμα που διαδίδεται μέσα σε σωλήνες νερού, ή το υδραυλικό άλμα (πλήγμα) που αναπτύσσεται στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού (βλ. Σχήμα 2), ή το κρουστικό κύμα που αναπτύσσεται κατά την υπερηχητική πτήση αεροπλάνου.

Σχόλιο: Βεβαίως υπάρχουν και άλλες κυματομορφές που δεν καλύπτονται από τις τέσσερες κατηγορίες που περιγράφονται ανωτέρω. Να δώσετε σχετικά παραδείγματα.



Σχήμα 2 (2.1): Κρουστική κυματομορφή διαδιδόμενη στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού "υδραυλικό άλμα ή υδραυλικό πλήγμα, Hydraulic jump, bore). (a): Σκαρίφημα (b): Φωτογραφία υδραυλικού άλματος στον ποταμό Tsiensiang. (scanned from J.J. Stoker, *Water Waves: The mathematical theory with applications*", pp. 368.)

Ερώτηση Γ.6: Ποιό είναι το φυσικό νόημα των σταθερών k και ω , στην περίπτωση των απλών αρμονικών κυματομορφών

$$\eta_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t) \text{ και } \eta_2(x,t) = A_2 \sin(kx - \omega t);$$

Απάντηση: Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση της "συνημιτονικής" κυματομορφής $A_1 \cos(kx - \omega t)$, διότι τόσο η μέθοδος όσο και τα αποτελέσματα που θα βρούμε, εφαρμόζονται αναλλοίωτα και στην περίπτωση της "ημιτονικής" κυματομορφής $A_2 \sin(kx - \omega t)$ ⁽⁶⁾. Για την εύρεση της φυσικής σημασίας της σταθεράς k , θεωρούμε ένα "στιγμιότυπο" της κυματομορφής για $t = t_0 = \text{σταθερό}$, οπότε παίρνουμε τη συνάρτηση $y(x) = \eta_1(x, t_0) = A_1 \cos(kx - \omega t_0)$ ή $y(x) = A_1 \cos(kx + \varepsilon)$. Προφανώς, η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική ως προς x , με περίοδο, έστω, λ . Η περίοδος λ της $y(x)$ είναι το **μήκος κύματος** της αρμονικής κυματομορφής. Η σχέση

$y(x) = y(x + \lambda)$ ισοδυναμεί με την $\cos(kx + \varepsilon) = \cos(k(x + \lambda) + \varepsilon)$, εκ της οποίας προκύπτει

$$[k(x + \lambda) + \varepsilon] - (kx + \varepsilon) = 2\pi \Leftrightarrow k\lambda = 2\pi.$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η σταθερά k σχετίζεται με το μήκος κύματος λ της αρμονικής κυματομορφής ($k = 2\pi/\lambda$). Στην περίπτωση αυτή, η σταθερά k ονομάζεται **κυματικός αριθμός** (ή **κυματαριθμός**).

Για τη εύρεση της φυσικής σημασίας της σταθεράς ω , θεωρούμε τη χρονική εξέλιξη της διαταραχής σε μια ορισμένη θέση στο χώρο $x = x_0 = \text{σταθερό}$, οπότε παίρνουμε τη συνάρτηση $y(t) = \eta_1(x_0, t) = A_1 \cos(kx_0 - \omega t)$ ή $y(t) = A_1 \cos(\omega t + \varepsilon)$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική ως προς t με περίοδο, έστω, T . Η περίοδος T της $y(t)$ είναι η **περίοδος κύματος** (περίοδος της αρμονικής κυματομορφής). Η σχέση $y(t) = y(t + T)$ ισοδυναμεί με την $\cos(\omega t + \varepsilon) = \cos(\omega(t + T) + \varepsilon)$, εκ της οποίας προκύπτει

$$[\omega(t + T) + \varepsilon] - (\omega t + \varepsilon) = 2\pi \Leftrightarrow \omega T = 2\pi.$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι η σταθερά ω σχετίζεται με την περίοδο της αρμονικής κυματομορφής ($\omega = 2\pi/T$). Η σταθερά ω ονομάζεται **κυκλική συχνότητα**, και είναι διαφορετική από τη **συχνότητα** $f = 1/T$ της κυματικής κίνησης. Προφανώς ισχύει η σχέση $\omega = 2\pi f$.

Ερώτηση Γ.7: Τα κυματικά φαινόμενα⁽⁷⁾ διακρίνονται σε **γραμμικά** και **μη-γραμμικά**. Ποιό είναι το βασικό κριτήριο μέσω του οποίου γίνεται αυτή η διάκριση;

Απάντηση: Η συνθήκη γραμμικότητας για οποιοδήποτε κυματικό (και όχι μόνον!) φαινόμενο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι κάθε μια διέγερση f_n (όταν δρα μόνη της) δημιουργεί την κυματική διαταραχή (πεδίο) $y_n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(f_n)$, $n = 1, 2$. Εάν επιδράσουν ταυτόχρονα (και αθροιστικά) οι διεγέρσεις f_1 και f_2 , δηλαδή εάν η διέγερση γίνει $f = f_1 + f_2$, δημιουργείται η κυματική διαταραχή $y(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f_1 + f_2)$. Εάν ισχύει η σχέση

$$y(\mathbf{x}, t) \equiv \mathcal{L}(f_1 + f_2) = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2) = y_1(\mathbf{x}, t) + y_2(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

για κάθε ζεύγος δυνατών διεγέρσεων f_1, f_2 , τότε το φαινόμενο είναι (λέγεται) γραμμικό. Εάν η σχέση (1) δεν ισχύει, τότε το φαινόμενο είναι (λέγεται) μη-γραμμικό.

Η συνθήκη (1) αναφέρεται επίσης ως **Αρχή της** (γραμμικής) **υπέρθεσης** (βλ. και εδάφιο 2.4.1). Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η αρχή της υπέρθεσης χαρακτηρίζει τα γραμμικά φαινόμενα.

Ερώτηση Γ.8: Πώς μπορούν να ταξινομηθούν περαιτέρω τα μη-γραμμικά κυματικά φαινόμενα;

Απάντηση: Ο χαρακτηρισμός ενός φαινομένου ως μη-γραμμικού είναι αποφαιτικός (αρνητικός). Δεν προσδιορίζει κατ' ουσίαν τί ιδιότητες *έχει* το φαινόμενο. Απλώς μας λέει ότι *δεν έχει* τη συγκεκριμένη ιδιότητα της γραμμικότητας. Με αυτήν την έννοια είναι ιδιαίτερα σημαντικό να προχωρήσουμε σε μια ταξινόμηση των μη-γραμμικών φαινομένων, με βάση συγκεκριμένες χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ας σημειωθεί ότι το θέμα δεν έχει απαντηθεί πλήρως, προς το παρόν. Αποτελεί ανοικτό θέμα έρευνας.

Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να αναφέρουμε μια κατηγορία μη-γραμμικών φαινομένων, η οποία χαρακτηρίζεται κατά θετικό τρόπο, από συγκεκριμένες ιδιότητες. Αυτή είναι η κατηγορία των *πολυωνυμικώς μη-γραμμικών φαινομένων*⁽⁸⁾ (polynomially non-linear phenomena). Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, θα διατυπώσουμε τον χαρακτηρισμό μόνον των τετραγωνικώς μη-γραμμικών φαινομένων.

Έστω ότι κάθε μια διέγερση f_n (όταν δρα μόνη της) δημιουργεί την κυματική διαταραχή $y_n(\mathbf{x}, t) = Q(f_n)$, $n = 1, 2, 3$. Εάν επιδράσουν ταυτόχρονα (και αθροιστικά) όλες τις διεγέρσεις f_1, f_2, f_3 , δηλαδή εάν η διέγερση γίνει $f = f_1 + f_2 + f_3$, τότε δημιουργείται η κυματικά διαταραχή $y(\mathbf{x}, t) = Q(f) = Q(f_1 + f_2 + f_3)$.

Το φαινόμενο θα λέγεται *τετραγωνικώς μη-γραμμικό* (ή *τετραγωνικό*) εάν ισχύει η σχέση

$$Q(f_1 + f_2 + f_3) = Q(f_1 + f_2) + Q(f_2 + f_3) + Q(f_3 + f_1) - Q(f_1) - Q(f_2) - Q(f_3), \quad (1)$$

για κάθε τριάδα δυνατών διεγέρσεων f_1, f_2, f_3 .

Με παρόμοιο, αν και πιο πολύπλοκο, τρόπο διατυπώνονται συνθήκες για την κυβική μη-γραμμικότητα και, γενικώς, για την *πολυωνυμική μη-γραμμικότητα τάξεως n* . Η συνθήκη της πολυωνυμικής μη-γραμμικότητας τάξεως $n + 1$ εμπλέκει την ταυτόχρονη (και αθροιστική) δράση n ανεξαρτήτων διεγέρσεων.

Ερώτηση Γ.9: Πώς ταξινομούνται τα (ντετερμινιστικά) κυματικά φαινόμενα ως προς τη χρονική εξάρτηση της διαταραχής;

Απάντηση: Χωρίς την απαίτηση να καλύψουμε κάθε δυνατή περίπτωση, μπορούμε να διακρίνουμε τρεις γενικές (και σημαντικές) κατηγορίες κυματικών φαινομένων, ως προς το είδος της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής:

- Τα *μεταβατικά* (transient) κυματικά φαινόμενα,
- Τα *χρονικώς περιοδικά* (time periodic) κυματικά φαινόμενα, με ιδιαίτερο σημαντική κατηγορία τα *χρονικώς αρμονικά* (time harmonic) φαινόμενα, και
- Τα *μόνιμα* (steady) κυματικά φαινόμενα.

Ως **μεταβατικά φαινόμενα** θεωρούμε αυτά που ξεκινούν από μια αρχική κατάσταση (συνήθως ηρεμία), εξελίσσονται κατά γενικό τρόπο στο χρόνο, και τέλος αποσβέννυνται.

Τα (χρονικώς) **περιοδικά φαινόμενα** έχουν ένα χαρακτήρα μονιμότητας. Στην περίπτωση αυτή, υποτίθεται ότι η αιτία (πηγή) της διαταραχής έχει χρονικώς περιοδική υφή και δρα διαρκώς (δηλαδή για μεγάλο χρονικό διάστημα), οπότε και το αποτέλεσμα (κυματική διαταραχή) είναι χρονικώς περιοδικό. Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση των (αυστηρώς) χρονικώς περιοδικών κυματικών φαινομένων, η διαταραχή καταλαμβάνει ολόκληρο το πεδίο (χώρο) στον οποίο μπορεί να διαδοθεί, πεπερασμένο ή άπειρο.

Τέλος, ως **μόνιμα κυματικά φαινόμενα** θεωρούμε αυτά τα οποία καθίστανται ανεξάρτητα του χρόνου ως προς κατάλληλο σύστημα αναφοράς (παρατηρητή). Ως ένα παράδειγμα αυτής της (κάπως ιδιότυπης) κατηγορίας κυματικών φαινομένων αναφέρουμε το σύστημα των κυματισμών που παράγει ένα πλοίο, λόγω της κίνησής του με σταθερή ταχύτητα σε ήρεμη θάλασσα (Kelvin ship wave pattern). Αυτό το σύστημα κυματισμών είναι μόνιμο (ανεξάρτητο του χρόνου) ως προς παρατηρητή επί του πλοίου. Βέβαια, το ίδιο σύστημα κυματισμών είναι μεταβατικό ως προς παρατηρητή ακίνητο ως προς τη Γη.

Σχόλιο 1: Η δεύτερη και η τρίτη κατηγορία αποτελούν συχνά εξιδανικεύσεις των πραγματικών φαινομένων. Είναι όμως πολύ χρήσιμες όσον αφορά το μαθηματικό χειρισμό των αντιστοίχων προβλημάτων.

Σχόλιο 2: Τα πραγματικά κυματικά φαινόμενα συνήθως εμφανίζουν και τους τρεις χαρακτήρες, αν και σε διαφορετικές κλίμακες χώρου-χρόνου.

Σχόλιο 3: Συχνά χρησιμοποιείται η ακόλουθη ορολογία. Στην περίπτωση μεταβατικής χρονικής εξάρτησης, λέμε ότι μελετάμε το φαινόμενο (πρόβλημα) στο **πεδίο του χρόνου**, ενώ στην περίπτωση (χρονικώς) αρμονικής εξάρτησης, λέμε ότι μελετάμε το φαινόμενο (πρόβλημα) στο **πεδίο συχνοτήτων**.

Ερώτηση Γ.10: Πώς διαφοροποιείται η μαθηματική μοντελοποίηση των κυματικών προβλημάτων, αναλόγως με το είδος της χρονικής εξάρτησης της διαταραχής;

Απάντηση: Στην περίπτωση των μεταβατικών φαινομένων, η μαθηματική μοντελοποίηση οδηγεί σε **προβλήματα αρχικών τιμών**. Απαιτείται, δηλαδή, η γνώση της αρχικής κατάστασης του εξεταζομένου συστήματος (του πεδίου), η οποία, σε συνδυασμό με τους νόμους που διέπουν τα φαινόμενα (π.χ., διαφορικές ή ολοκληρωδιαφορικές εξισώσεις), μας επιτρέπει να μελετήσουμε (προβλέψουμε) την εξέλιξή του στο χρόνο.

Περαιτέρω, και εφόσον τα κυματικά φαινόμενα εκτείνονται στο χώρο, αυτά υφίστανται και την επίδραση των συνοριακών επιφανειών, οι οποίες περιορίζουν το χωρικό πεδίο, καθώς και των διεπιφανειών, οι οποίες προσδιορίζουν ασυνέχειες παραμέτρων μέσα στο πεδίο. Κατά συνέπεια, τα μαθηματικά προβλήματα μέσω των οποίων μοντελοποιείται η κυματική κίνηση είναι, γενικώς, προβλήματα **αρχικών-συνοριακών τιμών** (initial-boundary value problems), στα οποία (ενδεχομένως) υπεισέρχονται και **συνθήκες συναρμογής** (matching conditions) στις διεπιφάνειες.

Στην περίπτωση των (χρονικώς) περιοδικών, καθώς και των μονίμων, κυματικών φαινομένων δεν τίθεται ζήτημα αρχικών τιμών. Ειδικά στην περίπτωση γραμμικών και (χρονικώς) αρμονικών φαινομένων, η χρονική εξάρτηση είναι τελείως συγκεκριμένης μορφής και, κατ' ουσίαν, απαλείφεται από τα αντίστοιχα μαθηματικά προβλήματα.

Έτσι, στην περίπτωση αυτή, τα αντίστοιχα μαθηματικά προβλήματα διατυπώνονται ως προβλήματα **συνοριακών τιμών** (ενδεχομένως, και με συνθήκες συναρμογής, εάν υπάρχουν διεπιφάνειες).

Ερώτηση Γ.11: Πώς μπορούμε να απαλείψουμε τη χρονική εξάρτηση από τα γραμμικά (χρονικώς) αρμονικά προβλήματα;

Απάντηση: Αυτό γίνεται εύκολα, με τη βοήθεια των αρμονικών συναρτήσεων $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ ή, κατά πιο συστηματικό τρόπο, με τη βοήθεια του μιγαδικού εκθετικού $\exp(-j\omega t)$ ⁽⁹⁾. Λόγω της μεγάλης χρησιμότητάς της, η όλη μεθοδολογία της απαλοιφής (αλγεβρικοποίησης) του χρόνου, στην περίπτωση αρμονικών κυμάτων, περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

Έστω $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ το (οποιοδήποτε) θεμελιώδες πεδιακό μέγεθος το οποίο αναπαριστά την κυματική διαταραχή. Εφ' όσον η χρονική εξάρτηση υποτίθεται αρμονική, μιας ορισμένης συχνότητας ω (**μονοχρωματικό κύμα**), η κυματική διαταραχή θα γράφεται στη μορφή

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_c(\mathbf{x}) \cdot \cos \omega t + \eta_s(\mathbf{x}) \cdot \sin \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (1)$$

όπου

$$\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) = \eta_c(\mathbf{x}) + j\eta_s(\mathbf{x}) \quad (2)$$

είναι το **μιγαδικό πλάτος** του χρονικά αρμονικού κύματος. Το μέγεθος $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ θα αναφέρεται επίσης και ως **μιγαδικό πεδίο**. Η χρήση του μιγαδικού πεδίου $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ δεν έχει κάποια ιδιαίτερη φυσική σημασία. Αποτελεί απλώς ένα βολικό τρόπο μαθηματικού χειρισμού της χρονικά αρμονικής εξάρτησης. Η μαθηματική ευκολία που προκύπτει με τη χρήση του μιγαδικού πεδίου $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ καθίσταται φανερή από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\eta_{,t}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega) \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (3\alpha)$$

$$\eta_{,tt}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (3\beta)$$

• • •

$$\frac{\partial^n \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t^n} = \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \quad (3\gamma)$$

οι οποίες δείχνουν την αντιστοιχία:

$$\text{Αν } \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \text{ είναι το μιγαδικό πλάτος του } \eta(\mathbf{x}, t),$$

$$\text{Τότε } (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \text{ είναι το μιγαδικό πλάτος του } \frac{\partial^n \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t^n}. \quad (4)$$

Με αυτόν τον τρόπο, στην περίπτωση (χρονικώς) αρμονικών κυματικών διαταραχών, η χρονική παράγωγος αλγεβρικοποιείται κατά πολύ απλό και συστηματικό τρόπο.

Ερώτηση Γ.12: Να μελετήσετε την ελεύθερη και την εξαναγκασμένη ταλάντωση *απλού γραμμικού ταλαντωτή*, με τη βοήθεια της μιγαδικής αναπαράστασης των χρονικώς αρμονικών μεγεθών.

Απάντηση: Θα δώσουμε μόνον μια γενική περιγραφή της μεθόδου. Η λεπτομερής μελέτη του προβλήματος αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Το πρόβλημα της *ελεύθερης ταλάντωσης* απλού γραμμικού ταλαντωτή διατυπώνεται ως πρόβλημα αρχικών τιμών μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης, ως εξής:

$$mX''(t) + 2bX'(t) + \kappa X(t) = 0, \quad (1\alpha)$$

$$X(t_0) = a, \quad X'(t_0) = b, \quad (1\beta)$$

όπου m είναι η ταλαντευόμενη μάζα, b ο συντελεστής απόσβεσης, και κ η σταθερά του ελατηρίου. Υποθέτοντας αρμονική χρονική εξάρτηση για την άγνωστη συνάρτηση (κίνηση) $X(t)$, θέτουμε

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (2)$$

όπου $\overset{\circ}{X}$ είναι το μιγαδικό πλάτος (σταθερά). Εισάγοντας την αναπαράσταση (2) στη διαφορική εξίσωση (1α), παίρνουμε

$$\begin{aligned} m \cdot \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} \right\} + 2b \cdot \operatorname{Re} \left\{ (-j\omega) \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} \right\} + \kappa \cdot \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa \right] \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι ισοδύναμη⁽¹⁰⁾ με την

$$\left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa \right] \cdot \overset{\circ}{X} \cdot e^{-j\omega t} = 0. \quad (4)$$

Η τελευταία πρέπει να ισχύει για κάθε $t > t_0$, προκειμένου η $X(t)$, όπως ορίζεται μέσω της (2), να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση (1α). Παρ' όλα αυτά, ο παράγοντας $e^{-j\omega t}$ μπορεί να απλοποιηθεί διότι $|e^{-j\omega t}| \neq 0$. Υποθέτοντας, περαιτέρω, ότι $\overset{\circ}{X} \neq 0$ (πράγμα αναγκαίο εάν $|a| + |b| \neq 0$), η (4) παίρνει τη μορφή αλγεβρικής εξίσωσης ως προς την κυκλική συχνότητα ω (*χαρακτηριστική εξίσωση* της (1α)):

$$m \cdot \omega^2 + 2bj \cdot \omega - \kappa = 0. \quad (5)$$

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, οι δύο ρίζες της (5). Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι $\omega_1 \neq \omega_2$. Τότε οι συναρτήσεις

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_1 t} \right\} \quad \text{και} \quad X_2(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-j\omega_2 t} \right\}, \quad (6)$$

ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση (1α). (Να το αποδείξετε!). Δεδομένου ότι οι δύο συναρτήσεις $X_1(t)$, $X_2(t)$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητες**, η γενική λύση της εξίσωσης (1α) γράφεται στη μορφή

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_1 t} + \overset{\circ}{X}_{20} \cdot e^{-j\omega_2 t} \right\}. \quad (7)$$

Οι σταθερές $\overset{\circ}{X}_{10}$ και $\overset{\circ}{X}_{20}$ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες (1β). (Να αποδείξετε ότι τα πλάτη $\overset{\circ}{X}_{10}$, $\overset{\circ}{X}_{20}$, μπορούν να θεωρηθούν πραγματικοί αριθμοί).

Εάν $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, τότε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1α) είναι οι

$$X_1(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{10} \cdot e^{-j\omega_0 t} \right\} \quad \text{και} \quad X_2(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{X}_{20} \cdot t \cdot e^{-j\omega_0 t} \right\}. \quad (8)$$

(Να το αποδείξετε!). Στη συνέχεια, εργαζόμεθα ως ανωτέρω.

Το πρόβλημα της **εξαναγκασμένης ταλάντωσης** του απλού γραμμικού ταλαντωτή διατυπώνεται ως μη-ομογενής (συνήθης) διαφορική εξίσωση, στη μορφή

$$mX''(t) + 2bX'(t) + \kappa X(t) = F(t). \quad (9)$$

Υποθέτοντας ότι η διέγερση είναι αρμονική μπορούμε να γράψουμε

$$F(t) = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{F} \cdot e^{-j\omega t} \right\}. \quad (10)$$

Εισάγοντας τις αναπαραστάσεις (2) και (10) στη διαφορική εξίσωση (9), και εργαζόμενοι ως ανωτέρω, λαμβάνουμε τελικά

$$\left[m(-j\omega)^2 + 2b(-j\omega) + \kappa \right] \cdot \overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{F}. \quad (11)$$

Από την τελευταία υπολογίζεται αμέσως το μιγαδικό πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:

$$\overset{\circ}{X} = - \frac{\overset{\circ}{F}}{m\omega^2 - \kappa + 2j\omega b}. \quad (12)$$

Εισάγοντας την (12) στην (2), βρίσκουμε την απόκριση $X(t)$.

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω λύσεις, (7) και (12), μπορούμε να μελετήσουμε πλήρως τα προβλήματα της ελεύθερης και της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. (Ιδιοσυχνότητα, συντονισμός, μορφή της απόκρισης στις διάφορες περιπτώσεις). Να το κάνετε!

2.1.2 Κυματική διάδοση σε μία χωρική διάσταση

Ερώτηση 1D.1: Να απαλείψετε τη χρονική παραγωγή από τις ακόλουθες γραμμικές κυματικές εξισώσεις⁽¹¹⁾, υποθέτοντας αρμονική χρονική εξάρτηση:

$$\eta_{,tt} - c^2 \eta_{,xx} = f(x,t) \quad (1)$$

$$\eta_{,tt} - c^2 \eta_{,xx} + b\eta_{,t} + \kappa\eta = f(x,t) \quad (2)$$

$$\eta_{,tt} + a^2 \eta_{,xxxx} = 0, \quad (3)$$

$$\eta_{,tt} - c^2 \eta_{,xx} + \beta^2 \eta_{,xxt} = 0, \quad (4)$$

Απάντηση: Η διέγερση (δεξιά μέλος) της εξίσωσης (1), ως χρονικώς αρμονική συνάρτηση, αναπαρίσταται στη μορφή:

$$f(x,t) = f_c(x) \cdot \cos \omega t + f_s(x) \cdot \sin \omega t = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\}. \quad (\alpha)$$

Υποθέτοντας ότι και η κυματική διαταραχή $\eta(x,t)$ αναπαρίσταται κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή:

$$\eta(x,t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (\beta)$$

η διαφορική εξίσωση (1) γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Λόγω} \\ \text{γραμμικότητας} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \text{Re} \left\{ \left[(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) - c^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) \right] \cdot e^{-j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(x) \cdot e^{-j\omega t} \right\}. \quad (\gamma)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι όμως ισοδύναμη με την

$$\left[(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) - c^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) \right] \cdot e^{-j\omega t} = \overset{\circ}{f}(x) \cdot e^{-j\omega t}. \quad (\delta)$$

(Να το αποδείξετε!). Δεδομένου ότι $|e^{-j\omega t}| = 1$, ο παράγων $e^{-j\omega t}$, ο οποίος εμφανίζεται και στα δύο μέλη της (δ), μπορεί να απλοποιηθεί, οπότε λαμβάνουμε

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) - c^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) = \overset{\circ}{f}(x). \quad (1')$$

Η τελευταία είναι η ζητούμενη απλοποιημένη μορφή της (1), στην περίπτωση χρονικώς αρμονικής εξάρτησης. Θα λέμε επίσης ότι $\eta(1)$ είναι " $\eta(1)$ στο πεδίο συχνοτήτων".

Με τελείως ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι οι (2), (3) και (4) στο πεδίο συχνοτήτων γράφονται ως εξής:

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) - c^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) + (-j\omega) \cdot b \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) + \kappa \overset{\circ}{\eta}(x) = \overset{\circ}{f}(x) \quad (2')$$

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) + a^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xxx}(x) = 0 \quad (3')$$

$$(-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) - c^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) + \beta^2 \cdot (-j\omega)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) = 0. \quad (4')$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις στις εξισώσεις (1')-(4'), και αναδιατάσσοντας τους όρους λαμβάνουμε τις ακόλουθες τελικές μορφές των τεσσάρων κυματικών εξισώσεων στο πεδίο συχνοτήτων:

$$\overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) = -\frac{1}{c^2} \cdot \overset{\circ}{f}(x), \quad (1'')$$

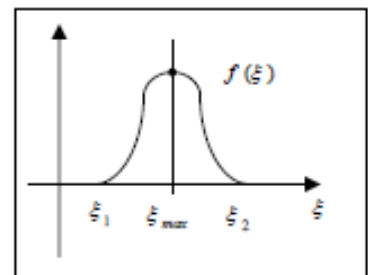
$$\overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{\kappa}{c^2} + j \frac{\omega b}{c^2} \right] \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) = -\frac{1}{c^2} \cdot \overset{\circ}{f}(x), \quad (2'')$$

$$\overset{\circ}{\eta}_{,xxx}(x) - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) = 0, \quad (3'')$$

$$\overset{\circ}{\eta}_{,xx}(x) + \frac{\omega^2}{c^2 + \beta^2 \omega^2} \cdot \overset{\circ}{\eta}(x) = 0. \quad (4'')$$

Όπως διαπιστώνουμε αμέσως, οι εξισώσεις (1'')-(4'') είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τη χωρική μεταβλητή, με συντελεστές εξαρτώμενους τόσο από τους αντίστοιχους συντελεστές των αρχικών κυματικών εξισώσεων, όσο και από την κυκλική συχνότητα ω της χρονικής ταλάντωσης.

Ερώτηση 1D.2: Δίδεται η συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής $f(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}$, όπου ξ είναι αδιάστατη ποσότητα (βλ. ένθετο σχήμα). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση χώρου-χρόνου $y = y(x,t) = f(kx - \omega t + \varepsilon)$, με k, ω, ε σταθερά και $k, \omega > 0$, αναπαριστά μια κυματομορφή που διαδίδεται προς τα θετικά x . Ποιά είναι η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής; Τι παριστάνει η συνάρτηση $y = y(x,t) = f(kx + \omega t + \varepsilon)$;



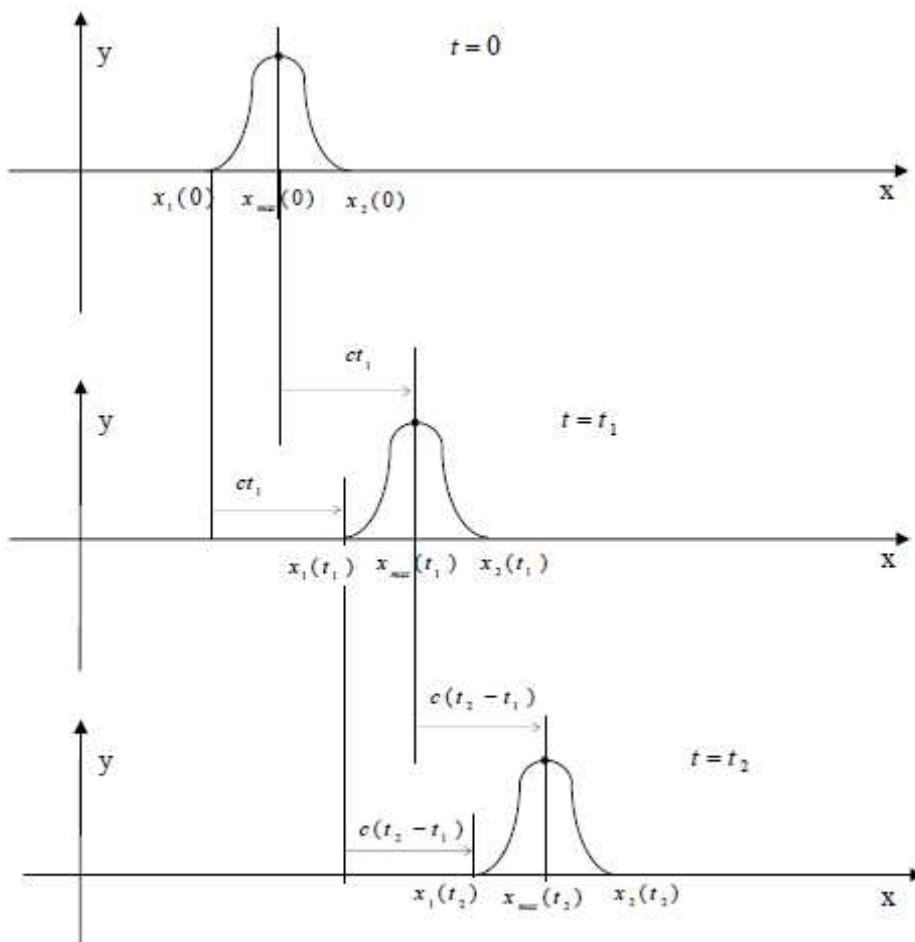
Απάντηση: Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε ένα απλό, αλλά πολύ σημαντικό για την κατανόηση της κυματικής κίνησης, βήμα: να συνδέσουμε τη φυσική-εμπειρική αντίληψη της κυματικής διάδοσης ως διαταραχής που τρέχει στο χώρο καθώς περνά ο χρόνος, με τη δομή της μαθηματικής αναπαράστασης της αντίστοιχης κυματομορφής.

Αν και όχι απαραίτητο, είναι βοηθητικό να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση $y = y(x, t) = f(kx - \omega t + \varepsilon)$ ως συνάρτηση του x , για ορισμένες χρονικές στιγμές. Βλ. Σχήμα 3. Ας παρακολουθήσουμε τώρα, με τη βοήθεια του σχήματος και, κυρίως της σκέψης μας (μια και το φαινόμενο εξελίσσεται διαρκώς στο χρόνο, ενώ το σχήμα δείχνει μόνο στατικά στιγμιότυπα) πως κινείται ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό σημείο της μορφής $f(\xi)$, π.χ. το σημείο $(\xi_{max}, f(\xi_{max}))$, το οποίο αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή (κορυφή) της διαταραχής.

Προφανώς, σε κάθε χρονική στιγμή t , η κορυφή της διαταραχής βρίσκεται στη θέση $x = x_{max}$, για την οποία το όρισμα $kx - \omega t + \varepsilon$ της $f(kx - \omega t + \varepsilon)$ ισούται με ξ_{max} :

$$kx_{max} - \omega t + \varepsilon = \xi_{max} \Leftrightarrow x_{max}(t) = \frac{\omega}{k} \cdot t + \frac{\xi_{max} - \varepsilon}{k}.$$

Δηλαδή, η κορυφή της διαταραχής $f(\xi)$ μετακινείται διαρκώς προς τα δεξιά (αυξανόμενα x) καθώς περνάει ο χρόνος, και μάλιστα **με σταθερή ταχύτητα** $c = \omega/k$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για κάθε άλλο χαρακτηριστικό σημείο της μορφής $f(\xi)$, π.χ. για τα σημεία $x_1 = x_1(t)$, και $x_2 = x_2(t)$ τα οποία ορίζουν το διάστημα εντός του οποίου η $f(kx - \omega t + \varepsilon)$ είναι



Σχήμα 3 (2.1): Η κυματομορφή $f(kx - \omega t + \varepsilon)$ σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Σκεπτόμενοι τελείως αναλόγως, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $y = y(x, t) = f(kx + \omega t + \varepsilon)$ παριστάνει μια κυματομορφή που κινείται προς τα αριστερά (μειούμενα x) με ταχύτητα, και πάλι, $c = \omega / k$.

Σχόλιο 1: Τα ανωτέρω συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα τόσο από τη συγκεκριμένη μορφή (σχήμα), όσο και από το συγκεκριμένο φυσικό νόημα της συνάρτησης $f(\xi)$.

Σχόλιο 2: Το όρισμα ξ της κυματομορφής $f(kx - \omega t + \varepsilon)$ περιέχει τόσο τη χωρική όσο και τη χρονική μεταβλητή: $\xi = kx - \omega t + \varepsilon$. Ετσι, για σταθερό t , η $f(\xi)$ μας δίδει τη χωρική μορφή της κυματομορφής f , ενώ για σταθερό x , η $f(\xi)$ μας δίδει τη χρονική μορφή της ταλάντωσης του μεγέθους f στη θέση x . Επίσης, είναι προφανές ότι

$$\xi = \text{σταθερό} \Rightarrow f(\xi) \text{ σταθερό.}$$

Όμως

$$\xi = \text{σταθερό} \Leftrightarrow \Delta\xi = 0 \Leftrightarrow k \cdot \Delta x - \omega \cdot \Delta t = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \text{σταθερό.}$$

Η ανωτέρω σχέση έχει την εξής προφανή ερμηνεία: Η διαταραχή $f(kx - \omega t + \varepsilon)$ έχει την ίδια τιμή στη (θέση, χρόνο) (x, t) και στη (θέση, χρόνο) $(x + \Delta x, t + \Delta t)$, όπου $\Delta x / \Delta t = \omega / k$. Οδηγούμεθα έτσι και πάλι στο συμπέρασμα ότι η διαταραχή κινείται προς τα θετικά x με σταθερή ταχύτητα $c = \omega / k$, είναι δηλαδή μια κυματομορφή.

Σχόλιο 3: Η σταθερά k έχει διαστάσεις (Μήκος)⁻¹ και η σταθερά ω έχει διαστάσεις (Χρόνος)⁻¹. Η σταθερά ε είναι αδιάστατη. Το αδιάστατο όρισμα $\xi = kx - \omega t + \varepsilon$ λέγεται **φάση** της κυματομορφής.

Σχόλιο 4: Στην περίπτωση εντοπισμένης διαταραχής, π.χ. όπως αυτής του Σχήματος 3, οι σταθερές k και ω **δεν έχουν** νόημα κυματικού αριθμού και κυκλικής συχνότητας, αντιστοίχως. Είναι απλώς, "κατάλληλες" σταθερές, των οποίων ο λόγος ω/k έχει συγκεκριμένο φυσικό νόημα (είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος).

Σχόλιο 5: η κυματομορφή που εξετάσαμε σ' αυτήν την ερώτηση έχει την ιδιότητα να διαδίδεται διατηρώντας αναλλοίωτο το σχήμα της. Αυτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση η οποία σπανίως συμβαίνει στα πραγματικά κύματα. Όπως είναι ευνόητο, και θα το δούμε στη συνέχεια, μια κυματομορφή καθώς διαδίδεται έχει συνήθως μειούμενο πλάτος, λόγω της επιδράσεως διαφόρων μηχανισμών απόσβεσης που μειώνουν τη διαδιδόμενη ενέργεια. Επίσης, σε πολλές περιπτώσεις, το σχήμα της κυματομορφής διαφοροποιείται καθώς αυτή διαδίδεται, ακόμη και αν οι αποσβέσεις είναι αμελητέες. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διασπορά** (dispersion) και τα αντίστοιχα κύματα ονομάζονται **κύματα με διασπορά** (dispersive waves).

Ερώτηση 1D.3: Υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ των ακολούθων δύο κυματομορφών:

$$y_1 = y_1(x, t) = f(kx - \omega t + \varepsilon),$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3, t) = f(kx_1 - \omega t + \varepsilon);$$

Απάντηση: Υπάρχει! Όπως υποδηλώνεται από τα ορίσματα των y_1 και y_2 , η πρώτη κυματομορφή θεωρείται ορισμένη σε μία χωρική διάσταση (π.χ. κατά μήκος μιας χορδής ή ενός καλωδίου), ενώ η δεύτερη κυματομορφή θεωρείται ορισμένη στον τρισδιάστατο χώρο, παρά το ότι διαδίδεται μόνον κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 .

Ερώτηση 1D.4: Θεωρούμε την κυματομορφή $y = y(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varepsilon)$, με $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, και k_i, ω, ε πραγματικές σταθερές. Σε πόσες διαστάσεις (μία, δύο ή τρεις) διαδίδεται το αντίστοιχο κύμα;

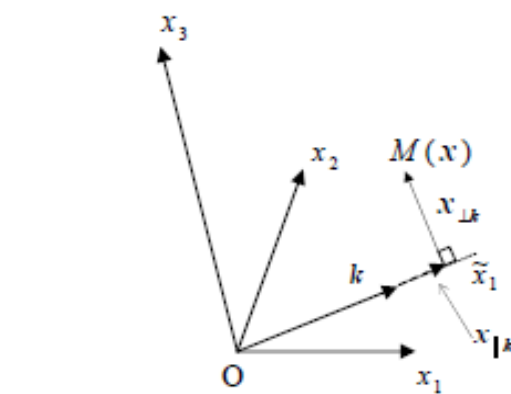
Απάντηση: Το κύμα που παριστάνει η δοθείσα κυματομορφή διαδίδεται σε μία διάσταση, η οποία ορίζεται από το διάνυσμα \mathbf{k} . Αυτό προκύπτει ως εξής: Εστω M ένα σημείο του χώρου με συντεταγμένες (διάνυσμα θέσεως) $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$. Βλ. Σχήμα 4. Αναλύουμε το διάνυσμα \overrightarrow{OM} σε δύο συνιστώσες, τις $\overrightarrow{OM}_{\parallel \mathbf{k}} = \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}}$, επί του φορέα του διανύσματος \mathbf{k} , και $\overrightarrow{OM}_{\perp \mathbf{k}} = \mathbf{x}_{\perp \mathbf{k}}$, κάθετα προς τον φορέα του διανύσματος \mathbf{k} . Προφανώς $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}} + \mathbf{x}_{\perp \mathbf{k}}$ και $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}$, εφ' όσον $\mathbf{x}_{\perp \mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$. Άρα

$$y(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varepsilon) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}} - \omega t + \varepsilon).$$

Αν συμβολίσουμε με \tilde{x}_1 το μέτρο του $\mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}}$, και με k το μέτρο του \mathbf{k} , τότε, προφανώς, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{k}} = k\tilde{x}_1$, και άρα

$$y(\mathbf{x}, t) = f(k\tilde{x}_1 - \omega t + \varepsilon).$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε τα εξής: Η $y(\mathbf{x}, t)$ έχει σταθερή τιμή πάνω σε όλα τα σημεία του επιπέδου του καθέτου στο φορέα του \mathbf{k} , που τέμνει τον τελευταίο στη θέση \tilde{x} . Άρα η $y(\mathbf{x}, t)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $y(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, t) = \tilde{y}(\tilde{x}_1, t)$, όπου \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 άξονες κάθετοι στον άξονα \tilde{x}_1 (φορέα του \mathbf{k}). Προφανώς, η $\tilde{y}(\tilde{x}_1, t)$ έχει τη μορφή μιας κυματικής διαταραχής που διαδίδεται κατά μήκος του φορέα του \mathbf{k} προς αυξανόμενες τιμές του \tilde{x}_1 , με ταχύτητα ω/k . Προκύπτει έτσι, ότι η δοθείσα κυματομορφή παριστάνει ένα κύμα που διαδίδεται σε μία διάσταση, παρά το ότι η διαταραχή υπάρχει (ορίζεται) σε ολόκληρο τον τριδιάστατο χώρο.



Σχήμα 4 (2.1): Διεύθυνση διάδοσης επιπέδου κύματος.

Σχόλιο 1: Το ανωτέρω παράδειγμα μας δείχνει ότι ο **φυσικός χώρος** (physical space) μπορεί να διαφέρει από το **χώρο διάδοσης** (propagation space). Στο ανωτέρω

παράδειγμα ο φυσικός χώρος (το πεδίο στο οποίο ορίζεται η διαταραχή) είναι ο \mathbb{R}^3 , ενώ ο χώρος διάδοσης είναι ο μονοδιάστατος (\mathbb{R}^1) χώρος που ορίζεται από τον άξονα \tilde{x}_1 του διανύσματος \mathbf{k} . Η διάκριση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική και, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο σχετίζεται με την έννοια της **κυματοδότησης**.

Σχόλιο 2: Το κύμα που αντιστοιχεί στην κυματομορφή $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varepsilon)$ λέγεται **επίπεδο κύμα**. Αν θέλουμε να τονίσουμε το γεγονός ότι η τιμή της διαταραχής είναι η ίδια σε όλα τα σημεία των καθέτων στο \mathbf{k} επιπέδων, χρησιμοποιούμε την ορολογία **ομογενές επίπεδο κύμα**. Σε επόμενα εδάφια θα μελετήσουμε και **ανομοιογενή επίπεδα κύματα**, στα οποία η τιμή της διαταραχής μεταβάλλεται από θέση σε θέση πάνω στα κάθετα στο \mathbf{k} επίπεδα.

Σχόλιο 3: Η κυματομορφή $f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t + \varepsilon)$ παριστάνει ομογενές επίπεδο κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση του φορέα του \mathbf{k} , αλλά αντίρροπα προς το διάνυσμα \mathbf{k} .

Ερώτηση 1D.5: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση (κυματομορφή) $y(x,t) = f(x \mp ct)$, $c = \text{σταθερά}$, ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial y}{\partial t} \pm c \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1\alpha, \beta)$$

για οποιαδήποτε (δύο φορές παραγωγίσιμη) συνάρτηση $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Απάντηση: Παραγωγίζοντας ως προς x και ως προς t τη συνάρτηση $y(x,t)$, βρίσκουμε

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} = f'(\xi) \right|_{\xi=x-ct} \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} = (\mp c) \cdot f'(\xi) \right|_{\xi=x-ct}. \quad (\alpha, \beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (α) επί $(\pm c)$ και προσθέτοντας την προκύπτουσα στην (β), διαπιστώνουμε ότι η κυματομορφή $y(x,t) = f(x \mp ct)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (1α). Ενθυμούμενοι ότι η κυματομορφή $f(x - ct)$ κινείται προς τα δεξιά (αυξανόμενα x), ενώ η κυματομορφή $f(x + ct)$ κινείται προς τα αριστερά (μειούμενα x), συμπεραίνουμε ότι οι δύο εξισώσεις (1α) αντιστοιχούν σε κύματα με διαφορετική κατεύθυνση διάδοσης, ως εξής:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \pm c \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \begin{cases} +: \text{διάδοση προς αυξανόμενα } x \\ -: \text{διάδοση προς μειούμενα } x \end{cases}. \quad (2)$$

Οι εξισώσεις αυτές (αλλά και κάθε κυματική εξίσωση που δέχεται ως λύσεις κύματα οδεύοντα μόνον προς τη μια κατεύθυνση) λέγονται **μονοκατευθυντικές κυματικές εξισώσεις (one-way wave equations)**.

Αν παραγωγίσουμε τις (α) και (β) μια ακόμη φορά ως προς x και t , αντιστοίχως, λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(\xi) \Big|_{\xi=x-ct} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 f''(\xi) \Big|_{\xi=x-ct}, \quad (3\alpha,\beta)$$

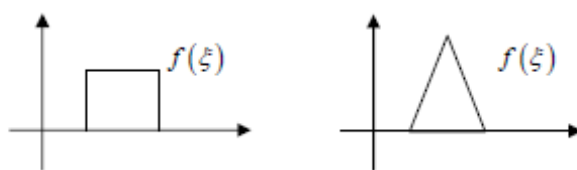
από τις οποίες προκύπτει αμέσως ότι η κυματομορφή $y(x,t) = f(x \mp ct)$ ικανοποιεί επίσης τη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (1β). Προφανώς, η διαφορική εξίσωση (4) είναι ενιαία για τις δύο περιπτώσεις (διάδοση προς αυξανόμενα x και διάδοση προς μειούμενα x). Γι' αυτό το λόγο λέγεται και **δικατευθυντική κυματική εξίσωση** (*two-way wave equation*).

Οι διαφορικές εξισώσεις (1α,β) ισχύουν, προφανώς, ανεξαρτήτως της μορφής της συνάρτησης $f(\xi)$, αρκεί η τελευταία να είναι μια ή δύο φορές παραγωγίσιμη, αντιστοίχως.

Σχόλιο 1: Οι διαφορικές εξισώσεις (1α,β), ανωτέρω, προέκυψαν αποκλειστικά και μόνο από κινηματικές θεωρήσεις. Μπορούμε, λοιπόν, να τις χαρακτηρίσουμε **κυματικές εξισώσεις κινηματικής προέλευσης**⁽¹²⁾.

Σχόλιο 2: Η εξίσωση (1β) διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον D' Alembert, στα πλαίσια της μελέτης των ελαστικών κυμάτων που διαδίδονται σε λεπτή χορδή υπό τάση. Γι' αυτό αναφέρεται συνήθως ως **εξίσωση D' Alembert**. Πολλά άλλα κυματικά φαινόμενα διέπονται από την ίδια εξίσωση, ή από γενικεύσεις αυτής.

Σχόλιο 3: Η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης $f(\xi)$ είναι μια μαθηματική συνθήκη η οποία απαιτείται προκειμένου να έχουν (κλασσικό) νόημα οι διαφορικές εξισώσεις (1α,β). Δεν αποτελεί όμως προϋπόθεση ύπαρξης του κύματος! Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $y(x,t) = f(x \mp ct)$ ορίζει μια (καθ' όλα νόμιμη!) κυματομορφή ακόμη και όταν η $f(\xi)$ δεν είναι παραγωγίσιμη ή/και παρουσιάζει ασυνέχειες. Η φυσική αυτή παρατήρηση έχει οδηγήσει στη θεώρηση των εξισώσεων (1α,β), καθώς και άλλων κυματικών εξισώσεων, υπό γενικότερη έννοια, έτσι ώστε να διατηρούν το νόημά τους ακόμη και στις περιπτώσεις συναρτήσεων με ασυνέχειες όπως αυτές που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα



Ερώτηση 1D.6: Δίδεται η κυματομορφή $y_1 = y_1(x,t) = e^{-\beta x} \cdot f(kx - \omega t + \varepsilon)$, όπου $k, \omega, \beta > 0$. Με τι ταχύτητα διαδίδεται και, πώς μεταβάλλεται η ανωτέρω κυματομορφή καθώς περνά ο χρόνος; Σε τί μπορεί να οφείλεται η παρατηρούμενη μεταβολή στο σχήμα της κυματομορφής; Να απαντήσετε τα ίδια ερωτήματα και για την κυματομορφή $y_2 = y_2(x,t) = e^{\beta x} \cdot f(kx + \omega t + \varepsilon)$. Μπορείτε να γράψετε τις δύο κυματομορφές σε ενιαία μαθηματική μορφή;

Η απάντηση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ερώτηση 1D.7: Μια κυματική διαταραχή $y = y(x, t)$ διαδίδεται προς τα δεξιά (αυξανόμενα x) με σταθερή ταχύτητα διάδοσης και ένταση μειούμενη εκθετικά, σε συμφωνία με τη σχέση $y = e^{-\beta x} f(x - ct)$, με $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι η κυματομορφή $y(x, t)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} + \beta c y = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\beta c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \beta^2 c^2 y = 0. \quad (1\alpha, \beta)$$

Η απάντηση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ερώτηση 1D.8: Να βρείτε τη γενική μορφή μιας μονοδιάστατης κυματομορφής που διαδίδεται αναλλοίωτη και με σταθερή ταχύτητα προς μία κατεύθυνση (έστω προς αυξανόμενα x).

Απάντηση: Έστω $\eta = \eta(x, t)$ η κυματομορφή και c η ταχύτητα διάδοσης αυτής. Εφ' όσον η $\eta(x, t)$ διαδίδεται αναλλοίωτη προς αυξανόμενα x με σταθερή ταχύτητα διάδοσης c , θα ισχύει η σχέση

$$\eta(x, t) = \eta(x + X, t + T), \quad \text{όπου } X = c \cdot T. \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση για $T = -t$, παίρνουμε

$$\eta(x, t) = \eta(x - ct, 0) = f(x - ct). \quad (2)$$

Σύμφωνα με τα όσα συζητήθηκαν στην απάντηση της Ερωτήσεως 1D.2, ουδείς περιορισμός απαιτείται επί της συναρτήσεως του ενός ορίσματος $f(\xi)$, $\xi = x - ct$, ώστε αυτή να αναπαριστά κυματομορφή⁽¹³⁾. Δηλαδή, η γενική μορφή της κυματομορφής που διαδίδεται αναλλοίωτη προς αυξανόμενα x , με σταθερή ταχύτητα c , δίδεται από την ανωτέρω σχέση (2), όπου $f(\xi)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση ενός πραγματικού ορίσματος.

Σχόλιο: Η γενική μορφή μονοδιάστατης κυματομορφής που διαδίδεται αναλλοίωτη, και με σταθερή ταχύτητα, προς την αντίθετη κατεύθυνση (μειούμενα x) είναι

$$\eta = \eta(x, t) = \eta(x + ct, 0) = g(x + ct). \quad (3)$$

Ερώτηση 1D.9: Δίδονται δύο πραγματικές συναρτήσεις $f(\xi)$ και $g(\zeta)$ με φορείς τα πεπερασμένα διαστήματα I και J , αντιστοίχως. Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση

$$\eta = \eta(x, t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t)$$

αναπαριστά κυματομορφή. (Τα k και ω είναι θετικές σταθερές). Εάν ναι, με τί ταχύτητα διαδίδεται το αντίστοιχο κύμα; Η σχετική θέση των διαστημάτων I και J παίζει κάποιο ρόλο ως προς τη μορφή της διαδιδόμενης διαταραχής; Να υποθέσετε ότι η κίνηση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$, και να σχεδιάσετε ορισμένα στιγμιότυπα της κίνησης για $0 < t_1 < t_2 < t_3$

Η απάντηση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ερώτηση 1D.10: Να δώσετε μια γενική αναπαράσταση σε σειρά απλών συναρτήσεων, μονοδιάστατης *περιοδικής* κυματομορφής που διαδίδεται αναλλοίωτη με σταθερή ταχύτητα διάδοσης προς αυξανόμενα x .

Απάντηση: Σύμφωνα με την απάντηση της προηγούμενης ερωτήσεως, η θεωρούμενη κυματομορφή αναπαρίσταται μέσω μιας συναρτήσεως $f(\xi), \xi = x - ct$. Το γεγονός, ότι εν προκειμένω, η κυματομορφή θεωρείται επί πλέον περιοδική, σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x - ct)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς x για κάθε t . Άρα, η συνάρτηση $f(\xi)$ θα είναι επίσης περιοδική και ως προς ξ . Κατά συνέπεια, το ζητούμενο εδώ είναι να αναπτύξουμε την περιοδική συνάρτηση $f(\xi), \xi = x - ct$, με τη βοήθεια απλών συναρτήσεων. Το ερώτημα αυτό απαντάται πλήρως με τη βοήθεια της θεωρίας των σειρών Fourier (η οποία ξεκίνησε ακριβώς με σκοπό να απαντήσει ένα τέτοιο ερώτημα σε προβλήματα διάδοσης θερμότητας!).

Ο αναγνώστης που δεν είναι εξοικειωμένος με τις σειρές Fourier θα πρέπει, στο σημείο αυτό, να εμπλουτίσει τις γνώσεις του με τη βοήθεια της βιβλιογραφίας (βλ., π.χ. Churchill και Brown, 1987). Η συζήτησή μας εδώ θα περιορισθεί σ' εκείνα μόνο τα σημεία που χρειάζονται για τη σωστή εφαρμογή των γενικών αποτελεσμάτων στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουμε.

Για να γράψουμε την αναπαράσταση Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f(\xi), \xi = x - ct$, πρέπει πρώτα να εισάγουμε την περίοδο της συναρτήσεως $f(\xi)$. Δεδομένου ότι το όρισμα ξ έχει διαστάσεις μήκους, η περίοδος, έστω λ , θα έχει επίσης διαστάσεις μήκους, και δεν είναι παρά το μήκος κύματος της περιοδικής κυματομορφής. Από τη θεωρία των σειρών Fourier γνωρίζουμε ότι

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right), \quad \alpha_0, \alpha_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1\alpha)$$

ή, σε μιγαδική μορφή,

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\left(j\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right), \quad \text{με } A_{-n} = \bar{A}_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (1\beta)$$

ή

$$f(\xi) = \operatorname{Re}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(j\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right) \right\}, \quad A_n \in \mathbb{C}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1\gamma)$$

Οι συντελεστές που εμφανίζονται στις ανωτέρω σχέσεις (1α,β,γ), ορίζονται μέσω της $f(\xi)$. Επί παραδείγματι,

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(\xi) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right) d\xi, \quad b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(\xi) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n\xi}{\lambda}\right) d\xi, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Ας μελετήσουμε λίγο πιο προσεκτικά το όρισμα $2\pi n\xi/\lambda$, που εμφανίζεται σε όλες τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που υπεισέρχονται στις σχέσεις (1) και (2), ανωτέρω. Αντικαθιστώντας το ξ με $x - ct$ βρίσκουμε:

$$\frac{2\pi n\xi}{\lambda} = n \cdot 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{c/\lambda} \right) = n(kx - \omega t), \quad (3)$$

όπου

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{c/\lambda}, \quad \text{και άρα } c = \omega/k. \quad (4)$$

Θέτοντας

$$\theta(x, t) = kx - \omega t, \quad (5)$$

και χρησιμοποιώντας την (3), οι σχέσεις (1) παίρνουν τη μορφή

$$\eta(x, t) = f(x - ct) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta(x, t)) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta(x, t)), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad (6\alpha)$$

ή

$$\eta(x, t) = f(x - ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(jn\theta(x, t)), \quad A_{-n} = \bar{A}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6\beta)$$

ή

$$\eta(x, t) = f(x - ct) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(jn\theta(x, t)) \right\}, \quad A_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6\gamma)$$

Ας σημειωθεί ότι οι σταθερές A_n που εμφανίζονται σε διαφορετικές σχέσεις είναι, γενικά, διαφορετικές.

Σχόλιο 1: Η σταθερά a_0 (ή A_0), που εμφανίζεται στα αναπτύγματα Fourier ανωτέρω, συνήθως είναι μηδενική ή, αν δεν είναι, δεν παίζει σημαντικό ρόλο στο φαινόμενο της κυματικής διάδοσης. ως εκ τούτου, συνήθως αγνοείται. Σημειώνουμε, όμως, ότι σε ορισμένες περιπτώσεις μη-γραμμικών κυματικών προβλημάτων η σταθερά στο αντίστοιχο ανάπτυγμα μπορεί να είναι ουσιώδης.

Σχόλιο 2: Κάθε όρος του αναπτύγματος Fourier μιάς περιοδικής κυματομορφής (σχέσεις (6), ανωτέρω), παριστά μια αρμονική κυματομορφή, η οποία διαδίδεται προς την ίδια κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα διάδοσης. Αποδείξαμε δηλαδή, ότι κάθε περιοδική κυματομορφή που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που αναφέρονται στην Ερώτηση 1D.10, μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση απλών αρμονικών κυματομορφών που ικανοποιούν τις ίδιες προϋποθέσεις.

Ερώτηση 1D.11: Μπορείτε να προσδιορίσετε τους συντελεστές ανάπτυξης σε σειρά Fourier (π.χ., τους συντελεστές a_n, b_n στην εξίσωση (6α) της Ερωτήσεως 1D.10 μιας κυματομορφής $\eta(x, t)$, η οποία διαδίδεται αναλλοίωτη με σταθερή ταχύτητα διάδοσης προς αυξανόμενα x , και της οποίας δίδεται η μορφή για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = t_0$;

Η απάντηση αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ερώτηση 1D.12: Να δώσετε μια αναπαράσταση εντοπισμένης μονοδιάστατης κυματομορφής που διαδίδεται αναλλοίωτη με σταθερή ταχύτητα διάδοσης προς αυξανόμενα x , με τη βοήθεια απλών συναρτήσεων.

Απάντηση: Σύμφωνα με τη συζήτηση που έγινε στην Ερώτηση 1D.10, το παρόν ερώτημα ανάγεται στο να δοθεί μια μαθηματική αναπαράσταση της συνάρτησης μιάς μεταβλητής $f(\xi)$, $\xi = x - ct$, η οποία έχει πεπερασμένο φορέα. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Fourier. Μια μορφή ολοκληρωτικής αναπαράστασης κατά Fourier της συνάρτησης $f(\xi)$ είναι η ακόλουθη:

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} a(s) \cdot \cos(s\xi) ds + \int_0^{\infty} b(s) \cdot \sin(s\xi) ds.$$

ή

$$f(x - ct) = \int_0^{\infty} a(s) \cdot \cos[s(x - ct)] ds + \int_0^{\infty} b(s) \cdot \sin[s(x - ct)] ds.$$

Ερώτηση 1D.13: Όλες οι γραμμικές κυματικές εξισώσεις επιδέχονται λύσεις οι οποίες είναι αρμονικές και στο χρόνο και στο χώρο (*απλά αρμονικά κύματα*). Να δώσετε τη μαθηματική αναπαράσταση των λύσεων αυτών με τη βοήθεια απλών αρμονικών συναρτήσεων, σε εκθετική (μυγαδική) μορφή.

Απάντηση: Στην περίπτωση αυτή, και το μυγαδικό πεδίο $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ αναπαρίσταται με τη βοήθεια αρμονικών συναρτήσεων:

$$\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{H} \cdot e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\}, \quad (1)$$

όπου $\overset{\circ}{H}$ είναι το μυγαδικό πλάτος (το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι μια μυγαδική σταθερά), και \mathbf{k} είναι ο (διανυσματικός) αριθμός κύματος. Συνδυάζοντας την ανωτέρω σχέση (β) της Ερωτήσεως 1D.1, λαμβάνουμε

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{H} \cdot e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right\}. \quad (2)$$

Η κυματομορφή (2) αναπαριστά ένα (επίπεδο) απλό αρμονικό κύμα, το οποίο διαδίδεται παράλληλα προς το διάνυσμα \mathbf{k} . (Βλ. και Ερωτήσεις 1D.1 και 1D.3).

Υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο k του κυματικού αριθμού και η κυκλική συχνότητα ω , που εμφανίζονται στο δεξιά μέλος της (2), συνδέονται με το μήκος κύματος λ και με την περίοδο T του απλού αρμονικού κύματος, μέσω των σχέσεων

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3\alpha, \beta)$$

Βλ. και Ερώτηση Γ.6, στην οποία οι σχέσεις (3) αποδεικνύονται αναλυτικά στην περίπτωση $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$.

Ερώτηση 1D.14: Τί μας δίδουν οι γραμμικές κυματικές εξισώσεις (1)-(4) της Ερωτήσεως 1D.1, στην περίπτωση απλών αρμονικών κυμάτων; Τι είναι η σχέση διασποράς;

Απάντηση: Ας εξετάσουμε κατ' αρχήν το ομογενές πρόβλημα, θέτοντας $f(x,t) = 0$ στις εξισώσεις (1), (2) της Ερωτήσεως 1D.1. Τότε, εισάγοντας την αρμονική αναπαράσταση, σχέση (2) της Ερωτήσεως 1D.13, στις τέσσερες εξισώσεις, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\frac{\partial^n \eta(x,t)}{\partial t^n} = \text{Re} \left\{ (-j\omega)^n \cdot \overset{\circ}{H} \cdot e^{j(kx-\omega t)} \right\}, \quad (\alpha)$$

και

$$\frac{\partial^m \eta(x,t)}{\partial x^m} = \text{Re} \left\{ (jk)^m \cdot \overset{\circ}{H} \cdot e^{j(kx-\omega t)} \right\}, \quad (\beta)$$

και απλοποιώντας τον εκθετικό παράγοντα $\exp(j(kx-\omega t))$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες **αλγεβρικές εξισώσεις:**

$$\left[(-j\omega)^2 - c^2 \cdot (jk)^2 \right] \cdot \overset{\circ}{H} = 0, \quad (1)$$

$$\left[(-j\omega)^2 - c^2 \cdot (jk)^2 + b(-j\omega) + \kappa \right] \cdot \overset{\circ}{H} = 0, \quad (2)$$

$$\left[(-j\omega)^2 + a^2 \cdot (jk)^4 \right] \cdot \overset{\circ}{H} = 0, \quad (3)$$

$$\left[(-j\omega)^2 - c^2 \cdot (jk)^2 + \beta^2 \cdot (-j\omega)^2 \cdot (jk)^2 \right] \cdot \overset{\circ}{H} = 0. \quad (4)$$

Υποθέτοντας $\overset{\circ}{H} \neq 0$, και εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στις

$$\omega^2 - c^2 \cdot k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \pm c \cdot k, \quad (1')$$

$$\omega^2 + (jb) \cdot \omega - (c^2 \cdot k^2 + \kappa) = 0, \quad (2')$$

$$\omega^2 - a^2 \cdot k^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \pm a \cdot k^2, \quad (3')$$

$$\omega^2 - c^2 \cdot k^2 + \beta^2 \cdot \omega^2 \cdot k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{\pm c \cdot k}{\sqrt{1 + \beta^2 \cdot k^2}}. \quad (4')$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις ορίζουν συναρτησιακές σχέσεις της μορφής $\omega = \omega(k)$, μεταξύ της κυκλικής συχνότητας ω και του κυματικού αριθμού k . Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **σχέσεις διασποράς**, και είναι χαρακτηριστικές της δυναμικής του αντίστοιχου κυματικού φαινομένου.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι στην περίπτωση (γραμμικού) απλού αρμονικού κύματος, η κυματική εξίσωση (η οποία μοντελοποιεί τη δυναμική του φαινομένου) είναι ισοδύναμη με τη σχέση διασποράς.

2.1.3 Κυματική διάδοση σε δύο ή τρεις χωρικές διαστάσεις

Ερώτηση 2&3D.1: Υπάρχουν κυματικά φαινόμενα τα οποία εμφανίζονται στις 2 και 3 διαστάσεις, και τα οποία δεν έχουν ανάλογα στη μία διάσταση;

Απάντηση: Η κυματική διάδοση στις δύο και στις τρεις διαστάσεις είναι πολύ περισσότερο περίπλοκη από ότι στη μια διάσταση. Επί παραδείγματι, η κατεύθυνση διάδοσης δεν είναι γενικώς ευθύγραμμη (αυτό συμβαίνει μόνο στα *ομογενή μέσα*), ενώ, ακόμη και όταν η διάδοση είναι ευθύγραμμη, η ταχύτητα διάδοσης μπορεί να εξαρτάται από την κατεύθυνση της διάδοσης (*ανισοτροπία*). Επίσης, όταν το κύμα συναντά εμπόδια (σκεδαστές, scatterers) εμφανίζονται πολύπλοκες κυματομορφές *περίθλασης* (scattering or diffraction patterns), φαινόμενο το οποίο δεν έχει ανάλογο στη μια διάσταση. Η γεωμετρία του μέσου (πεδίου), καθώς και η χωρική κατανομή της ταχύτητας διάδοσης του κύματος $c = c(\mathbf{x})$, παίζουν επίσης, σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση του κυματικού φαινομένου (*κυματοδότηση*). Ο μεγάλος πλούτος των κυματικών φαινομένων στις 2 και στις 3 διαστάσεις δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί σε λίγες γραμμές. Μια αρκετά αντιπροσωπευτική εικόνα αυτού θα δοθεί στα εδάφια και τα κεφάλαια που ακολουθούν.

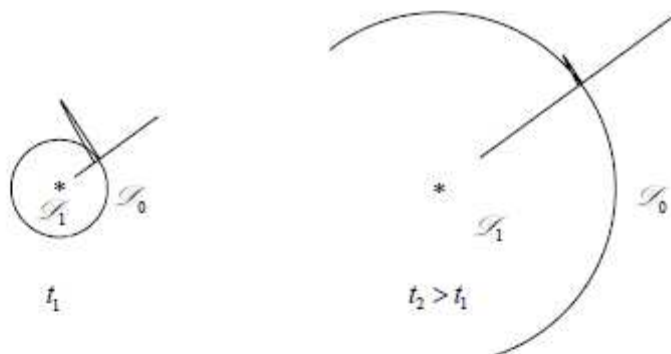
Ερώτηση 2&3D.2: Στο προηγούμενο υποεδάφιο είδαμε ότι πολύ σημαντικές πληροφορίες για την κυματική κίνηση στη μια διάσταση μπορούμε να εξάγουμε μέσω κινηματικών θεωρήσεων. Ισχύει το ίδιο στις 2 και στις 3 διαστάσεις ή όχι; Υπάρχουν, στην περίπτωση αυτή, γενικές αρχές οι οποίες μας βοηθούν στη μελέτη των κυματικών φαινομένων;

Απάντηση: Η μελέτη της κυματικής κίνησης (διάδοσης) στις δύο και στις τρεις διαστάσεις γίνεται κυρίως με τη βοήθεια των εξισώσεων που διέπουν το εκάστοτε εξεταζόμενο κυματικό φαινόμενο. Και πάλι όμως, υπάρχουν ορισμένες *γενικές έννοιες* και *γενικές αρχές*, οι οποίες είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητες από το είδος του κυματικού φαινομένου, και οι οποίες μπορούν (και πρέπει) να παρουσιασθούν γενικά. Στο εδάφιο αυτό θα συζητήσουμε ορισμένες γενικές έννοιες (μέτωπο κύματος, ισοφασική επιφάνεια, ακτίνες διάδοσης). Τρεις σημαντικές γενικές αρχές της κυματικής (Αρχή της υπέρθεσης, Αρχή των Huygens-Fresnel, και Αρχή των Ήρωνος-Fermat) θα συζητηθούν εν εκτάσει στο εδάφιο 2.4.

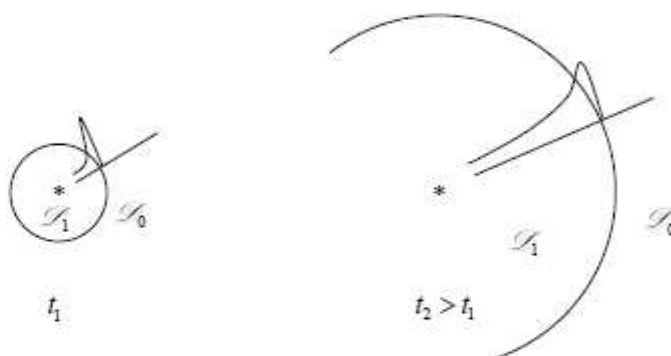
Ερώτηση 2&3D.3: Τί είναι το μέτωπο κύματος;

Απάντηση: Η έννοια του *μετώπου κύματος* είναι μια από τις βασικότερες έννοιες της κυματικής. Ο ακριβής ορισμός του μετώπου κύματος δεν εξαρτάται από τη φύση του κυματικού φαινομένου, αλλά από το είδος της κυματικής διαταραχής. Έτσι, είναι σκόπιμο να διακρίνουμε τρεις βασικές περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν έχουμε μεταβατική διαταραχή, χρονικά αρμονική διαταραχή ή κρουστική διαταραχή (ασυνέχεια).

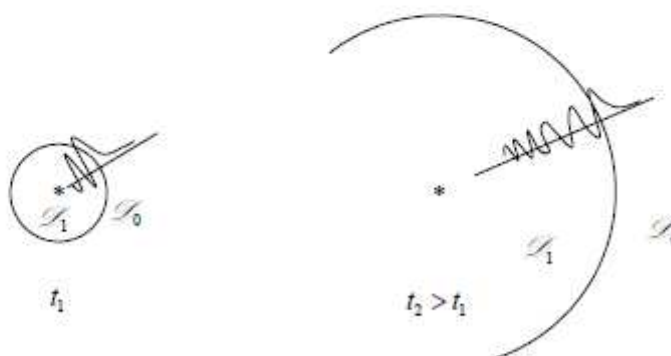
Ορισμός 1: Στην περίπτωση μιας *μεταβατικής διαταραχής* (transient disturbance), ως *μέτωπο κύματος* ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (γραμμή στις δύο διαστάσεις, επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις), ο οποίος χωρίζει το πεδίο σε δύο ξένες μεταξύ τους περιοχές: μια δια της οποίας έχει ήδη διαδοθεί (περάσει) η κυματική διαταραχή (περιοχή \mathcal{L}_1), και μια στην οποία δεν έχει ακόμη φθάσει (γίνει αισθητή) η κυματική διαταραχή (περιοχή \mathcal{L}_0).



α : Μέτωπο σφαιρικού κύματος, διαδιδόμενου σε ομογενές μέσο χωρίς διασπορά
(3 διαστάσεις)



β : Μέτωπο κυλινδρικού κύματος, διαδιδόμενου σε ομογενές μέσο χωρίς διασπορά.
(2 διαστάσεις)



γ : Μέτωπο κύματος, διαδιδόμενου σε ομογενές μέσο με διασπορά. (2 ή 3 διαστάσεις)

Σχήμα 1 (2.1.3): Μορφές μετώπου κύματος στο πεδίο του χρόνου (μη-μόνιμη διαταραχή). Διάδοση σε ομογενές μέσο, στις δύο (β και γ), και στις τρεις διαστάσεις (α και γ).

Στην περιοχή \mathcal{S}_0 επικρατεί, δηλαδή, ηρεμία⁽¹⁴⁾ (ως προς το διαδιδόμενο κυματικό φαινόμενο). Στην περιοχή \mathcal{S}_1 (απ' όπου έχει ήδη περάσει η κυματική διαταραχή) μπορεί να επικρατεί ηρεμία ή να υπάρχει παραμένουσα διαταραχή. Στο Σχήμα 1 δίδονται παραδείγματα μετώπου κύματος σε περιπτώσεις μεταβατικής διάδοσης. Τα παραδείγματα αυτά είναι αντιπροσωπευτικά και προκύπτουν από λεπτομερή μελέτη των αντιστοιχών φαινομένων (ή, αν προτιμάτε, των αντιστοιχών μαθηματικών μοντέλων!).

Στην περίπτωση **κρουστικής διαταραχής**, ταυτίζουμε το μέτωπο κύματος με τη διαδιδόμενη ασυνέχεια, πράγμα που βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τον Ορισμό 1.

Στην περίπτωση **χρονικά αρμονικής κυματικής διαταραχής** (πεδίο συχνοτήτων), ο ανωτέρω ορισμός του μετώπου κύματος δεν έχει νόημα, δεδομένου ότι η διαταραχή έχει ήδη εξαπλωθεί σε ολόκληρο το πεδίο (πεπερασμένο ή άπειρο). Στην περίπτωση αυτή, όμως, η χρονική εξάρτηση υποτίθεται αρμονική, μιας ορισμένης συχνότητας ω ⁽¹⁵⁾ (**μονοχρωματικό κύμα**), και άρα η κυματική διαταραχή γράφεται στη μορφή

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_c(\mathbf{x}) \cdot \cos \omega t + \eta_s(\mathbf{x}) \cdot \sin \omega t = \operatorname{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) \cdot e^{-j\omega t} \right\}, \quad (1)$$

όπου $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}) = \eta_c(\mathbf{x}) + j\eta_s(\mathbf{x})$ είναι το **μυγαδικό πλάτος** του χρονικά αρμονικού κύματος. Το μυγαδικό πεδίο, πεδίο $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x})$ εξαρτάται, γενικώς, από τη συχνότητα ω . Έτσι, θα γράφουμε $\overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}, \omega)$ όταν θέλουμε να τονίσουμε αυτήν της εξάρτηση.

Δεδομένου ότι σε κάθε θέση \mathbf{x} το πεδίο $\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}, \omega)$ παίρνει μια μυγαδική τιμή, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να γράψουμε

$$\overset{\circ}{\eta}(\mathbf{x}, \omega) = A(\mathbf{x}, \omega) \cdot \exp\{j\theta(\mathbf{x}, \omega)\} = A(\mathbf{x}, \omega) \cdot \exp\{-j\omega\tau(\mathbf{x}, \omega)\}, \quad (2)$$

όπου $A(\mathbf{x}, \omega)$ είναι το **πραγματικό πλάτος** και $\theta(\mathbf{x}, \omega) = \omega \cdot \tau(\mathbf{x}, \omega)$ είναι το **όρισμα** ή **φάση** του πεδίου. Η συνθήκη

$$\tau(\mathbf{x}, \omega) = \text{σταθερά}, \quad (3)$$

ορίζει, με πεπλεγμένο τρόπο, το γεωμετρικό τόπο των σημείων επί των οποίων η φάση του κύματος παραμένει σταθερά. Κάθε τέτοιο σύνολο σημείων (γραμμή στις δύο διαστάσεις, επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις) ονομάζεται **ισοφασική επιφάνεια** του κύματος. Προφανώς, όλα τα σημεία που αντιστοιχούν σε τοπικό μέγιστο της φυσικής διαταραχής $\eta(\mathbf{x}, t)$, σε μία δεδομένη χρονική στιγμή t , αποτελούν μια ισοφασική επιφάνεια, στην οποία η φάση έχει την τιμή 0 (ή $2\ell\pi$, όπου ℓ ακέραιος αριθμός). Ορμώμενοι από την παρατήρηση αυτή, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2: Στην περίπτωση *χρονικά αρμονικής διαταραχής*, ως *μέτωπο κύματος* ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (γραμμή στις δύο διαστάσεις, επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις), επί του οποίου οι τιμές της κυματικής διαταραχής $\eta(x,t)$ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης ή, ισοδυνάμως, η φάση $\theta(x,\omega)$ του μιγαδικού πεδίου $\overset{\circ}{\eta}(x,\omega)$ είναι σταθερή.

Δηλαδή, στη χρονικά αρμονική περίπτωση, ταυτίζουμε το μέτωπο κύματος με την ισοφασική επιφάνεια.

Ερώτηση 2&3D.4: Στο Σχήμα 1, τα πλάτη κύματος στην περιοχή του μετώπου έχουν σχεδιασθεί μικρότερα στη χρονική στιγμή $t_2 > t_1$, απ' ό,τι στη χρονική στιγμή t_1 . Είναι αυτό σωστό; Αν ναι, σε τι νομίζετε ότι οφείλεται; Μπορείτε να δώσετε έναν ποιοτικό νόμο εξασθένισης του πλάτους του μετώπου κύματος συναρτήσει της ακτίνας του μετώπου;

Απάντηση: Το πλάτος κύματος πράγματι μειώνεται καθώς μεγαλώνει η ακτίνα του μετώπου. Αυτό οφείλεται στο ότι η ενέργεια που μεταφέρει το κύμα (και η οποία είναι ακριβώς η ενέργεια που δίδει η διεγείρουσα αιτία που το δημιούργησε διασπείρεται σε μεγαλύτερη έκταση, όταν η ακτίνα είναι μεγαλύτερη.

Με τη βοήθεια ορισμένων γενικών υποθέσεων, μπορούμε να δώσουμε ένα γενικό ποιοτικό νόμο ο οποίος να συνδέει το πλάτος κύματος με την ακτίνα του μετώπου διάδοσης, βασιζόμενοι στην αρχή διατήρησης της ενέργειας⁽¹⁶⁾. Προς τούτο, χρειάζεται να υποθέσουμε ότι όλη η ενέργεια βρίσκεται συγκεντρωμένη σε ένα "φλοιό" κοντά στο μέτωπο κύματος (πράγμα αρκετά ακριβές στις 3 διαστάσεις, αλλά μόνο κατά προσέγγιση ισχύον στις 2 διαστάσεις), και να λάβουμε υπ' όψιν μας τη γενική σχέση

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ενέργεια κύματος} \\ \text{ανά μονάδα όγκου} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{l} \text{πλάτος} \\ \text{διαταραχής} \end{array} \right)^2. \quad (1)$$

Τότε, η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Κυματική ενέργεια} \\ \text{στην περιοχή του} \\ \text{μετώπου κύματος} \\ \text{για } t = t_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Κυματική ενέργεια} \\ \text{στην περιοχή του} \\ \text{μετώπου κύματος} \\ \text{για } t = t_2 \end{array} \right) \quad (2)$$

μας δίδει

$$a_1^2 \cdot S_1 = a_2^2 \cdot S_2, \quad (3)$$

όπου S_1 , S_2 είναι τα εμβαδά των επιφανειών του μετώπου κύματος στις χρονικές στιγμές t_1 , t_2 , αντιστοίχως, και a_1 , a_2 είναι τα αντίστοιχα πλάτη κύματος.

Η περαιτέρω επεξεργασία της σχέσεως (3) απαιτεί πρόσθετες υποθέσεις. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το μέσον είναι ομογενές, οπότε έχουμε σφαιρική διάδοση στις 3 διαστάσεις, ή κυλινδρική διάδοση στις 2 διαστάσεις. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι το εμβαδόν

σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R είναι $S_{σφ} = 4\pi R^2$, ενώ το εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R και εγκάρσιας διάστασης d είναι $S_{κυλ.} = 2\pi R d$, βρίσκουμε, βάσει της (3):

$$a_1^2 \cdot R_1^2 = a_2^2 \cdot R_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \sim \frac{1}{R} \quad \text{στις τρεις διαστάσεις,} \quad (4\alpha)$$

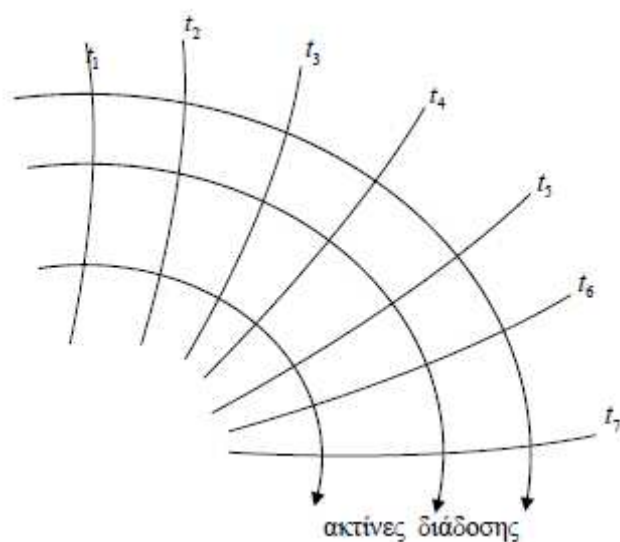
και

$$a_1^2 \cdot R_1 d = a_2^2 \cdot R_2 d \quad \Leftrightarrow \quad a \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \text{στις δύο διαστάσεις.} \quad (4\beta)$$

Ας σημειωθεί εδώ ότι, ακόμη και αν ισχύουν όλες οι υποθέσεις που επικαλεστήκαμε ανωτέρω, το πλάτος κύματος θα είναι, γενικώς, μικρότερο απ' ό,τι προβλέπουν οι σχέσεις (4α) και (4β), λόγω των φαινομένων απόσβεσης (τα οποία οδηγούν σε μείωση της μηχανικής ενέργειας του κύματος).

Ερώτηση 2&3D.5: Τί είναι οι ακτίνες διάδοσης του κύματος;

Απάντηση: Οι διαδοχικές θέσεις του μετώπου κύματος (σε διαδοχικές χρονικές στιγμές), αποτελούν μια οικογένεια επιφανειών (ή γραμμών, στις δύο διαστάσεις), οι οποίες, γενικώς, είναι λείες και δεν τέμνονται μεταξύ τους⁽¹⁷⁾. Κατά συνέπεια, είναι γενικώς δυνατόν να ορισθεί μια οικογένεια γραμμών κάθε μέλος της οποίας τέμνει κάθετα το μέτωπο κύματος, για κάθε t . Βλ. Σχήμα 2. Οι γραμμές αυτές ονομάζονται **ακτίνες διάδοσης** ή, απλούστερα, **ακτίνες**.



Σχήμα 2 (2.1.3): Οι ακτίνες διάδοσης είναι κάθετες, σε κάθε χρονική στιγμή, στο μέτωπο κύματος

Ερώτηση 2&3D.6: Όπως έχουμε επίσης αποδείξει στο εδάφιο 2.1.2, Ερώτηση 1D.4, ένα επίπεδο κύμα το οποίο διαδίδεται αναλλοίωτο, με σταθερή ταχύτητα, προς την κατεύθυνση \mathbf{k} , κινούμενο μέσα σε χώρο n διαστάσεων ($n = 2$ ή 3), εκφράζεται από τη σχέση

$$y = y(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varepsilon), \quad (1)$$

όπου ε , ω και $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ είναι σταθερές ποσότητες, και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι η χωρική μεταβλητή. Να αποδείξετε ότι η κυματομορφή (1) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \Delta_n y = 0, \quad \text{όπου} \quad \Delta_n y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \quad (2\alpha, \beta)$$

και $c = \omega/|\mathbf{k}|$ είναι η ταχύτητα διάδοσης της κυματικής διαταραχής.

Απάντηση: Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς x_i και t , βρίσκουμε

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = k_i^2 f''(\xi) \right|_{\xi = \mathbf{kx} - \omega t} \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 f''(\xi) \right|_{\xi = \mathbf{kx} - \omega t}. \quad (\alpha, \beta)$$

Αθροίζοντας τις (α) βρίσκουμε

$$\Delta_n y = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} = k^2 f''(\xi) \Big|_{\xi = \mathbf{kx} - \omega t}. \quad (\gamma)$$

όπου $k = |\mathbf{k}|$. Συνδυάζοντας τώρα τις (β) και (γ), λαμβάνουμε την (2).

Σχόλιο 1: Η εξίσωση (2) ικανοποιείται από ένα μεγάλο αριθμό κυματικών φαινομένων (π.χ. ακουστικά κύματα και ηλεκτρομαγνητικά κύματα), όταν η διάδοση γίνεται σε ομογενές μέσο (ή στο κενό, για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα). Ας σημειωθεί ότι, στις περιπτώσεις αυτές η διαφορική εξίσωση (2) ισχύει γενικά, ανεξαρτήτως της συγκεκριμένης μορφής της κυματικής διαταραχής, ανεξαρτήτως, δηλαδή, του εάν το κύμα είναι επίπεδο, σφαιρικό, κυλινδρικό ή γενικότερο. Αυτό προκύπτει μετά από μαθηματική επεξεργασία των (δυναμικών) νόμων που διέπουν τα αντίστοιχα φαινόμενα, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση (2), καθώς και συγκεκριμένες εκφράσεις για την ταχύτητα διάδοσης c μέσω των παραμέτρων του φυσικού συστήματος.

2.2 Παραδείγματα κυματικών εξισώσεων

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε (με συνοπτικό σχολιασμό) διάφορα παραδείγματα κυματικών εξισώσεων, με σκοπό να δώσουμε μια ιδέα της ευρύτητας και της ποικιλίας αυτών. Όπως θα δούμε, κατά κανόνα ένα συγκεκριμένο φυσικό κυματικό φαινόμενο μοντελοποιείται μαθηματικά με περισσότερες από μία (διαφορετικές μεταξύ τους⁽¹⁸⁾) εξισώσεις, οι οποίες αποδίδουν διαφορετικές όψεις του φαινομένου, όπως αυτές εκδηλώνονται είτε σε διαφορετικές κλίμακες χώρου ή χρόνου, είτε λόγω διαφορετικών τιμών των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το κυματικό φαινόμενο.

Κατ' αρχήν θα περιορισθούμε σε εξισώσεις που περιγράφουν χωρικά μονοδιάστατη κυματική διάδοση, τις οποίες θα παρουσιάσουμε ομαδοποιημένες ως προς το φυσικό φαινόμενο που περιγράφουν.

2.2.1 Ελαστικά κύματα

-Εγκάρσια κύματα σε τεταμένη χορδή (string under tension)

Υπό την προϋπόθεση ότι η κλίση (έστω θ) της χορδής παραμένει αρκετά μικρή (έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε $\sin\theta \approx \theta$), η διάδοση εγκαρσίων κυμάτων σε χορδή διέπεται από την εξίσωση.

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{T}{\rho}\right) \cdot \eta_{,xx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho, \quad (1\alpha)$$

όπου T είναι η τάση (δύναμη η οποία διατείνει τη χορδή), ρ είναι η γραμμική πυκνότητα της χορδής, και $f(x,t)$ είναι η εγκάρσια φόρτιση (δύναμη ανά μονάδα μήκους) της χορδής.

Η εξίσωση (1α) είναι, προφανώς, ίδια με την εξίσωση (4) του εδαφίου 2.2.1, και παράγεται (όπως θα δούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο) με τη βοήθεια των νόμων της δυναμικής (νόμος Newton ή, ισοδυνάμως, αρχή του Hamilton). Η επι πλέον πληροφορία που περιέχεται στην (δυναμικά παραγόμενη) εξίσωση (1α), σε σχέση προς την (κινηματικά παραγόμενη) εξίσωση (4) του εδαφίου 2.2.1, είναι η ακριβής μορφή του συντελεστή της $\eta_{,xx}$, εκ της οποίας προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή δίδεται από τη σχέση $c = \sqrt{T/\rho}$.

Εάν η εγκάρσια κίνηση της χορδής συναντά μια ελαστική αντίδραση (π.χ., στην περίπτωση ελαστικής έδρασης), τότε η εξίσωση των εγκαρσίων κυμάτων της χορδής διαφοροποιείται ως εξής

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{T}{\rho}\right) \eta_{,xx} + \left(\frac{k}{\rho}\right) \eta = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho, \quad (1\beta)$$

όπου k είναι η ελαστική σταθερά της εξωτερικής αντίδρασης, και όλες οι άλλες παράμετροι έχουν την ίδια έννοια, όπως ανωτέρω.

Περαιτέρω, η εγκάρσια κίνηση της χορδής μπορεί να συναντά μια αποσβεστική εξωτερική αντίδραση, ανάλογη προς την ταχύτητά της. Τότε η εξίσωση (1α) παίρνει τη μορφή

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{T}{\rho}\right)\eta_{,xx} + \left(\frac{b}{\rho}\right)\eta_{,t} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho, \quad (1\gamma)$$

όπου b είναι ο συντελεστής απόσβεσης της εξωτερικής αντίδρασης. Βεβαίως, η ελαστική και η αποσβεστική εξωτερική αντίδραση μπορεί να συνυπάρχουν. Τότε η κυματική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{T}{\rho}\right)\eta_{,xx} + \left(\frac{b}{\rho}\right)\eta_{,t} + \left(\frac{k}{\rho}\right)\eta = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho \quad (1\delta)$$

-Διαμήκη κύματα σε λεπτή ελαστική ράβδο

Η βασική εξίσωση που διέπει τη διάδοση διαμήκων κυμάτων μικρού εύρους σε λεπτή (πρακτικά μονοδιάστατη) ελαστική ράβδο είναι η

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{E}{\rho}\right)\eta_{,xx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho, \quad (2\alpha)$$

όπου E και ρ είναι το μέτρο ελαστικότητας και η πυκνότητα του υλικού της ράβδου και $f(x,t)$ είναι διαμήκως κατανεμημένη φόρτιση. Η εξίσωση (2α) είναι ακριβώς του ίδιου τύπου με την (1α), αλλά με διαφορετικό συντελεστή της $\eta_{,xx}$. Η μορφή αυτού του συντελεστή, η οποία συνάγεται από τη δυναμική μελέτη του φαινομένου, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα διαμήκη κύματα σε λεπτή ράβδο διαδίδονται με ταχύτητα $c = \sqrt{E/\rho}$.

Εάν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού μεταβάλλεται ως προς x , δηλαδή $E = E(x)$, τότε η εξίσωση (2α) παίρνει τη μορφή

$$\eta_{,tt} - \frac{1}{\rho} \left(E(x) \eta_{,x} \right)_{,x} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho \quad (2\beta)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{E(x)}{\rho}\right)\eta_{,xx} - \left(\frac{E'(x)}{\rho}\right)\eta_{,x} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho.$$

Μια ακόμη πιο σημαντική περίπτωση έχουμε όταν μεταβάλλεται το εμβαδόν A της διατομής της ράβδου, δηλαδή όταν $A = A(x)$. Στην περίπτωση αυτή η κυματική εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{E}{\rho A(x)}\right) \left(A(x) \eta_{,x} \right)_{,x} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho, \quad (2\gamma)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{E}{\rho}\right)\eta_{,xx} - \frac{EA'(x)}{\rho A(x)}\eta_{,x} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho.$$

Όλες οι ανωτέρω εξισώσεις προκύπτουν υπό την προϋπόθεση (μεταξύ πολλών άλλων προϋποθέσεων) ότι οι εγκάρσιες διατομές της ράβδου παραμένουν αναλλοίωτες. Όμως, οι

μεταβολές της πυκνότητας ως προς x είναι εύλογο –σε ένα ελαστικό στερεό– να οδηγούν και και σε μεταβολές της εγκάρσιας διατομής του (διατήρηση μάζας). Αν ληφθεί υπ' όψιν αυτό το φαινόμενο, τότε προκύπτει η εξίσωση

$$\eta_{,tt} - \left(\frac{E}{\rho}\right)\eta_{,xx} - (v_i^r)^2 \cdot \eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho. \quad (2\delta)$$

όπου ν είναι ο λόγος Poisson του υλικού, και i_r η πολική ακτίνα αδράνειας αυτού. Η εξίσωση (2δ), η οποία παράγεται με τη βοήθεια της αρχής του Hamilton, αναφέρεται ως εξίσωση Love. Στην εξίσωση (2δ) βλέπουμε ότι εμφανίζεται και η τέταρτη μικτή παράγωγος (ως προς x και t) της κυματικής διαταραχής.

-Εγκάρσια κύματα σε δοκό (ή ράβδο, beam or rod)

Η εγκάρσια ταλάντωση ελαστικής ράβδου είναι πιο πολύπλοκο φαινόμενο από τη διαμήκη ταλάντωση αυτής, διότι συνδέεται με καμπτικές παραμορφώσεις και τάσεις. Η απλή θεωρία του Bernoulli για την κάμψη οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση για τα εγκάρσια κύματα σε δοκό

$$\eta_{,tt} + \left(\frac{EI}{\rho A}\right)\eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A. \quad (3\alpha)$$

όπου E και ρ είναι το μέτρο ελαστικότητας και η πυκνότητα του υλικού της ράβδου, I και A είναι η ροπή αδράνειας (ως προς τον ουδέτερο άξονα) και το εμβαδόν της διατομής της ράβδου, και $f(x,t)$ είναι η εγκάρσια φόρτιση της ράβδου. Η συνάρτηση $\eta = \eta(x,t)$ εκφράζει την εγκάρσια μετατόπιση της διατομής της δοκού. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην εξίσωση (3α) εμφανίζεται η τέταρτη παράγωγος ως προς x της διαταραχής.

Εάν τα χαρακτηριστικά E και ρ του υλικού, και I και A της διατομής της ράβδου, μεταβάλλονται ως προς x , τότε η εξίσωση (3α) γενικεύεται ως εξής:

$$\eta_{,tt} + \frac{1}{\rho(x)A(x)}(E(x)I(x) \cdot \eta_{,xx})_{,xx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A, \quad (3\beta)$$

η οποία, αν αναπτύξουμε την ως προς x παραγωγή, παίρνει τη μορφή

$$\eta_{,tt} - \frac{(EI)'}{\rho} \cdot \eta_{,xx} + \frac{2(EI)'}{\rho A} \cdot \eta_{,xxx} + \frac{EI}{\rho A} \cdot \eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A.$$

Εάν η δοκός είναι προεντεταμένη, δηλαδή αν θλίβεται ή εφελκύεται από μια δύναμη T , η οποία συνεχίζει να υπάρχει όταν διαδίδεται το εγκάρσιο κύμα, τότε η εξίσωση (3α) διαμορφώνεται ως εξής

$$\eta_{,tt} - \frac{T}{\rho A} \cdot \eta_{,xx} + \left(\frac{EI}{\rho A}\right) \cdot \eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A. \quad (3\gamma)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η περίπτωση δοκού η οποία εδράζεται σε βισκοελαστικό υλικό. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (3γ) εμπλουτίζεται με δύο ακόμη όρους:

$$\eta_{,tt} + \left(\frac{k}{\rho A}\right) \cdot \eta + \left(\frac{b}{\rho A}\right) \cdot \eta_{,t} - \left(\frac{T}{\rho A}\right) \cdot \eta_{,xx} + \left(\frac{EI}{\rho A}\right) \cdot \eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A. \quad (3\delta)$$

Θα κλείσουμε (χωρίς βέβαια να εξαντλήσουμε) τον κατάλογο των παραδειγμάτων κυματικών εξισώσεων που περιγράφουν τη διάδοση εγκάρσιων κυμάτων σε δοκό, παρουσιάζοντας την εξίσωση Timosenko, η οποία λαμβάνει υπ' όψιν την επίδραση των διατμητικών τάσεων και της στροφικής αδράνειας των στοιχείων της δοκού (τα οποία αγνοούνται στα πλαίσια της θεωρίας Bernoulli). Η εξίσωση Timosenko έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\eta_{,tt} + \left(\frac{\rho I}{GA\kappa}\right) \cdot \eta_{,tttt} - \left[\frac{I}{A}\left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right)\right] \cdot \eta_{,xxtt} + \left(\frac{EI}{\rho A}\right) \cdot \eta_{,xxxx} = 0 \quad \text{ή} \quad f(x,t)/\rho A, \quad (3\epsilon)$$

όπου οι παράμετροι E, ρ, I, A έχουν την ίδια έννοια ως ανωτέρω, G είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού και κ είναι συντελεστής ο οποίος περιγράφει την επίδραση των διατμητικών τάσεων και εξαρτάται από τη μορφή της διατομής της δοκού.

Τα εγκάρσια κύματα σε δοκό αποτελούν ένα ενδιαφέρον παράδειγμα κυματικού φαινομένου, το οποίο, όπως είδαμε, μας δίνει μια πλούσια ποικιλία κυματικών εξισώσεων, παραγομένων βάσει της δυναμικής του φαινομένου, σε συνδυασμό με διάφορες παραδοχές κινηματικής γεωμετρικής και καταστατικής⁽¹⁹⁾ φύσεως.

2.2.2 Ακουστικά κύματα

Θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια οι εξισώσεις Euler διατήρησης της μάζας και ορμής για την περίπτωση ελαφρά συμπιεστού ρευστού, όπως το νερό, σε κατάσταση σταθερής θερμοκρασίας του μέσου. Θεωρούμε δύο καταστάσεις: (i) την κατάσταση υποβάθρου πρό της διέγερσης και διάδοσης της ακουστικής διαταραχής (χάριν απλότητας θεωρούμε εδώ στάσιμο μέσο) και (ii) τη κατάσταση που αντιστοιχεί στο συνολικό πεδίο, και χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τα συνολικά μεγέθη $p_T, \rho_T, \mathbf{u}_T$, κλπ, και αντίστοιχα για τα μεγέθη υποβάθρου $p_0, \rho_0, \mathbf{u}_0$ και τα μεγέθη ακουστικής διαταραχής p, ρ, \mathbf{u} . Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση έχουμε

$$p_T = p_0 + p, \quad \rho_T = \rho_0 + \rho, \quad \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}, \quad (4)$$

και παρόμοιες σχέσεις για τα υπόλοιπα μεγέθη. Οι εξισώσεις Euler ικανοποιούνται για τα συνολικά μεγέθη και για τα μεγέθη υποβάθρου. Γράφοντας τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για τις δύο καταστάσεις, και αφαιρώντας αμοιβαία κατά μέλη, λαμβάνουμε προσεγγιστικές εξισώσεις για τα ακουστικά μεγέθη θεωρώντας ότι το ακουστικό πεδίο είναι πολύ μικρό και άρα οι εμπλεκόμενοι μη γραμμικοί όροι μπορούν να θεωρηθούν μικροί ανώτερης τάξης και μπορούν να παραληφθούν προσεγγιστικά. Με τη διαδικασία αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις ως προς τα ακουστικά μεγέθη

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη πρώτη εξίσωση και λαμβάνοντας την κλίση της δεύτερης παραπάνω εξίσωσης προκύπτουν

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0. \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την καταστατική εξίσωση στην απλή της εκδοχή

$$\rho = c^2 p, \quad (7)$$

όπου c η ταχύτητα διάδοσης της ακουστικής διαταραχής στο μέσο, καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0, \quad (8)$$

και ίδιες εξισώσεις για τα υπόλοιπα μεγέθη.

2.2.3 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Οι εξισώσεις Maxwell για τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό (απουσία ηλεκτρικού ρεύματος) απαρτίζονται από το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό \mathbf{E} και το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} , σε συνδυασμό με τους νόμους Faraday και Ampere Biot-Savart, τη διατήρηση του

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad (9)$$

όπου ε_0, μ_0 η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου (κενού) μέσω των οποίων ορίζεται η ταχύτητα διάδοσης

$$c^{-2} = \varepsilon_0 \mu_0. \quad (10)$$

Λαμβάνοντας την περιστροφή της τρίτης και της τέταρτης εξίσωσης και χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την πρώτη και την δεύτερη εξίσωση και ταυτότητες της ανάλυσης καταλήγουμε τελικά στις ακόλουθες εξισώσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (11)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις γενικεύονται για διηλεκτρικό μέσο με την παρουσία ρευμάτων.

2.2.4 Υδάτινα κύματα

Τα υδάτινα κύματα (water waves) είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον και περίπλοκο κυματικό φαινόμενο, το οποίο, εδώ και έναν και πλέον αιώνα, αποτελεί πηγή μεγάλου αριθμού (και μεγάλης ποικιλίας) κυματικών εξισώσεων (model wave equations), οι οποίες περιγράφουν κατά προσέγγιση διάφορες επί μέρους όψεις του φαινομένου. Η παραγωγή των διαφόρων model equations (γραμμικών και μη-γραμμικών) από τις γενικές εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών είναι συχνά μακροσκελής και περίπλοκη. Μια πλήρως παρουσίαση του θέματος, ακόμη και χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στις μεθόδους λύσεως των εξισώσεων, θα απαιτούσε μια... πολύτομη μονογραφία(!).

-Γραμμική εξίσωση ρηχού νερού

$$\eta_{tt} - (gh) \cdot \eta_{xx} - gh'(x) \cdot \eta_x = 0,$$

όπου $\eta = \eta(x,t)$ είναι η ανύψωση της επιφάνειας του νερού και $h(x)$ είναι το τοπικό βάθος. Όταν $h(x) = \text{σταθ.}$, τότε $h'(x) = 0$, και η εξίσωση (1α), παίρνει τη μορφή της εξίσωσης D' Alembert, δηλαδή της (κινηματικά παραγόμενης) εξίσωσης (4) του εδαφίου 2.2.1. Η τελευταία εξίσωση, όπως γνωρίζουμε δεν παρουσιάζει διασπορά, δηλαδή μια κυματομορφή διαδίδεται αναλλοίωτη με ταχύτητα \sqrt{gh} . Όμως, τα υδάτινα κύματα γενικώς εμφανίζουν διασπορά. Η παρακάτω εξίσωση έχει αυτή την ιδιότητα

-Γραμμική εξίσωση ρηχού νερού με όρο διασποράς

$$\eta_{tt} - gh \cdot \eta_{xx} - \frac{1}{3} h^2 \cdot \eta_{xxx} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για σταθερό βάθος νερού ($h = \text{σταθ.}$), και όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μεγάλο ως προς το βάθος, ενώ, ταυτόχρονα, το πλάτος κύματος πολύ μικρό ως προς το βάθος του νερού. (Πολύ ειδική περίπτωση, πράγματι!). Πιο "πλούσια" είναι, όμως, η ακόλουθη εξίσωση

-(Μη-γραμμική) εξίσωση Boussinesq

$$\eta_{tt} - gh \cdot \eta_{xx} - \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} - \frac{3}{2} g (\eta^2)_{,xx} = 0,$$

στην οποία περιλαμβάνεται (σε κάποιο βαθμό) τόσο το φαινόμενο της διασποράς όσο και το φαινόμενο της μη-γραμμικότητας. Όμως, προσοχή! Και η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για πολύ ρηχό νερό, όταν δηλαδή το μήκος κύματος είναι πολύ μεγάλο ως προς το βάθος του νερού.

Οι ανωτέρω τρεις εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τον μετασχηματισμό $x \rightarrow -x$, και άρα στις λύσεις τους περιλαμβάνονται κύματα διαδιδόμενα και προς τις δύο κατευθύνσεις (αυξανόμενα x , και μειούμενα x). Αν εισάγουμε a priori την υπόθεση ότι η κυματική διαταραχή διαδίδεται προς μια κατεύθυνση (αυξανόμενα x), μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη one-way equation, χαμηλότερης τάξης.

-Η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV)

$$\eta_{,t} + \sqrt{gh} \cdot \eta_{,x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \eta \eta_{,x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \cdot \eta_{,xxx} = 0,$$

εκ της οποίας, παραλείποντας το μη-γραμμικό όρο, βρίσκουμε τη γραμμική εξίσωση

$$\eta_{,t} + \sqrt{gh} \cdot \eta_{,x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \cdot \eta_{,xxx} = 0.$$

Παραλλαγές των ανωτέρω εξισώσεων, με καλύτερη απόδοση της διασποράς, αποτελούν οι ακόλουθες δύο εξισώσεις

-H εξίσωση Benjamin, Bona and Mahony (BBM)

$$\eta_{,t} + \sqrt{gh} \cdot \eta_{,x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \eta \eta_{,x} - \frac{1}{6} h^2 \eta_{,xxx} = 0,$$

και

-H συνδυασμένη εξίσωση KdV-BBM

$$\eta_{,t} + \sqrt{gh} \cdot \eta_{,x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \eta \eta_{,x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \cdot \eta_{,xxx} - \frac{1}{2} b h^2 \sqrt{gh} \cdot \eta_{,xxx} = 0,$$

η οποία για $b = -1/3$ δίδει την KdV, και για $b = 0$ δίδει την BBM. Βέλτιστη τιμή της "ελεύθερης" σταθερής b , ώστε να αποδίδεται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο (πάντως, όχι πλήρως) η διασπορά, είναι η τιμή $3/10$.

Περιγράφεται στην συνέχεια ένα αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό της διάδοσης κυματισμών σε περιβάλλον ρηχού νερού με τοπογραφία πυθμένα με βάση την γραμμικοποιημένη εξίσωση Boussinesq.

2.2.5 Αριθμητικό σχήμα διάδοσης γραμμικών κυματισμών σε ρηχό νερό

Η κλασική κυματική εξίσωση (υπερβολική ΜΔΕ) σε ομογενές μέσο

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

όπου c η σταθερή ταχύτητα διάδοσης, επιδέχεται κατά τα γνωστά στην μια χωρική διάσταση τη γενική λύση $\eta(x \pm ct)$. Στην περίπτωση ανομοιογενούς μέσου η ανωτέρω εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

όπου $c(x)$ η μεταβαλλόμενη χωρικά τιμή της ταχύτητας διάδοσης. Στην γενικότερη αυτή περίπτωση η λύση κατασκευάζεται αριθμητικά. Θα περιγράψουμε στην συνέχεια την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών συνθηκών, αναφερόμενοι σε εφαρμογές διάδοσης υδάτινων κυματισμών στην περιοχή σχετικά ρηχού νερού κάνοντας χρήση της προσέγγισης Boussinesq, η οποία ενσωματώνει επιδράσεις ήπιας κλίσης πυθμένα καθώς και ασθενούς διασποράς και μη γραμμικότητας. Αμελώντας εδώ μη γραμμικά φαινόμενα επικεντρωνόμαστε στην γραμμικοποιημένη εξίσωση Boussinesq

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - g \frac{dh(x)}{dx} \eta - \frac{h^2(x)}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 . \quad (3)$$

Τα χαρακτηριστικά διασποράς του ανωτέρω μοντέλου προκύπτουν εύκολα εξετάζοντας χωρο-χρονικά αρμονικές λύσεις σε σταθερό βάθος νερού. Στην περίπτωση αυτή $dh/dx = 0$, οπότε η εξίσωση (3) λαμβάνει την απλούστερη μορφή

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{h^2(x)}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 . \quad (4)$$

Αναζητώντας λύσεις της Εξ.(4) της μορφής $\eta(x,t) = H \cos(kx \pm \omega t)$ καταλήγουμε για την ταχύτητα διάδοσης αυτών των λύσεων $\hat{c}(k) = \omega/k$ στην ακόλουθη σχέση

$$\frac{\hat{c}^2(k)}{gh} = \left(1 + \frac{(kh)^2}{3} \right)^{-1} , \quad (5a)$$

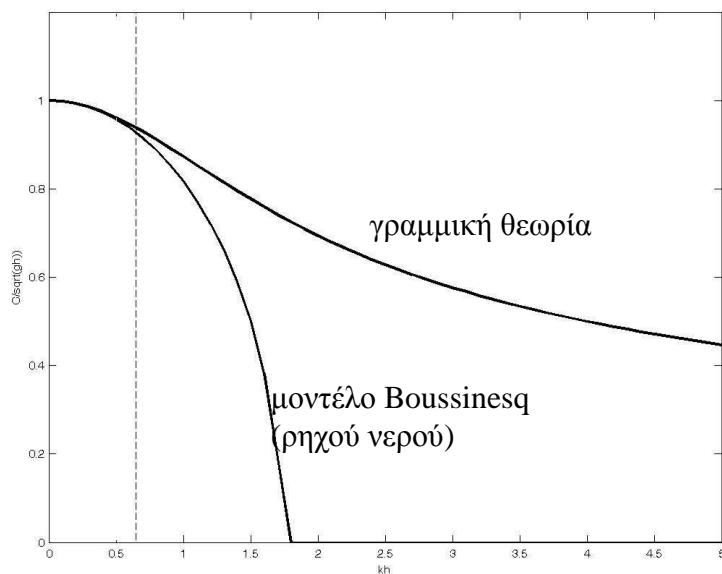
από όπου λαμβάνουμε την ακόλουθη προσέγγιση

$$\frac{\hat{c}(k)}{\sqrt{gh}} \approx \left(1 - \frac{(kh)^2}{3} \right)^{1/2} . \quad (5b)$$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα συγκρίνεται πολύ καλά στη περιοχή των κυματισμών ρηχού προς ενδιάμεσο βάθος νερού με το αντίστοιχο αποτέλεσμα από την γενική σχέση διασποράς της γραμμικής θεωρίας υδάτινων κυματισμών

$$\frac{c(k)}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{\tanh(kh)}{kh} \right)^{1/2} , \quad (6)$$

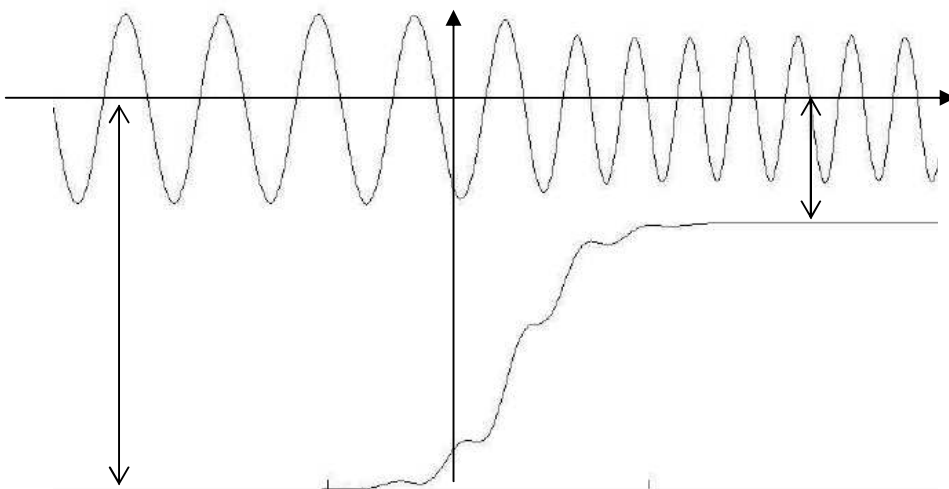
όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1, όπου παρατηρούμε την πρακτική ταύτιση των Εξ.(5b) και (6) για τιμές του $kh < 0.63$ ($h/\lambda < 0.1$). Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από την ασυμπτωτική ανάπτυξη της υπερβολικής εφαπτομένης σε σειρά Taylor στη γειτονιά του μηδενός: $\tanh(kh) = kh - (kh)^3/3 + O(kh)^5$, που μας επιτρέπει να λάβουμε ως προσέγγιση την σχέση (5b) από την (6).



Σχήμα 1. Σχέση διασποράς του μοντέλου Boussinesq, Εξ.(5), σε σύγκριση με τη γραμμικοποιημένη θεωρία υδάτινων κυματισμών, Εξ.(6).

2.2.6 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Boussinesq

Στην γενικότερη περίπτωση διάδοσης κυματισμών σε ρηχό νερό και ανομοιόμορφο πυθμένα η επίλυση της Εξ.(3) με κατάλληλα αρχικά και συνοριακά δεδομένα γίνεται αριθμητικά. Μια δυνατότητα προσφέρεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών που θα περιγράψουμε παρακάτω. Θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε διάδοση αρμονικών κυματισμών που προσπίπτουν σε περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας που εκτείνεται από τη θέση $x=a$ έως $x=b$ κάτω από τις υποθέσεις ρηχού νερού, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2. Στο ανωτέρω διάστημα το βάθος του νερού μεταβάλλεται ομαλά από $h(x=a) = h_a$ σε $h(x=b) = h_b$.



Σχ. 2 Διαδοση κυματισμών ρηχού νερού σε μεταβαλλόμενη βαθυμετρία

Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στο πρόβλημα διάδοσης ως πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών, όπου η λύση ξεκινά από την ηρεμία, δηλαδή

$$\eta(x, t=0) = 0, \quad \partial_t \eta(x, t=0) = 0. \quad (7)$$

Το προσπίπτον κύμα δεδομένου πλάτους H_1 θεωρείται αρμονικό και εισάγεται ομαλά στο χωρίο, δηλαδή από τα ακόλουθα δεδομένα τύπου Dirichlet στη θέση $x=a$

$$\eta(x=a, t) = H \left(1 - \exp(-\gamma t^2) \right) \cos(k_a x - \omega t), \quad (8)$$

όπου ο κυματαριθμός k_a ικανοποιεί τη σχέση διαφοράς

$$\omega^2 = gh_a k_a^2 \left(1 - \frac{(k_a h_a)^2}{3} \right), \quad (9)$$

και η σταθερά γ επιλέγεται κατάλληλα ώστε τα μεταβατικά φαινόμενα, ξεκινώντας από την ηρεμία, να έχουν ολοκληρωθεί σε χρονικό διάστημα τάξης μεγέθους μιάς περιόδου $T = 2\pi / \omega$.

Αντίστοιχα στην θέση εξόδου $x=b$ θέλουμε το κύμα που θα δημιουργηθεί να εξέρχεται του χωρίου χωρίς ανακλάσεις. Λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση του σταθερού βάθους $h_b = h(x_b)$ στην περιοχή εξόδου $x=b$, παρατήρηση που οδηγεί τελικά στην διαμόρφωση περιοδικού εξερχόμενου κύματος με χαρακτηριστικό κυματαριθμό k_b , ο οποίος επίσης θα πρέπει να ικανοποιεί την ίδια σχέση διασποράς

$$\omega^2 = gh k_b^2 \left(1 - \frac{(k_b h_b)^2}{3} \right), \quad (10)$$

η λύση στην γειτονιά $x=b$ θα συμπεριφέρεται ως ακολούθως

$$\eta(x, t) = H_b \cos(k_b x - \omega t - \varepsilon), \quad (11)$$

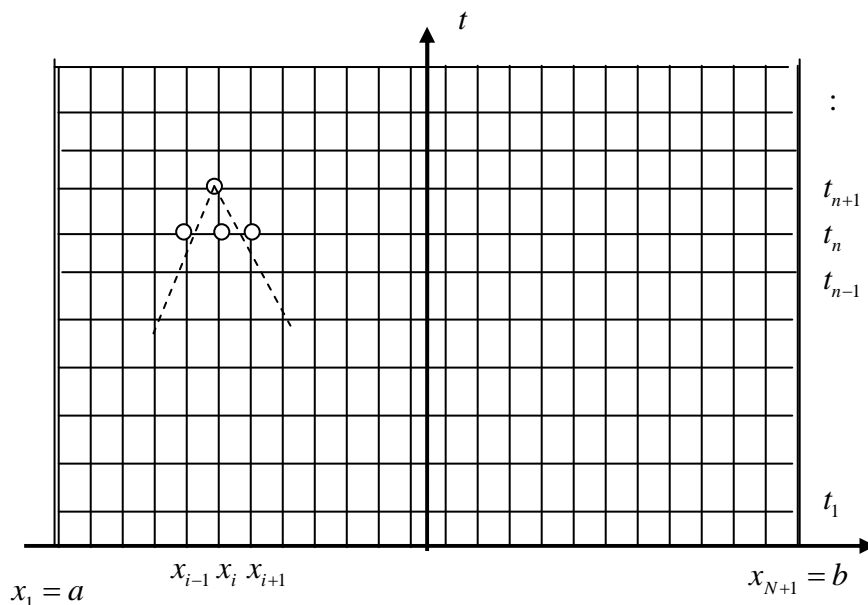
από όπου προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη ακτινοβολίας στη θέση $x=b$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_b \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad c_b = \frac{\omega}{k_b}. \quad (12)$$

Η ανωτέρω συνθήκη περιγράφει εξερχόμενους αρμονικούς κυματισμούς με ταχύτητα διάδοσης c_b .

Στην συνέχεια ο φυσικός χώρος και ο χρόνος διακριτοποιούνται με την εισαγωγή ενός ομαλού πλέγματος, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 3. Το διάστημα $a \leq x \leq b$ διακριτοποιείται σε N ισοδιαστήματα μήκους Δx , χρησιμοποιώντας τη διαμέριση $x_i = -a + (i-1) \Delta x$, $i=1, 2, \dots, N+1$. Αντίστοιχα, εισάγεται το χρονικό βήμα Δt , και οι διακριτοί χρόνοι

$t_n = n \delta t, n = 0, 1, 2, \dots$. Η άγνωστη συνάρτηση (κυματικό πεδίο) $\eta(x, t)$ αντιπροσωπεύεται στο πλέγμα από τις κομβικές της τιμές $\eta_i^n = \eta(x_i, t_n), i = 1, 2, \dots, N + 1, n = 0, 1, 2, \dots$.



Σχ.3. Αριθμητικό πλέγμα για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Στα πλαίσια εφαρμογών της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών θα χρησιμοποιηθούν εκφράσεις δεύτερης τάξεως ακρίβειας για την προσέγγιση πρώτων και δεύτερων παραγώγων που εμφανίζονται στη εξίσωση και στις αρχικές και συνοριακές συνθήκες, βλ., π.χ., Press et al (1996).

Αναλύοντας τον πρώτο όρο της εξίσωσης (17), προσεγγίζουμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \text{ με την ακόλουθη μορφή κεντρικών διαφορών } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\eta_i^{n+1} - 2\eta_i^n + \eta_i^{n-1}}{\delta t^2} + O(\delta t^3). \quad (13)$$

Αντίστοιχα, διακριτοποιούνται οι χωρικές παράγωγοι που εμφανίζονται στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n}{\delta x^2} + O(\delta x^3), \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\delta x} + O(\delta x^3). \quad (14)$$

Παρατηρώντας τώρα τον τελευταίο όρο που εμπλέκει παράγωγο ανώτερης τάξης της εξίσωσης (3), η προσέγγιση του θα γίνει με παρόμοιο τρόπο με τη βοήθεια κεντρικών διαφορών τάξης, δύο φορές ως προς τον χρόνο t και δύο ως προς τη χωρική μεταβλητή x :

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} \approx \frac{1}{\delta t^2} \left(\frac{\eta_{i+1}^{n+1} - 2\eta_i^{n+1} + \eta_{i-1}^{n+1}}{\delta x^2} - 2 \frac{\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n}{\delta x^2} + \frac{\eta_{i+1}^{n-1} - 2\eta_i^{n-1} + \eta_{i-1}^{n-1}}{\delta x^2} \right). \quad (15)$$

Η επίλυση της εξίσωσης θα πραγματοποιηθεί με ένα σχήμα ολοκλήρωσης στο χρόνο, το οποίο με βάση τα λύση έως τη χρονική στιγμή t_n και την παραχθείσα πληροφορία σε όλους τους χωρικούς κόμβους του πλέγματος προβλέπει τη λύση στο επόμενο χρονικό βήμα t_{n+1} , και η επίλυση της κυματικής εξίσωσης Boussinesq παρέχεται με την επανάληψη αυτού του σχήματος στους επόμενους χρόνους. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω διακριτοποιήσεις οδηγούμαστε σε ένα μη-πεπλεγμένο (explicit) σχήμα που δεν εξασφαλίζει εκ των προτέρων την ευστάθεια της αριθμητικής λύσης. Αυτό μπορεί να τροποποιηθεί με την εισαγωγή ενός πεπλεγμένου (implicit) σχήματος, το οποίο εξασφαλίζει την ευστάθεια σε βάρος εμφάνισης φαινομένων αριθμητικής απόσβεσης, και οδηγεί τελικά σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{A}(\theta) \boldsymbol{\eta}^{n+1} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\eta}^{n-1}; \theta), \quad (16)$$

όπου $\boldsymbol{\eta}^{n+1} = \boldsymbol{\eta}_i^{n+1}$. Τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{A} και του δεξι-μέλους \mathbf{b} θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα στην συνέχεια.

2.2.7 Μέθοδος Crank-Nicholson

Κατά τη μέθοδο αυτή (βλ., π.χ., Smith 1988) χρησιμοποιείται μια μίξη της πληροφορίας τη τρέχουσα χρονική στιγμή t_n και την επόμενη χρονική στιγμή t_{n+1} για την προσέγγιση των χωρικών παραγώγων στην εξίσωση, ως ακολούθως

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \approx \theta \frac{\eta_{i+1}^{n+1} - 2\eta_i^{n+1} + \eta_{i-1}^{n+1}}{\delta x^2} + (1-\theta) \frac{\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n}{\delta x^2}, \quad (17)$$

όπου θ είναι μια σταθερά που κυμαίνεται στο διάστημα $0 \leq \theta \leq 1$. Αντίστοιχα,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \theta \frac{\eta_{i+1}^{n+1} - \eta_{i-1}^{n+1}}{2\delta x} + (1-\theta) \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n}{2\delta x}. \quad (18)$$

Είναι προφανές ότι η τιμή $\theta=0$ αντιστοιχεί στο μη πεπλεγμένο (explicit) σχήμα και η τιμή $\theta=1$ στο πλήρως πεπλεγμένο (implicit) σχήμα. Εισάγοντας τις Εξ.(13),(15), καθώς και (17) και (18) στην εξίσωση Boussinesq αυτή λαμβάνει τελικά τη μορφή της εξίσωσης του γραμμικού συστήματος (17). Τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα \mathbf{A} είναι

$$A_{i-1} = -\theta\sigma_i^2 - h_i^2 / (3\delta x^2), \quad A_{i+1} = 1 + 2\theta\sigma_i^2 + 2h_i^2 / (3\delta x^2), \quad A_{ii+1} = -\theta\sigma_i^2 - h_i^2 / (3\delta x^2), \\ \text{για } i = 2, 3, \dots, N, \quad (19)$$

όπου σ_i η παράμετρος (αριθμός Courant) $\sigma_i = \frac{c_i}{\delta x / \delta t}$ οριζόμενη με βάση την τοπική τιμή της ταχύτητας μετάδοσης $c_i = c(x_i)$, η οποία υπολογίζεται από την σχέση ορίσμού $c_i = \omega / k_i$ με τον τοπικό κυματαριθμό να παρέχεται από την σχέση διασποράς της εξίσωσης

$$\omega^2 = gh_i k_i^2 \left(1 - \frac{(k_i h_i)^2}{3} \right), \quad (20)$$

θεωρούμενη στο τοπικό βάθος $h_i = h(x_i)$. Αντίστοιχα, το διάνυσμα-δεξί μέλος \mathbf{b} του διακριτού συστήματος καθορίζεται από πληροφορία που έχει ήδη υπολογιστεί, και δίνεται από τη σχέση

$$b_i = -\eta_i^{n-1} + 2\eta_i^n + \sigma_i^2(1-\theta)(\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n) + \\ -2h_i^2/(3\delta x^2)(\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n) + h_i^2/(3\delta x^2)(\eta_{i+1}^{n-1} - 2\eta_i^{n-1} + \eta_{i-1}^{n-1}), \text{ για } i = 2, 3, \dots, N. \quad (21)$$

Το διακριτό σύστημα θα πρέπει να συμπληρωθεί από τις συνοριακές συνθήκες (11) και (12) στην διακριτή τους μορφή. Η συνθήκη Dirichlet στην είσοδο του κύματος γράφεται

$$\eta(x_1, t_{n+1}) = \eta_1^{n+1} = H(1 - \exp(-\gamma t_{n+1}^2)) \cos(k_a x_1 - \omega t_{n+1}), \quad (22)$$

οπότε

$$A_{11} = 1 \text{ και } b_1 = \eta_1^{n+1}. \quad (23)$$

Αντίστοιχα η συνθήκη ακτινοβολίας στην έξοδο του χωρίου γράφεται χρησιμοποιώντας ένα πίσω σχήμα διαφορών δεύτερης τάξης

$$\frac{\eta_{N1}^{n+1} - \eta_{N1}^n}{\delta t} + c_b \left(\theta \frac{3\eta_{N1}^{n+1} - 4\eta_N^{n+1} + \eta_{N-1}^{n+1}}{2\delta x} + (1-\theta) \frac{3\eta_{N1}^n - 4\eta_N^n + \eta_{N-1}^n}{2\delta x} \right) = 0, \quad (24)$$

από όπου προκύπτει

$$A_{N1N1} = 1 + 1.5\sigma_b\theta, \quad A_{N1N} = -2\sigma_b\theta, \quad A_{N1N-1} = 1.5\sigma_b\theta, \text{ και} \\ b_{N1} = 1 - \sigma_b(1-\theta)(1.5\eta_{N1}^n - 2\eta_N^n + \eta_{N-1}^n). \quad (25)$$

Επίσης, οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να υλοποιηθούν για τις πρώτες χρονικές στιγμές. Έτσι, θεωρώντας ότι η κατάσταση ξεκινά από την ηρεμία

$$\eta_i^1 = \eta(x_i, t_1) = 0, \quad \eta_i^2 = \eta(x_i, t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N+1. \quad (26)$$

Από την ανάλυση της μεθόδου γνωρίζουμε ότι η συνθήκη Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\sigma_{\max} = \max\left(\frac{c_i}{\delta x / \delta t}\right) < 1, \quad (27)$$

είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για σύγκλιση του μη πεπλεγμένου (explicit) σχήματος το οποίο ελαχιστοποιεί τις αριθμητικές αποσβέσεις, ενώ το πεπλεγμένο (implicit) σχήμα είναι ευσταθές. Παρατηρώντας το αριθμητικό πλέγμα η ανωτέρω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ο φυσικός κώνος επιρροής που εικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 3 να εμπεριέχεται εντός του αριθμητικού κώνου διάδοσης πληροφορίας στο πλέγμα.

Στο Σχήμα 4 παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο αριθμητικής κατασκευής της λύσης πάνω από τοπογραφία πυθμένα για μια ρήγωση η οποία περιλαμβάνει κα πτυχώσεις και δίνεται από συνάρτηση βάθους

$$h(x) = \frac{h_a + h_b}{2} - \frac{h_a - h_b}{2} \tanh(\alpha(x - x_{mid})) + h_c \cos(k_b x) \exp(-\gamma_c(x - x_{mid})^2). \quad (28)$$

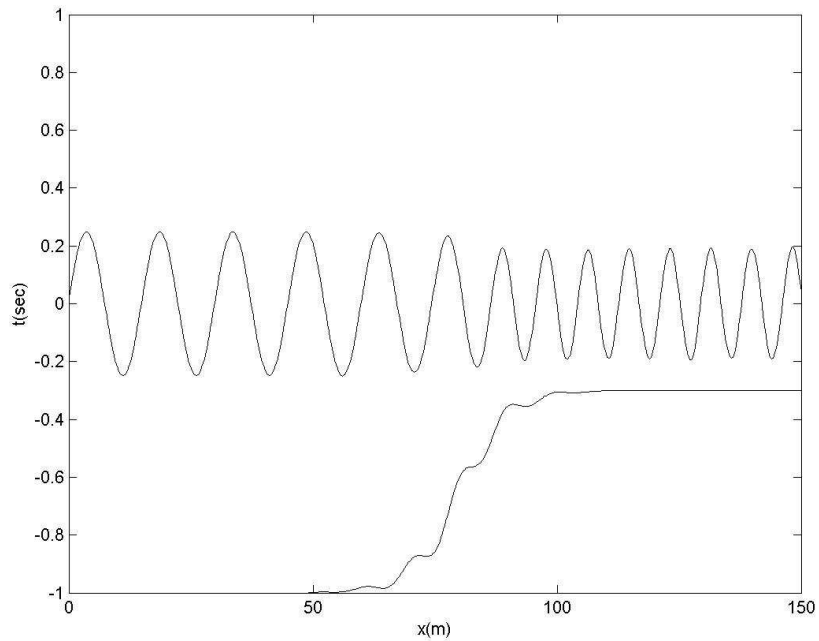
Η παραπάνω μορφή πυθμένα αποτελείται από την υπέρθεση μιας ομαλής μετάβασης από το βάθος h_a στο βάθος h_b (ομαλή ρήχωση στη θέση $x = x_{mid}$), η κλίση της οποίας ελέγχεται από την παράμετρο α , και μια ημιτονοειδή πτύχωση χαρακτηριστικής περιοδικότητας $\lambda_b = 2\pi/k_b$, η οποία αποσβένεται εκθετικά σε μεγάλες αποστάσεις από την ενδιάμεση θέση $x = x_{mid}$. Η λύση υπολογίστηκε με το μη πεπλεγμένο (explicit) σχήμα που παρέχεται ως Matlab πρόγραμμα στο τέλος του παρόντος εδαφίου. Τέλος, στο Σχήμα 5 εικονίζεται η εξέλιξη της λύσης διάδοσης κύματος πάνω από την ανωτέρω τοπογραφία πυθμένα σε συνθήκες σχετικά ρηχού νερού, όπως υπολογίστηκε με το αριθμητικό σχήμα που παρουσιάστηκε.

Αν και στο παρόν εδάφιο επικεντρωθήκαμε στην αριθμητική μελέτη της διάδοσης υδάτινων κυματισμών στο ρηχό νερό λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει σχετικά με τα κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον που εξετάζουμε, η εφαρμογή του σχήματος σε άλλες περιπτώσεις μονοδιάστατων μέσων είναι τετριμμένη. Η επέκταση του στις δύο και τρεις χωρικές διαστάσεις με πεδία εφαρμογών τη διάδοση υδάτινων κυματισμών σε πραγματική τοπογραφία πυθμένα και υδροακουστικών φαινομένων σε ανομοιογενές θαλάσσιο/υποθαλάσσιο περιβάλλον, αντίστοιχα, αποτελούν πολύ ενδιαφέροντα θέματα.

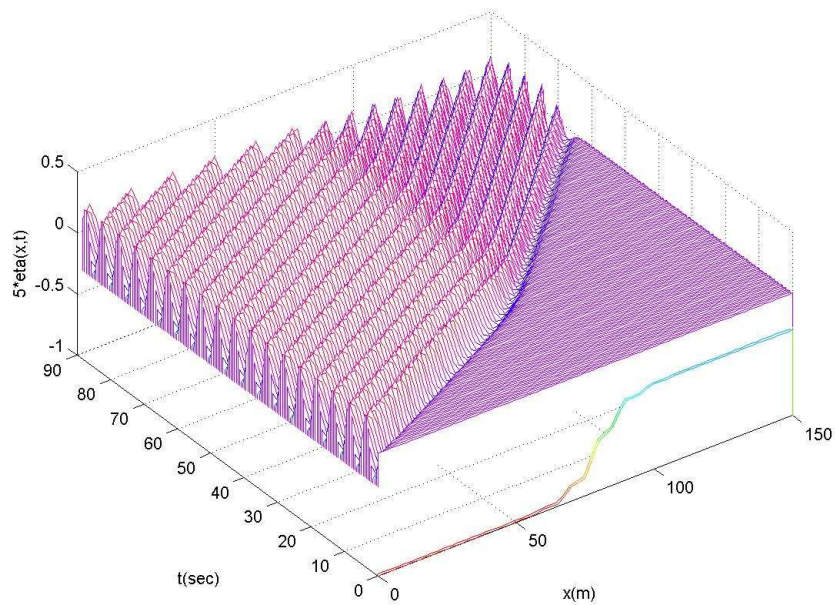
Βιβλιογραφικές Αναφορές

Smith G.D., 1985, Numerical solution of PDEs. The method of finite differences, Oxford Univ. Press.

Press W.H., [Teukolsky](#) S.A., [Vetterling](#) W.T., [Flannery](#) B.P., 1996, Numerical Recipes, Cambridge University Press.



Σχήμα 4. Στιγμιότυπο της διάδοσης του κύματος(εξίσωση d'Alembert για ταχύτητα με όρο διασποράς) μια τυχαία χρονική στιγμή. Ξεχωρίζει ο μεταβλητός πυθμένας και η μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας καθώς πλησιάζει προς την υποτιθέμενη ακτή.



Σχήμα 5. Εξέλιξη της λύσης διάδοσης κύματος πάνω από τοπογραφία πυθμένα σε ρηχό νερό, όπως υπολογίσθηκε με το αριθμητικό σχήμα που παρουσιάσθηκε.

πρόγραμμα Matlab

```

clear all;close all;
gi=9.81;
h1=1;h3=0.3; HH=h1/10;
%input('constant/variable depth (0/1)=');
%input('Give theta (0-1)=');

xi1=linspace(-30,30,501);
yi1=-0.65+0.35*tanh(0.1*xi1)+0.05*cos((2*pi/10)*xi1).*exp(-0.005*xi1.^2);
xi= 50+[-50 -1 30+xi1 61 100];b=max(xi);
hi= [h1 h1 -yi1 h3 h3];

dx=0.25;x=[0:dx:max(xi)];Nxi=length(x);I=length(x);dx=x(2)-x(1);
h=interp1(xi,hi,x);
if idepth==0, h=h1*ones(size(x));end
h3=h(end);

l1=h1*15;k1=2*pi/l1;
om=sqrt((gi*h1)*(k1^2)/(1+((k1*h1)^2)/3));T=2*pi/om;dt=T/100;J=1800;
c1=sqrt(gi*h1)*sqrt(1-(1/3)*(k1*h1)^2);
s3=om*om*h3/gi;k3=sqrt(s3/(1-s3/3))/h3;l3=2*pi/k3;
c3=sqrt(gi*h3)*sqrt(1-(1/3)*(k3*h3)^2);
disp('shallowness ratio (start/end)');
[h1/l1 h3/l3]

z=zeros(J,I);

plot(x,-h,'w');hold on;xlabel('x(m)');ylabel('5*eta(x,t)')
disp('press enter to continue....');
pause
hfi=plot(x,z(1,:), 'w');
set(hfi, 'Erasemode', 'xor');
axis([0 b -1 1]);
drawnow

dx2=dx^2; COUR=sqrt(gi*h1)/(dx/dt)
A = zeros(I,I);
beta = zeros(1,I);
A(1,1)=1;
A(I,I)=(1/dt)+0.5*c3/dx;A(I,I-1)=-0.5*c3/dx;
for ii=2:I-1
    q=dt*sqrt(gi*h(ii))/dx;q2(ii)=q^2;
A(ii,ii-1)= -the*q2(ii) -(h(ii)^2/3/dx2);
A(ii,ii) = 1+2*the*q2(ii) +2*(h(ii)^2/3/dx2);
A(ii,ii+1)=-the*q2(ii) -(h(ii)^2/3/dx2);
end

for n=3:J
t = (n-1)*dt;
beta = zeros(1,I); beta(1)=0.5*HH*sin(k1*x(1)-om*t);
beta(I)=(z(n-1,I)/dt) -0.5*c3*(z(n-1,I)-z(n-1,I-1))/dx;
for ii=2:I-1
beta(ii)=(-z(n-2,ii) +2*z(n-1,ii) ) +...
(1-the)*q2(ii)*(z(n-1,ii+1)-2*z(n-1,ii) +z(n-1,ii-1) ) +...
-2*(h(ii)^2/3/dx2)*(z(n-1,ii+1)-2*z(n-1,ii)+z(n-1,ii-1)) +...
+(h(ii)^2/3/dx2)*(z(n-2,ii+1)-2*z(n-2,ii)+z(n-2,ii-1)) ;
end
un = A\beta';
z(n,:) = un';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
set( hfi, 'xdata',x,'ydata',5*z(n,:), 'Erasemode' , 'xor ' ) ;

pause(0.01);
end

figure
waterfall(x(1:10:end),0:10*dt:(J-1)*dt,5*z(1:10:end,1:10:end));
hold on
waterfall(x(1:10:end),[0 10*dt],[-h(1:10:end); h(1:10:end)])
view(-36,56)
xlabel('x(m)');ylabel('t(sec)');zlabel('5*eta(x,t)');

```

2.5 Απλές λύσεις κυματικών εξισώσεων σε δύο και τρεις διαστάσεις

Στο εδάφιο αυτό θα ασχοληθούμε με την κατασκευή απλών λύσεων της εξίσωσης d'Alembert και της εξ' αυτής προκύπτουσας (στο πεδίο συχνοτήτων) εξίσωσης Helmholtz, στις δύο και στις τρεις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, στα εδάφια 2.5.1 και 2.5.2 θα ασχοληθούμε με τις απλές λύσεις που αντιπροσωπεύουν σφαιρικά και κυλινδρικά κύματα της ομογενούς εξίσωσης d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

διατυπωμένης ως προς το βαθμωτό πεδίο $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ στις τρεις διαστάσεις (αντίστοιχα $\Phi(x_1, x_2, t)$ στις δύο διαστάσεις). Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, c , θεωρείται σταθερή σε όλα τα σημεία του χώρου. Η εξίσωση d'Alembert (1) περιγράφει ένα μεγάλο αριθμό κυματικών φαινομένων, όπως π.χ. ακουστικά κύματα σε ομογενές ρευστό και ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό.

Στην συνέχεια, στα εδάφια 2.5.3 και 2.5.4, θα ασχοληθούμε με τις αντίστοιχες απλές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz,

$$\Delta \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (2)$$

ως προς το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\Phi(\mathbf{x}, \omega) = \overset{\circ}{\Phi}(x_1, x_2, x_3, \omega)$ στις τρεις διαστάσεις (αντιστοίχως $\overset{\circ}{\Phi}(x_1, x_2, \omega)$ στις δύο διαστάσεις), όπου $k = \omega/c$ είναι ο κυματαριθμός (κυματική παράμετρος), ο οποίος επίσης θεωρείται σταθερός σε όλα τα σημεία του χώρου.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η εξίσωση (1), η οποία εκφράζει την εξέλιξη ενός κυματικού φαινομένου στην πορεία του χρόνου, καταλήγει στην εξίσωση (2) στην ειδική περίπτωση αρμονικής χρονικής εξάρτησης. Πράγματι, κάνοντας χρήση της γνωστής μας αναπαράστασης

$$\Phi(\mathbf{x}; t) = \text{Re} \left(\overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{x}; \omega) e^{-j\omega t} \right), \quad (3)$$

η οποία εκφράζει ακριβώς την αρμονική εξάρτηση από τον χρόνο, λαμβάνουμε μετά από απλές πράξεις την εξίσωση Helmholtz (2).

Σημειώνουμε ακόμη ότι, από μαθηματική άποψη, οι εξισώσεις (1) και (2) ανήκουν σε διαφορετικές οικογένειες διαφορικών εξισώσεων. Η εξίσωση d'Alembert είναι υπερβολικού τύπου, ενώ η εξίσωση Helmholtz είναι ελλειπτικού τύπου.

2.5.1 Σφαιρικά κύματα ως απλές λύσεις της εξίσωσης d'Alembert στις τρεις διαστάσεις.

Εκμεταλλευόμενοι την ομογένεια του μέσου διάδοσης (c =σταθερό), αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης d'Alembert που να παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία ως προς τυχαίο σημείο του χώρου, έστω \mathbf{x}_0 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας λαμβάνουμε $\mathbf{x}_0 = 0$. (Αυτό ισοδυναμεί με τη θεώρηση ενός δευτέρου συστήματος συντεταγμένων με αρχή το σημείο \mathbf{x}_0 και την εισαγωγή νέων συντεταγμένων: $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τόσο η εξίσωση d'Alembert, όσο και η εξίσωση Helmholtz παραμένουν αναλλοίωτες ως προς τις νέες συντεταγμένες \mathbf{x}' . Να το αποδείξετε).

Εισάγοντας σφαιρικές συντεταγμένες $\{r, \theta, \phi\}$, με αρχή το σημείο \mathbf{x}_0 ,

$$x_1 = r \cos \phi \cos \theta, \quad (1a)$$

$$x_2 = r \cos \phi \sin \theta, \quad (1b)$$

$$x_3 = r \sin \phi, \quad (1c)$$

η εξίσωση d'Alembert γράφεται στην μορφή

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \right\} = 0, \quad (2)$$

όπου η ποσότητα στην αγκύλη είναι η έκφραση του τελεστή Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Αναζητούμε τώρα λύσεις της εξίσωσης (2) που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία, δηλαδή λύσεις που εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r από την αρχή του συστήματος, της μορφής

$$\Phi(r, \phi, \theta; t) = \Phi(r, t). \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση d'Alembert (2), εύκολα καταλήγουμε στην ακόλουθη απλούστερη εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) = 0. \quad (4)$$

Στην συνέχεια, αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (4) που εξασθενούν με την απόσταση από την αρχή του συστήματος, δηλαδή λύσεις της μορφής

$$\Phi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r}, \quad (5)$$

όπου $f(r, t)$ η νέα άγνωστη κυματική συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την ανωτέρω μορφή λύσης (5) στην εξίσωση (4), η τελευταία καταλήγει μετά από απλές πράξεις στην γνωστή μας μονοδιάστατη εξίσωση d'Alembert

$$\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial r^2} = 0, \quad (6)$$

ως προς την νέα άγνωστη κυματική συνάρτηση $f(r,t)$. Ως γνωστόν, η εξίσωση (6), επιδέχεται λύσεις της μορφής $f_1(r-ct)$ και $f_2(r+ct)$, οι οποίες αντιπροσωπεύουν κύματα που διαδίδονται από το κέντρο ($r=0$) προς τα έξω ($r \rightarrow \infty$), και από έξω προς το κέντρο, αντίστοιχα. Καταλήγουμε λοιπόν σε λύσεις της μορφής

$$\Phi(r,t) = \begin{cases} \frac{f_1(r-ct)}{r}, & \text{εξερχομενα κυματα} \\ \frac{f_2(r+ct)}{r}, & \text{εισερχομενα κυματα} \end{cases} \quad (7)$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν σφαιρικά κύματα που διαδίδονται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις από το κέντρο προς τα έξω (εξερχόμενα κύματα) ή από έξω προς το κέντρο (εισερχόμενα κύματα), αντίστοιχα. Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε, πως σε αντίθεση με τις λύσεις επιπέδου κύματος στις τρεις διαστάσεις

$$\Phi(\mathbf{x};t) = \begin{cases} f_1(\mathbf{kx} - \omega t), & \text{κυματα που διαδιδονται προς την διευθυνση } \mathbf{k} \\ f_2(\mathbf{kx} + \omega t), & \text{κυματα αντιθετα προς την διευθυνση } \mathbf{k} \end{cases} \quad (8)$$

που, επίσης, αποτελούν απλές λύσεις της εξίσωσης d'Alembert στις τρεις διαστάσεις, όπως είχαμε δείξει στο εδάφιο 2.2, και που αντιπροσωπεύουν κύματα που διαδίδονται προς την μία ή την άλλη κατεύθυνση με αμείωτο πλάτος, οι λύσεις (7) που αντιπροσωπεύουν σφαιρικά κύματα έχουν πλάτος το οποίο ελαττώνεται με την απόσταση r από το σημείο \mathbf{x}_0 . Έτσι, η ένταση I της κυματικής διαταραχής που ορίζεται ως η ισχύς που διαδίδεται με το κύμα ανά μονάδα επιφάνειας απ' όπου διέρχεται, και η οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους

$$I \propto \Phi^2 \quad (9)$$

ελαττώνεται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή \mathbf{x}_0 , στην περίπτωση εξερχόμενων κυμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με την αρχή διατηρήσεως της ροής της κυματικής ενέργειας στις τρεις διαστάσεις.

2.5.2 Κυλινδρικά κύματα ως απλές λύσεις της εξίσωσης Alembert στις δύο διαστάσεις

Η εξίσωση d'Alembert είναι γραμμική. Αυτό μας επιτρέπει την κατασκευή νέων λύσεων σαν γραμμική επαλληλία (υπέρθηση) απλών λύσεων, τις οποίες έχουμε ήδη παράξει. Εκμεταλλευόμενοι αυτή την αρχή, η οποία συζητείται αναλυτικότερα στην συνέχεια στο κεφάλαιο 3, και την γραμμικότητα του ολοκληρωτικού τελεστή, μπορούμε να κατασκευάσουμε λύσεις της εξίσωσης d'Alembert στις δύο διαστάσεις που αντιπροσωπεύουν

κυλινδρικά κύματα σαν κατάλληλη υπέρθεση τρισδιάστατων σφαιρικών κυμάτων, που εκπέμπονται από πηγές ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος ενός άξονα.

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας άξονα κυλινδρικής συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα Ox_3 , και αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης d'Alembert της μορφής

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \Phi(R; t), \quad (1)$$

δηλαδή λύσεις όπου το κυματικό δυναμικό εξαρτάται μόνο από την οριζόντια απόσταση R από τον άξονα Ox_3 . Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση

$$r^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = R^2 + z^2, \quad (2)$$

βλ. Σχ. 2.5. ???

Λύσεις της εξίσωσης d'Alembert που αντιπροσωπεύουν εξερχόμενα κυλινδρικά κύματα μπορούν να κατασκευαστούν με υπέρθεση σφαιρικών κυμάτων που εκπέμπονται ομοιόμορφα από όλα τα σημεία του άξονα Ox_3 ,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; t) = \Phi(R; t) = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(r-ct)}{r} dz. \quad (3)$$

Όμως σύμφωνα με την σχέση (2)

$$z = \sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow dz = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \quad (4)$$

και άρα η σχέση (3) γράφεται ως ακολούθως

$$\Phi(r; t) = 2 \int_{r=R}^{\infty} \frac{f_1(r-ct)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr. \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας την βοηθητική μεταβλητή $\xi = r - ct$ η σχέση (5) γράφεται τελικώς στην μορφή

$$\Phi(R, t) = 2 \int_{R-ct}^{\infty} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(ct + \xi)^2 - R^2}}. \quad (6)$$

Εντελώς αντίστοιχα προκύπτει η λύση της μορφής

$$\Phi(R, t) = 2 \int_{R+ct}^{\infty} \frac{f_2(\xi) d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}} \quad (7)$$

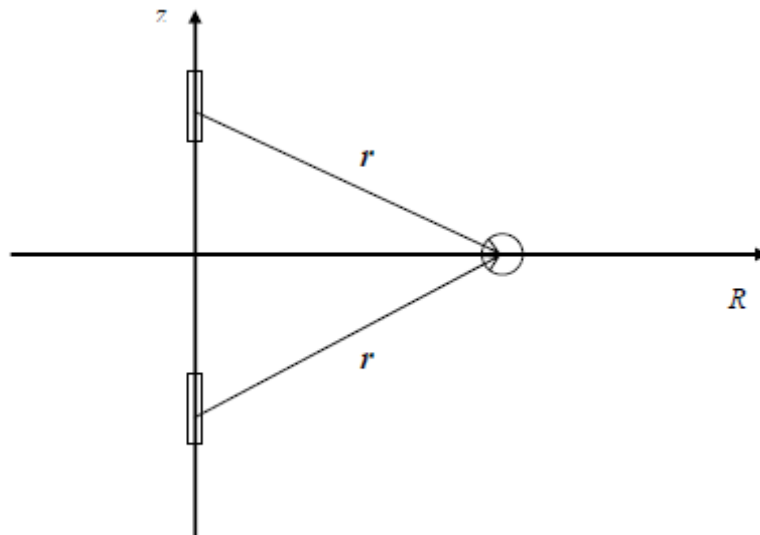
η οποία αντιπροσωπεύει κυλινδρικά κύματα που διαδίδονται με κατεύθυνση προς τον άξονα συμμετρίας Ox_3 .

Είναι ιδιαίτερης σημασίας να παρατηρήσει κανείς εδώ, συγκρίνοντας την μορφή των ανωτέρω λύσεων σε σχέση με τα αντίστοιχα σφαιρικά κύματα 2.5.1.(7), ότι τα κυλινδρικά κύματα (6) ή (7) που σχετίζονται με μια εντοπισμένη κυματομορφή (π.χ. παλμό)

$$f_{1,2}(\xi) \neq 0, \quad \text{για} \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2,$$

ενώ διαθέτουν χαρακτηριστικό εμπρόσθιο (δηλαδή προς τη φορά της διάδοσης) μέτωπο, δεν διαθέτουν χαρακτηριστικό πίσω μέτωπο. Βλέπε και Σχήμα 1 (2.1.3)α,β.

Έτσι, η κυματική διαταραχή που αντιστοιχεί στην εκπομπή παλμού στην αρχή του χρόνου στις δύο διαστάσεις, αφού διέλθει από ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου, εξασθενεί με σχετικά αργό ρυθμό με την περαιτέρω παρέλευση του χρόνου. Αντίθετα, στις τρεις διαστάσεις ένας εντοπισμένος παλμός διαδίδεται με αναλλοίωτα χαρακτηριστικά σε ότι αφορά το σχήμα του (αλλά όχι και το πλάτος του), ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.



Σχήμα 2.5. (1) Παραγωγή κυλινδρικών δισδιάστατων κυμάτων από την υπέρθεση σφαιρικών κυμάτων με συνεχή κατανομή πηγών στον άξονα $Oz = Ox_3$.

2.5.3 Σφαιρικά αρμονικά κύματα ως απλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στις τρεις διαστάσεις

Εκμεταλλευόμενοι την ομογένεια του μέσου διάδοσης ($k = \text{σταθερό}$), αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης Helmholtz που να παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία. Οι λύσεις αυτές θα ικανοποιούν την απλούστερη εξίσωση,

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}}{\partial r} \right) - k^2 \overset{\circ}{\Phi} = 0 \quad (1)$$

Αναζητώντας τώρα λύσεις που εξασθενούν με την απόσταση r από την αρχή του συστήματος \mathbf{x}_0 , δηλαδή λύσεις της μορφής

$$\overset{\circ}{\Phi}(r, \omega) = \frac{\overset{\circ}{f}(r, \omega)}{r}, \quad (2)$$

όπου $\overset{\circ}{f}(r, \omega)$ η νέα άγνωστη συνάρτηση (μιγαδικό πλάτος κύματος), εύκολα διαπιστώνουμε από την (1) ότι η $\overset{\circ}{f}(r, \omega)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση παρακάτω δευτεροτάξια, απλή, διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{\partial^2 \overset{\circ}{f}(r; \omega)}{\partial r^2} + k^2 \overset{\circ}{f}(r; \omega) = 0. \quad (3)$$

Η ανωτέρω εξίσωση έχει, ως γνωστόν, τις ακόλουθες λύσεις:

$$\overset{\circ}{f}(r, \omega) = \begin{cases} \exp(+ikr) \\ \exp(-ikr) \end{cases} \quad (4)$$

που, σε συνδυασμό με την (2) και την αναπαράσταση 2.5.3, εύκολα διαπιστώνουμε ότι αντιπροσωπεύουν σφαιρικά, αρμονικά, εξερχόμενα και εισερχόμενα κύματα, αντίστοιχα, ως προς το σημείο \mathbf{x}_0 :

$$\overset{\circ}{\Phi}(r, \omega) = \begin{cases} \frac{\exp(+ikr)}{r}, & \text{εξερχομενα κυματα} \\ \frac{\exp(-ikr)}{r}, & \text{εισερχομενα κυματα} \end{cases} \quad (5)$$

Και στην περίπτωση της λύσης αυτής η ένταση I του κύματος ελαττώνεται ανάλογα με το τετράγωνο της αποστάσεως r από την αρχή, δηλαδή

$$I \propto \frac{1}{r}, \quad (6)$$

αποτέλεσμα που είναι συμβατό με την αρχή διατηρήσεως της ροής της κυματικής ενέργειας, στις τρεις διαστάσεις.

2.5.4 Κυλινδρικά αρμονικά κύματα ως απλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις

Εκμεταλλευόμενοι την ομογένεια του μέσου διάδοσης αναζητούμε τώρα λύσεις της εξίσωσης Helmholtz που να παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία, ως προς ένα άξονα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε ως άξονα κυλινδρικής συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα Ox_3 . Εισάγοντας κυλινδρικές συντεταγμένες $\{R, \theta, z\}$

$$x_1 = R \cos \theta \quad (1a)$$

$$x_2 = R \sin \theta \quad (1b)$$

$$x_3 = z \quad (1c)$$

η εξίσωση Helmholtz γράφεται στην μορφή:

$$\left\{ \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \overset{\circ}{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \overset{\circ}{\Phi}}{\partial z^2} \right\} + k^2 \overset{\circ}{\Phi} = 0, \quad (2)$$

όπου η ποσότητα στην αγκύλη είναι η έκφραση του τελεστή Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στην συνέχεια αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (2) που παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία, λύσεις δηλαδή που εξαρτώνται μόνο από την απόσταση R από τον άξονα ,

$$\overset{\circ}{\Phi}(R, \theta, z, \omega) = \overset{\circ}{\Phi}(R; \omega) \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση Helmholtz (2), εύκολα καταλήγουμε στην παρακάτω απλούστερη εξίσωση

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \cdot \left(R \frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}}{\partial R} \right) + k^2 \overset{\circ}{\Phi} = 0. \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) ανάγεται στην εξίσωση Bessel που επιδέχεται ως λύσεις τις συναρτήσεις Hankel μηδενικής τάξης, πρώτου και δεύτερου είδους, και ορίσματος kR :

$$\overset{\circ}{\Phi}(R, \omega) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kR) = J_0^{(1)}(kR) + iY_0^{(1)}(kR) & (5a) \\ H_0^{(2)}(kR) = J_0^{(2)}(kR) - iY_0^{(2)}(kR) & (5b) \end{cases}$$

Από τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων Hankel για μεγάλο όρισμα,

$$H_0^{(1)}(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp\left(i\left(kR - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad kR \rightarrow \infty, \quad (6a)$$

$$H_0^{(2)}(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp\left(-i\left(kR - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad kR \rightarrow \infty \quad (6b)$$

Εύκολα μπορεί κανένας να διαπιστώσει ότι οι λύσεις της μορφής (5a) αντιπροσωπεύουν αρμονικά κυλινδρικά κύματα που διαδίδονται απομακρυνόμενα από τον άξονα Ox_3 , ενώ οι λύσεις της μορφής (5b) αντιπροσωπεύουν κυλινδρικά κύματα που διαδίδονται προς τον άξονα Ox_3 αντίστοιχα.

Σε αντίθεση με τα σφαιρικά κύματα, το πλάτος των κυλινδρικών κυμάτων εξασθενεί ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα της αποστάσεως R από τον άξονα, και άρα η ένταση I των κυμάτων αυτών εξασθενεί ανάλογα με την απόσταση R

$$I \propto 1/R, \quad (7)$$

αποτέλεσμα που είναι, επίσης, συμβατό με την αρχή διατήρησης της ροής της κυματικής ενέργειας στις δύο διαστάσεις.

2.6 Θεμελιώδης λύσεις στον ελεύθερο χώρο. Συναρτήσεις Green.

Στο προηγούμενο εδάφιο είχαμε ασχοληθεί με την παρουσίαση απλών λύσεων των ομογενών εξισώσεων d'Alembert και Helmholtz στις δύο και τρεις διαστάσεις, που αντιπροσωπεύουν κυλινδρικά και σφαιρικά κύματα, αντίστοιχα. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι όντως οι λύσεις αυτές ικανοποιούν τις αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις παντού, εκτός από την αρχή των χρησιμοποιούμενου συστήματος συντεταγμένων ($R \neq 0$ και $r \neq 0$), αντίστοιχα, όπου παρουσιάζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά.

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις θεμελιώδεις λύσεις των ιδίων εξισώσεων, δηλαδή λύσεις που ικανοποιούν την μη ομογενή εξίσωση d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}; t)}{\partial t^2} - c^2 \cdot \Delta \Phi(\mathbf{r}; t) = F(\mathbf{r}; t) \quad (1)$$

που υπόκεινται στον περιορισμό (αρχική συνθήκη)

$$\Phi(\mathbf{r}; t) = 0, \quad \text{για } t < t_0, \quad (1a)$$

και την μη ομογενή εξίσωση Helmholtz,

$$\Delta \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{r}; \omega) + k^2 \overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{r}; \omega) = f(\mathbf{r}; \omega), \quad (2)$$

στην ειδική περίπτωση, όπου η συνάρτηση στο δεξί μέλος των εξισώσεων αυτών (όρος διέγερσης) είναι της μορφής:

$$F(\mathbf{r};t) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(t-t_0), \quad (3)$$

και

$$f(\mathbf{r};\omega) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad (4)$$

αντίστοιχα.

Θεωρούμε (!) ότι ο αναγνώστης διαθέτει κάποια εξοικείωση με την “συνάρτηση”, Dirac- δ που εμφανίζεται σε δεξί μέλος των σχέσεων (3) και (4), η οποία απέχει πολύ από την κλασική έννοια της συναρτήσεως (μιάς ή περισσότερων μεταβλητών). Όντως, η “συνάρτηση” αυτή έχει την ιδιότητα

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0, \text{ για } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0, \quad (5)$$

και, στην πραγματικότητα, αποκτά έννοια μέσα από την δράση της:

$$\int_D \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0), \quad (6)$$

πάνω σε κάθε συνεχή συνάρτηση $f(\mathbf{r})$, η οποία είναι στο αυθαίρετο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^N$.

Σημειώνουμε εδώ ότι στην ειδική περίπτωση $D = \mathbb{R}^N$ απαιτούνται πρόσθετες υποθέσεις σχετικά με τα σύνολα συνεχών συναρτήσεων $f(\mathbf{r})$, πάνω στα οποία είναι δυνατή η επέκταση του ορισμού της “συναρτήσεως” δ .

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1), για $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^N$, και $t_0 \leq t < \infty$, με όρο διέγερσης της μορφής (3), αναφέρεται ως θεμελιώδης λύση (ή συνάρτηση Green) της εξίσωσης d’Alembert στον ελεύθερο χώρο. Επίσης, η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Helmholtz (2) για $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^N$ και $k^2 > 0$, με όρο διέγερσης της μορφής (4), αναφέρεται ως θεμελιώδης λύση (ή συνάρτηση Green) της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο.

Δύο είναι οι πιο βασικοί λόγοι για την κατασκευή και μελέτη των ειδικών λύσεων των εξισώσεων (1) και (2) (και γενικότερα κάθε κυματικής εξίσωσης), με όρους διέγερσης της μορφής (3) και (4), αντίστοιχα.

Ο πρώτος λόγος είναι ότι οι παραπάνω θεμελιώδεις λύσεις και περισσότερο αυτές που αντιπροσωπεύουν εξερχόμενα κύματα μακριά από την πηγή, έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία. Αναπαριστούν την κυματική διαταραχή που διεγείρεται σε ένα σημείο του χώρου (το σημείο \mathbf{x}_0) και διαδίδεται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του χώρου. Έτσι, αντιπροσωπεύουν το κυματικό πεδίο που διεγείρεται από μία σημειακή πηγή (source wave potential).

Η μελέτη του κυματικού πεδίου που εκπέμπεται από μία σημειακή πηγή (ή από περισσότερες πηγές) αποτελεί από μόνη της μια χρήσιμη εφαρμογή στην αεροακουστική, στην θαλάσσια ακουστική, στις τηλεπικοινωνίες κ.λ.π. Αν και εδώ ασχολούμαστε με λύσεις των εξισώσεων στον ελεύθερο χώρο σε ομογενές μέσο, οι εφαρμογές αυτές καθίστανται πολύ πιο σημαντικές και οι αντίστοιχες θεμελιώδεις λύσεις, βεβαίως, πολύ πιο πλούσιες και ενδιαφέρουσες, στην περίπτωση κυματικής διάδοσης σε μη ομογενές μέσο, όπως στην πραγματικότητα είναι τόσο

το θαλάσσιο περιβάλλον στην περίπτωση διάδοσης ακουστικών κυμάτων όσο και η ατμόσφαιρα/ιονόσφαιρα ή οι οπτικές ίνες στη περίπτωση των τηλεπικοινωνιών.

Ο δεύτερος, και ίσως περισσότερο σημαντικός λόγος για την κατασκευή των θεμελιωδών λύσεων μιας κυματικής εξίσωσης, όπως οι (1) και (2), είναι η δυνατότητα που μας προσφέρουν, σε συνδυασμό με τα αντίστοιχα θεωρήματα Green (βλ. κατωτέρω εδάφ. 2.6.4) της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσεως πιο σύνθετων προβλημάτων κυματικής διάδοσης, τα οποία περιγράφονται από τις ίδιες κυματικές εξισώσεις, αλλά αφορούν πλέον την κυματική διάδοση σε (ομογενές) μέσο που περιέχει διάφορες ανομοιογένειες. Ως ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να φαντασθούμε κυματικό πεδίο που εκπέμπεται από μια ή περισσότερες πηγές και διαδίδεται σε ένα χώρο που περιλαμβάνει ένα ή περισσότερους σκεδαστές.

Το θέμα αυτό συζητείται αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο.

2.6.1 Γενικές ιδιότητες των θεμελιωδών λύσεων

Είναι προφανές από την μορφή που έχει ο όρος διέγερσης 2.6(3) ή 2.6(4), ότι η αντίστοιχη θεμελιώδης λύση θα είναι στην γενικότητα της συνάρτησης που εξαρτάται και από την θέση της διέγερσης \mathbf{r}_0 , καθώς και από τον εναρκτήριο χρόνο t_0 , στην περίπτωση της εξίσωσης d'Alembert. Έτσι, θα συμβολίζουμε τις λύσεις του προβλήματος 2.6(1),(3) ως

$$\Phi(\mathbf{r}; t) = G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0), \quad (1)$$

και τις αντίστοιχες λύσεις του προβλήματος 2.6(2), (4) ως

$$\overset{\circ}{\Phi}(\mathbf{r}; k) = G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0; k), \quad \text{ή} \quad \text{απλούστερα } G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \quad (2)$$

Θα προχωρήσουμε στην συνέχεια στην διατύπωση ορισμένων γενικών ιδιοτήτων των συναρτήσεων Green, οι οποίες μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε καλύτερα τη δομή τους αλλά και χρησιμότητά τους.

- (i) Οι συναρτήσεις $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ και $G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ θα πρέπει να αναπαραστούν μόνο εξερχόμενα κύματα σε μεγάλες αποστάσεις $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow \infty$ από το σημείο διέγερσης (πηγή).
- (ii) Οι συναρτήσεις Green $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ και $G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ παρουσιάζουν ορισμένες συμμετρίες ως προς τα ορίσματα $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ και $|t - t_0|$. Μια τέτοια συμμετρία εκφράζεται από την ιδιότητα της αμοιβαιότητας (reciprocity),

$$G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G_A(\mathbf{r}_0, t | \mathbf{r}, t_0), \quad (3)$$

$$G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_H(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}). \quad (4)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις προσδιορίζουν ότι οι λύσεις που εκφράζουν το κυματικό πεδίο που διεγείρεται από μία σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{r}_0 σε κάποιο σημείο του χώρου \mathbf{r}

(σημείο δέκτη) παραμένουν οι ίδιες εάν πηγή και δέκτης εναλλαχθούν. Με βάση τις ανωτέρω ιδιότητες (3) και (4) καταλήγουμε στο ότι οι συναρτήσεις G_A και G_H μπορούν ισοδυνάμως να εκφραστούν ως άρτιες συναρτήσεις του $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$:

$$G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G_A(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0; t, t_0) = G_A(\boldsymbol{\rho}; t, t_0), \quad (5)$$

και

$$G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = G_H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = G_H(\boldsymbol{\rho}). \quad (6)$$

- (iii) Επιπροσθέτως, η συνάρτηση $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ παραμένει αναλλοίωτη σε μεταθέσεις της αρχής των χρόνων. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά $\tau = t - t_0$ (time translation invariance), δηλαδή

$$G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = G_A(\boldsymbol{\rho}, \tau). \quad (7)$$

Ολοκληρώνοντας χρονικά την διαφορική εξίσωση 2.6(1), (3) στο διάστημα (t_0^-, t_0^+) , όπου $t_0^- = t_0 - \varepsilon$ και $t_0^+ = t_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, και κάνοντας χρήση της αρχικής συνθήκης 2.6(1a) και των ιδιοτήτων της “συνάρτησης” δ , λαμβάνουμε τις σχέσεις

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\partial G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t} = c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (8)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0. \quad (9)$$

Τα τελευταία αποτελέσματα μας επιτρέπουν να εκφράσουμε την συνάρτηση G_A στην μορφή του γινομένου

$$G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = H(t - t_0) K_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0), \quad (10)$$

όπου $H(t - t_0)$ είναι η συνάρτηση step function ή Heaviside. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση Heaviside $H(t - t_0)$ ορίζεται ως

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{για } t > t_0 \\ 0, & \text{για } t < t_0 \end{cases}. \quad (11)$$

Στη σχέση (10), η εμφανιζόμενη συνάρτηση $K_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ είναι μια βοηθητική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t) = 0, \quad (12)$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\partial K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (13)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0. \quad (14)$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο propagator $K_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ διαθέτει, όπως και η συνάρτηση Green $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, τις ιδιότητες της αμοιβαιότητας και του αναλλοίωτου σε χρονικές μεταθέσεις.

Επιπροσθέτως, μια και ο τελεστής d'Alembert $\partial^2/\partial t^2 - c^2 \Delta$ παραμένει αμετάβλητος σε μετασχηματισμούς που αντιστοιχούν σε αντιστροφές του χρόνου (time reversal transformations), από τις αρχικές συνθήκες (13) και (14) προκύπτει ότι η λύση της ομογενούς εξίσωσης (12) για την συνάρτηση $K_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$, θα είναι αντισυμμετρική ως προς τη χρονική διαφορά $\tau = t - t_0$:

$$K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = -K(\mathbf{r}, t_0 | \mathbf{r}_0, t).$$

Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις έχουμε τελικώς

$$K(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t) = K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 |, t - t_0) = K(\boldsymbol{\rho}, \tau), \quad (15)$$

όπου η συνάρτηση propagator $K(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ είναι άρτια συνάρτηση του $\boldsymbol{\rho}$ και περιττή συνάρτηση του τ .

- (iv) Η συνάρτηση $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ παρουσιάζει ιδιόμορφη συμπεριφορά στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ του χρόνου $t = t_0$. Η ένταση της ιδιομορφίας αυτής είναι διαφορετική ανάλογα με την διάσταση του προβλήματος και τα χαρακτηριστικά του διαφορικού τελεστή της κυματικής εξίσωσης.

Ομοίως, η συνάρτηση $G_H(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ παρουσιάζει ιδιόμορφη συμπεριφορά στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, με ένταση ανάλογα με τη διάσταση του προβλήματος.

Η τελευταία ιδιότητα αποτελεί μια ειδοποιό διαφορά των συναρτήσεων Green στις δύο και τρεις διαστάσεις, σε σχέση με την αντίστοιχη μονοδιάστατη περίπτωση, όπου το πεδίο της πηγής (που αντιπροσωπεύει η συνάρτηση Green) παρουσιάζει απλή ασυνέχεια κλίσης στο σημείο της πηγής.

2.6.2 Συναρτήσεις Green της εξίσωσης d'Alembert στον ελεύθερο χώρο

Η κατασκευή των συναρτήσεων Green $G_A(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ ή $G_A(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ στις δύο και στις τρεις διαστάσεις βασίζεται στην φασματική αναπαράσταση του τελεστή d'Alembert $\frac{\partial}{\partial t^2} - c^2 \Delta$ στον ελεύθερο χώρο. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται σε πρώτο βήμα μια ολοκληρωτικού τύπου (φασματική) αναπαράσταση του propagator $K(\boldsymbol{\rho}, \tau)$, για τον οποίο υπενθυμίζουμε ότι ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση 2.6.1(12).

Στην συνέχεια, η αναπαράσταση αυτή διαμορφώνεται κατάλληλα έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες 2.6.1(13) και (14). Καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο στις ακόλουθες σχέσεις:

$$K_0(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \frac{1}{c(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{\sin(|\mathbf{k}|c\tau)}{|\mathbf{k}|} \exp(j\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}), \quad (1)$$

στις τρεις διαστάσεις, όπου $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^3$ η φασματική παράμετρος, και

$$K_0(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \frac{1}{2\pi c} \int_{k=0}^{\infty} dk \sin(kc\tau) J_0(k|\boldsymbol{\rho}|), \quad (2)$$

στις δύο διαστάσεις.

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης 2.6.1.(10) και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στις ανωτέρω σχέσεις (1) και (2), καταλήγουμε τελικώς στα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) **Τρεις διαστάσεις**

$$G_A(\boldsymbol{\rho}, \tau) = H(\tau) \frac{\delta(\tau - \rho/c)}{4\pi\rho c^2}, \quad \text{όπου } \rho = |\boldsymbol{\rho}|, \quad (3a)$$

ή ισοδύναμα,

$$G_A(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = H(t - t_0) \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{c}\right)}{4\pi c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (3b)$$

(ii) *Δύο διαστάσεις*

$$G_A^{(2)}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = H(\tau) \frac{H(\tau - \rho/c)}{2\pi c^2 \sqrt{\tau^2 - (\rho/c)^2}}, \quad (4)$$

ή ισοδύναμα,

$$G_A^{(2)}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = H(t - t_0) \frac{H\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{c}\right)}{2\pi \sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}}. \quad (4a)$$

2.6.3 Συναρτήσεις Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο

Η κατασκευή των συναρτήσεων Green $G_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ ή $G_H(\boldsymbol{\rho})$ της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο βασίζεται σε εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier. Ο μετασχηματισμός Fourier στην μία διάσταση χρησιμοποιείται εδώ στην μορφή:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \exp(-j\xi x) dx, \quad \text{ευθύς μετασχηματισμός Fourier} \quad (1a)$$

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \exp(j\xi x) dx, \quad \text{αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier} \quad (1b)$$

και η γενίκευση του στις πολλές διαστάσεις είναι

$$G(\mathbf{x}) = \int g(\boldsymbol{\xi}) \exp(-j\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \text{ευθύς μετασχηματισμός Fourier} \quad (2a)$$

$$g(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int G(\mathbf{x}) \exp(j\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier} \quad (2b)$$

Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον μετασχηματισμό Fourier και τις ιδιότητές του παρέχονται στο Παράρτημα

(i) *Τρεις διαστάσεις*

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση Helmholtz 2.6(2) στις τρεις διαστάσεις ως προς τις δύο από τις τρεις χωρικές μεταβλητές

(έστω τις μεταβλητές x_1 και x_2) καταλήγουμε στην ακόλουθη μονοδιάστατη εξίσωση:

$$\frac{d^2 g(x_3; \xi_1, \xi_2)}{d(x_3)^2} + [k^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)] g(x_3; \xi_1, \xi_2) = \frac{\delta(x_3 - x_{03})}{(2\pi)^2}, \quad (3)$$

η οποία έχει την λύση

$$g(x_3; \xi_1, \xi_2) = \frac{\exp\left(j\sqrt{k^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}|x_3 - x_{03}|\right)}{(2\pi)^2 \sqrt{k^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}}. \quad (4)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier στην συνάρτηση $g(x_3; \xi_1, \xi_2)$ λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$G_4(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2 \int_{\xi_2=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(j\sqrt{k^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)} \cdot |x_3 - x_{03}|\right)}{(2\pi)^2 \sqrt{k^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}}. \quad (5)$$

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα υπολογίζεται αναλυτικά, και έτσι λαμβάνουμε τελικώς για την συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο στις τρεις διαστάσεις:

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \frac{\exp(jk(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (6)$$

(ii) Δύο διαστάσεις

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στην εξίσωση Helmholtz 2.6(2) στις δύο διαστάσεις, ως προς την μία χωρική μεταβλητή (έστω τη μεταβλητή x_1) καταλήγουμε στην ακόλουθη μονοδιάστατη εξίσωση:

$$\frac{d^2 g(x_2; \xi_1)}{d(x_2)^2} + [k^2 - \xi_1^2] g(x_2; \xi_1) = \frac{\delta(x_2 - x_{02})}{2\pi}, \quad (7)$$

η οποία έχει λύση την ακόλουθη :

$$g(x_2; \xi_1) = \frac{\exp\left(j\sqrt{k^2 - \xi_1^2}|x_2 - x_{02}|\right)}{2\pi\sqrt{k^2 - \xi_1^2}} \quad (8)$$

Και πάλι, εφαρμόζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier στην ανωτέρω συνάρτηση $g(x_2; \xi_1)$, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα για την συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = G(x_1, x_2 | x_{01}, x_{02}) &= \int_{\xi_1=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(j\sqrt{k^2 - \xi_1^2} |x_2 - x_{02}|\right)}{2\pi\sqrt{k^2 - \xi_1^2}} d\xi_1 \\ &= \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(kR), \end{aligned} \quad (9)$$

όπου,

$$R = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2}, \quad (10)$$

και $H_0^{(1)}(kR)$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης ως προς το όρισμα kR .

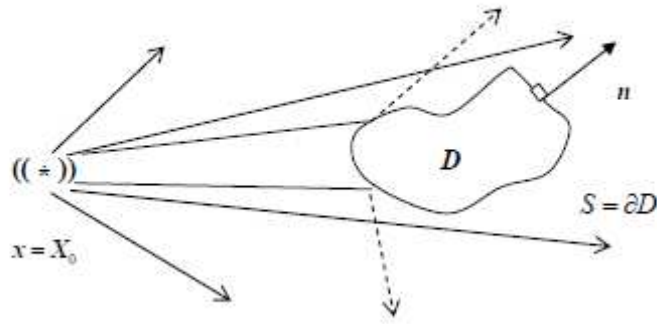
Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο στις τρεις και δύο διαστάσεις, Εξ. (6) και (9), αντίστοιχα, ταυτίζονται (με την προσέγγιση μιας απλής σταθεράς με τις απλές λύσεις της ίδιας εξίσωσης που είχαμε δει σε προηγούμενο εδάφιο, βλ. Εξ. 2.5.3(5) και Εξ. 2.5.4(5), οι οποίες εκφράζουν σφαιρικά και κυλινδρικά κύματα, τα οποία διαδίδονται απομακρυνόμενα από το σημείο της πηγής \mathbf{x}_0 .

2.6.4 Θεωρήματα Green. Θεωρήματα ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.

Μια από τις πιο συναρπαστικές εφαρμογές των συναρτήσεων Green είναι η ικανότητά τους να μας προσφέρουν, μέσω κατάλληλων ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, τις γενικές λύσεις κυματικών προβλημάτων, στις δύο και τρεις διαστάσεις (λύσεις προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών), που χαρακτηρίζονται από την ίδια διαφορική εξίσωση (εδώ την εξίσωση d'Alembert ή την εξίσωση Helmholtz), όχι πλέον στον ελεύθερο χώρο, αλλά παρουσία διαφόρων ανομοιογενειών, όπως πεπερασμένοι σκεδαστές.

Χάριν, απλότητας, θα περιοριστούμε στην συνέχεια στην παρουσίαση τέτοιων ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο, με την παρουσία πεπερασμένων, σκεδαστών (δηλαδή σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις).

Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με μια ειδική περίπτωση, η οποία όμως βρίσκει πολύ χρήσιμες εφαρμογές, τη σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου που διεγείρεται από σημειακή αρμονική πηγή στη θέση $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$, βλ. κατωτέρω Σχήμα, από πεπερασμένο σκεδαστή (σώμα D) που περικλείεται από την επιφάνεια (σύνορο σκεδαστή) $S = \partial D$. Στο σχήμα αυτό \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του σκεδαστή με διεύθυνση προς τα έξω του σώματος



Σχήμα Σκέδαση αρμονικού κυματικού πεδίου, που διεγείρεται από σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$, από αδιαπέρατο, πεπερασμένο σκεδαστή D .

Στην εξεταζόμενη περίπτωση, το κυματικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{x})$ ικανοποιεί τη εξίσωση Helmholtz

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) + k^2\Phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0), \quad \mathbf{x} \in D_*, \quad (1)$$

όπου D_* το χωρίο στο οποίο ορίζονται η συνάρτηση $\Phi(\mathbf{x})$, δηλαδή $D_* = \mathbb{R}^3 \setminus D$ στις τρεις διαστάσεις, και $D_* = \mathbb{R}^2 \setminus D$ στις δύο διαστάσεις.

Το μέσον διάδοσης θεωρείται ομογενές, δηλαδή $k = \text{σταθερό παντού}$. Θα θεωρήσουμε επίσης την ιδανική περίπτωση όπου ο σκεδαστής είναι αδιαπέραστος από το κύμα (impenetrable scatterer). Η τελευταία υπόθεση μοντελοποιείται από συνοριακή συνθήκη της μορφής

$$\alpha\Phi(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2)$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, και $\partial\Phi(\mathbf{x})/\partial n$, $\mathbf{x} \in S$, δηλώνει την τοπική παράγωγο του δυναμικού στην επιφάνεια του συνόρου σκεδαστή $S = \partial D$, κατά την διεύθυνση του καθέτου διανύσματος \mathbf{n} .

Επίσης, επιβάλλουμε την φυσική απαίτηση η λύση να συμπεριφέρεται ως εξερχόμενα κύματα σε πολύ μακρινές αποστάσεις από την πηγή, δηλαδή

$$\Phi(\mathbf{x}) \text{ αναπαριστά εξερχόμενα κύματα, όταν } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Το θεώρημα Green που συνδέεται με τον διαφορικό τελεστή Laplace, ο οποίος εμπλέκεται στην εξίσωση Helmholtz (1), και το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια για την κατασκευή της λύσεως του σύνθετου κυματικού προβλήματος (1), (2),(3) είναι το ακόλουθο:

$$\int_{D_*} (\Phi_1 \Delta \Phi_2 - \Phi_2 \Delta \Phi_1) dx = \int_{\partial D_*} \left(\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n(\mathbf{x})} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n(\mathbf{x})} \right) dS(\mathbf{x}) \quad (4)$$

όπου D_* το χωρίο στο οποίο ορίζονται οι συναρτήσεις $\Phi_1(\mathbf{x})$ και $\Phi_2(\mathbf{x})$. Υπενθυμίζουμε ότι εκ κατασκευής η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο, ικανοποιεί

$$\Delta_x G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) + k^2 G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad (5\alpha)$$

όπου ο δείκτης " x " στον διαφορικό τελεστή Δ έχει προστεθεί για να μας υπενθυμίζει την χωρική μεταβλητή ως προς την οποία νοείται η διαφορίση.

Ισοδύναμα, όμως μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (5^α) στην μορφή

$$\Delta_{x_0} G_H(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}) + k^2 G_H(\mathbf{x}_0|\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}), \quad (5\beta)$$

και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της αμοιβαιότητας και της αρτιότητας (συμμετρίας) της "συνάρτησης" προκύπτει:

$$\Delta_{x_0} G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) + k^2 G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (6)$$

Μπορούμε επίσης να ξαναγράψουμε την διαφορική εξίσωση του προβλήματος σκέδασης που εξετάσουμε (1) στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}_0) + k^2 \Phi(\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_0) \quad (7)$$

Πολλαπλασιάζουμε στην συνέχεια την Εξ. (6) επί την συνάρτηση κυματικού δυναμικών $\Phi(\mathbf{x}_0)$ και την Εξ. (7) επί την συνάρτηση Green $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ και αφαιρούμε κατά μέλη τις παραγόμενες εξισώσεις. Τέλος, ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα στο χωρίο D_* λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned} & \int_{D_*(\mathbf{x}_0)} \{G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) \Delta_{x_0} \Phi(\mathbf{x}_0) - \Phi(\mathbf{x}_0) \Delta_{x_0} G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)\} dx_0 = \\ & = \int_{D_*(\mathbf{x}_0)} \{\Phi(\mathbf{x}_0) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) - G_H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0)\} dx_0 = \Phi(\mathbf{x}) - G_H(\mathbf{x}|\mathbf{X}_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Κάνοντας χρήση τώρα του θεωρήματος Green (4) για τις συναρτήσεις $\Phi_1 = G_H$ και $\Phi_2 = \Phi$ λαμβάνουμε από την εξίσωση (8)

$$\Phi(\mathbf{x}) = G_H(\mathbf{x}|\mathbf{X}_0) + \int_{\partial D} \left\{ G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{x}_0)} - \Phi(\mathbf{x}_0) \frac{\partial G_H(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{x}_0)} \right\} dS(\mathbf{x}_0). \quad (9)$$

Η τελευταία σχέση (9) αποτελεί στην εξεταζόμενη περίπτωση την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσεως του προβλήματος σκέδασης (1), (2), (3). Η αναπαράσταση αυτή ισχύει τόσο στις δύο όσο και στις τρεις διαστάσεις (με την κατάλληλη συνάρτηση Green G_H). Η συνάρτηση G_H που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (9), εκτός και εντός του ολοκληρώματος επί του συνόρου - επιφάνειας του σκεδαστή $S = \partial D$, είναι η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στον ελεύθερο χώρο όπως ακριβώς δίδεται από την σχέση 2.6.3(6) στις τρεις διαστάσεις και από τη σχέση 2.6.3(9) στις δύο διαστάσεις, αντίστοιχα.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η λύση του προβλήματος σκέδασης που εξετάζουμε παρέχεται στην μορφή ενός αθροίσματος δύο όρων της μορφής

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_I(\mathbf{x}) + \Phi_D(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Ο πρώτος όρος της έκφρασης αυτής

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = G_H(\mathbf{x} | \mathbf{X}_0) \quad (11)$$

είναι ακριβώς το κυματικό πεδίο της σημειακής, αρμονικής πηγής στη θέση $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$ χωρίς την ύπαρξη του σκεδαστή. Αναφέρεται ως εκ τούτου και πεδίο πηγής ή αδιατάρακτο κυματικό δυναμικό.

Ο δεύτερος όρος του διαχωρισμού (10)

$$\Phi_D(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \left\{ G_H(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{x}_0)} - \Phi(\mathbf{x}_0) \frac{\partial G_H(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)}{\partial n(\mathbf{x}_0)} \right\} dS(\mathbf{x}_0) \quad (12)$$

εκφράζει ακριβώς το πεδίο διαταραχής από την παρουσία του σκεδαστή στη συγκεκριμένη θέση του χώρου που καταλαμβάνει, καταστρέφοντας την ομογένεια του μέσου διάδοσης. Το δυναμικό αυτό αναφέρεται και ως δυναμικό περίθλασης ή σκέδασης (diffraction η scattering potential). Τα φαινόμενα περίθλασης - σκέδασης συζητούνται διεξοδικότερα στο κεφάλαιο 4.

Επίσης, από την μορφή του δυναμικού περίθλασης παρατηρούμε ότι αυτό συνίσταται από την υπέρθεση δευτερογενών κυματικών διαταραχών από πηγές κατάλληλης έντασης, που ευρίσκονται συνεχώς κατανομημένες πάνω στο σύνορο $S = \partial D$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συναφές με την αρχή Huygens-Fresnel, που συζητείται διεξοδικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

2.7 Διάδοση του ήχου σε ομογενές περιβάλλον

2.7.1. Εισαγωγικά

Όπως έχουμε αναφέρει στο θαλάσσιο περιβάλλον τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παρουσιάζουν υψηλούς ρυθμούς απόσβεσης με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η χρήση τους σε μεγάλη κλίμακα για εφαρμογές που αφορούν το θαλάσσιο χώρο, όπως στόχευση, διερεύνηση θαλάσσιας στήλης και πυθμένα, επικοινωνία κ.α. Σε ό,τι αφορά τις εφαρμογές, τη θέση που κατέχουν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ατμόσφαιρα και στο κενό έχουν τα ακουστικά στην περίπτωση του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

2.7.2 Γενικά στοιχεία διάδοσης

Σε ένα ιδανικό ρευστό η κυματική εξίσωση που διέπει ακουστικά φαινόμενα, στην απλούστερη της εκδοχή, παράγεται από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής (Euler) χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση. Η διαδικασία βασίζεται στη θεώρηση των πεδιακών μεγεθών σε κατάσταση υποβάθρου και ακουστικής διαταραχής, και στη συνέχεια αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις διατήρησης ορμής και μάζας και γραμμικοποιώντας οδηγούμαστε στην ακόλουθη κυματική εξίσωση ως προς την ακουστική πίεση $p(\mathbf{r}, t)$ στις υποπεριοχές του χώρου χωρίς εξωτερικούς διεγέρτες (πηγές), βλ. π.χ. Jensen et al (2011):

$$\rho \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

όπου το c συμβολίζει την ταχύτητα διάδοσης του κύματος (ήχου). Η ανωτέρω εξίσωση για μέσο με σταθερή πυκνότητα λαμβάνει τη απλούστερη μορφή:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Η ίδια ακριβώς εξίσωση ισχύει και για τα λοιπά ακουστικά μεγέθη. Στην περίπτωση διεγερτών από πηγή(ές) η εξίσωση καθίσταται μη ομογενής:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

και ο όρος στο δεξί μέλος $f(\mathbf{r}, t)$ αναπαριστά την διέγερση στη θέση \mathbf{r} του μέσου. Θεωρώντας αρμονικές λύσεις $p(x; t) = \text{Re}(p(x; \omega)e^{-i\omega t})$ οδηγούμαστε στην κυματική εξίσωση Helmholtz η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στα μοντέλα για τη διάδοση του ήχου:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]p(\mathbf{r}; \omega) = f(\mathbf{r}; \omega). \quad (4)$$

όπου $k(\mathbf{r}) = \omega / c(\mathbf{r})$ ο τακουστικός κυματάριθμος για δεδομένη γωνιακή συχνότητα ω και τοπική τιμή $c(\mathbf{r})$ της ταχύτητας του ήχου στο μέσο.

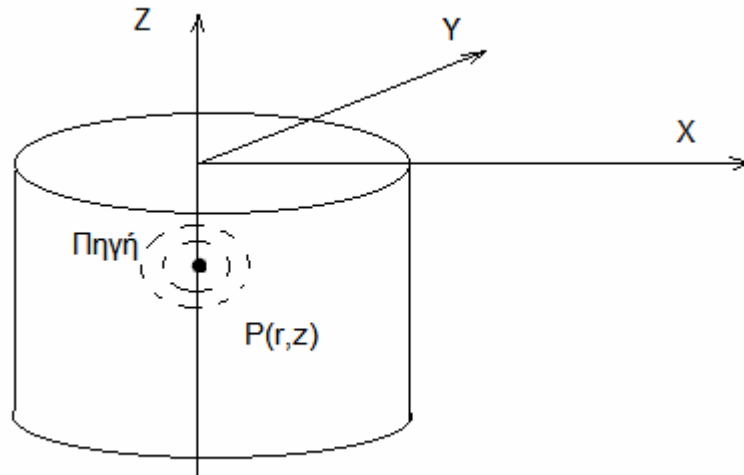
Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων υπάρχουν γενικά αριθμητικά μοντέλα που μπορούν να εφαρμοσθούν, όπως μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM) και πεπερασμένων στοιχείων (FEM) Οι δύο μέθοδοι προϋποθέτουν τον κατακερματισμό του χώρου σε περιοχές

κλάσματα του μήκους κύματος, γεγονός που τις καθιστά υπερβολικά απαιτητικές ως προς το υπολογιστικό κόστος ιδιαίτερα σε προβλήματα διάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις. Εναλλακτικά, ημι-αναλυτικές μέθοδοι που επιλύουν την εξίσωση Helmholtz σε μη φραγμένα χωρία και σε ακουστικούς κυματοδηγούς, είναι οι ολοκληρωτικές μέθοδοι Fourier (Wavenumber Integration) και η μέθοδος των κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes). Η τελευταία επεκτείνεται και για εφαρμογές σε ανομοιογενή περιβάλλοντα ως μέθοδος συζευγμένων ιδιομορφών (Coupled Modes); βλ. Boyles (1984), Frisk(1994), Jensen et al (2011).

2.7.3 Σημειακή πηγή σε στρωματοποιημένο μέσο διάδοσης σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη περίπτωση διέγερσης από σημειακή μονοχρωματική πηγή σε κατακόρυφα στρωματοποιημένο θαλάσσιο περιβάλλον, που χαρακτηρίζεται από κατακόρυφο προφίλ ταχύτητας διάδοσης του ήχου $c(z)$ και αναζητούμε λύσεις οι οποίες παρουσιάζουν αξονική συμμετρία. Στην περίπτωση αυτή ο όρος στο δεξί μέλος $f(\mathbf{r};\omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s)$.

Για τη λύση του προβλήματος θα περιγράψουμε στην συνέχεια την **μέθοδο των κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes)** Εξετάζουμε ακουστική διάδοση σε ομογενή λωρίδα ρευστού σταθερού βάθους (κυματοδηγός με επίπεδα σύνορα και σταθερή πυκνότητα μέσου) που διεγείρεται από σημειακή πηγή σε συγκεκριμένο βάθος. Η ταχύτητα διάδοσης $c(z)$ εξαρτάται μόνο από το βάθος. Χρησιμοποιούμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, z) με την πηγή σε κάποιο βάθος z_s πάνω στον κατακόρυφο άξονα (κυλινδρικής συμμετρίας); βλ. Σχήμα 1.



Σχήμα 1 Σημειακή πηγή σε κυλινδρικό σύστημα

Στη περίπτωση αυτή η εξίσωση Helmholtz για πεδίο που είναι ανεξάρτητο από τη γωνία αζιμουθίου και οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = -\frac{\delta(z - z_s)}{2\pi r} . \quad (5)$$

Το μαθηματικό πρόβλημα συνοδεύεται από τις συνθήκες ελεύθερης ελεύθερης επιφάνειας και αδιαπέρατου πυθμένα

$$p(z=0)=0, \quad \frac{\partial p(z=-h)}{\partial z}=0. \quad (6)$$

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών, αναζητούμε λύση της μορφής:

$$p(r,z)=\Phi(r)Z(z). \quad (7)$$

Αντικαθιστώντας στην πεδιακή εξίσωση και διαιρώντας με $\Phi(r)Z(z)$ βρίσκουμε για $r \neq 0$:

$$\frac{1}{\Phi} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] = - \frac{1}{Z} \left[\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \right]. \quad (8)$$

Το περιεχόμενο των αγκυλών είναι συναρτήσεις ως προς το z και το r , άρα για να ικανοποιείται η εξίσωση θα πρέπει να είναι ο κάθε όρος ίσος με μια σταθερά την οποία συμβολίζουμε ως k_m^2 . Έτσι, από το τελευταίο μέλος καταλήγουμε στο παρακάτω κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\frac{d^2 Z_m(z)}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_m^2 \right] Z_m(z) = 0, \quad (9a)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$Z_m(z=0)=0, \quad \frac{dZ_m(z=-h)}{dz}=0. \quad (9b)$$

Το ανωτέρω είναι ένα ομαλό Sturm-Liouville πρόβλημα ιδιοτιμών. Οι ιδιοτιμές k_m^2 είναι πραγματικές, άπειρες και το διατεταγμένο σύνολο ιδιοτιμών είναι αριθμήσιμο με μοναδικό σημείο συσσωρεύσεως το $-\infty$. Επιπρόσθετα, όλες οι κατακόρυφες ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες και το σύνολο είναι πλήρες στο χώρο $L_2(-h,0)$

$$\int_0^h Z_m(z) Z_n(z) dz = \|Z_n\|^2 \delta_{nm}, \quad (10)$$

όπου δ_{nm} το Kronecker δέλτα, και μπορούν να κανονικοποιηθούν

$$\tilde{Z}_n(z) = Z_n(z) / \|Z_n\|, \quad \int_{-h}^0 \tilde{Z}_m(z) \tilde{Z}_n(z) dz = \delta_{mm}. \quad (11)$$

Αξιοποιώντας την ιδιότητα πληρότητας του συνόλου των κατακορύφων ιδιομορφών μπορούμε να γράψουμε την λύση του εξεταζόμενου προβλήματος στη μορφή υπέρθεσης κανονικών ιδιομορφών

$$p(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(r) Z_m(z). \quad (12)$$

Επίσης μπορούμε να λάβουμε την ακόλουθη αναπαράσταση της γενικευμένης συνάρτησης Dirac $\delta(z - z_0)$

$$\delta(z - z_0) = \sum_n \tilde{Z}_n(z) \tilde{Z}_n(z_s). \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω σχέσεις στην εξίσωση λαμβάνουμε για $r \neq 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi_n(r)}{dr} \right] + k_m^2 \Phi_n(r) = 0, \quad (14)$$

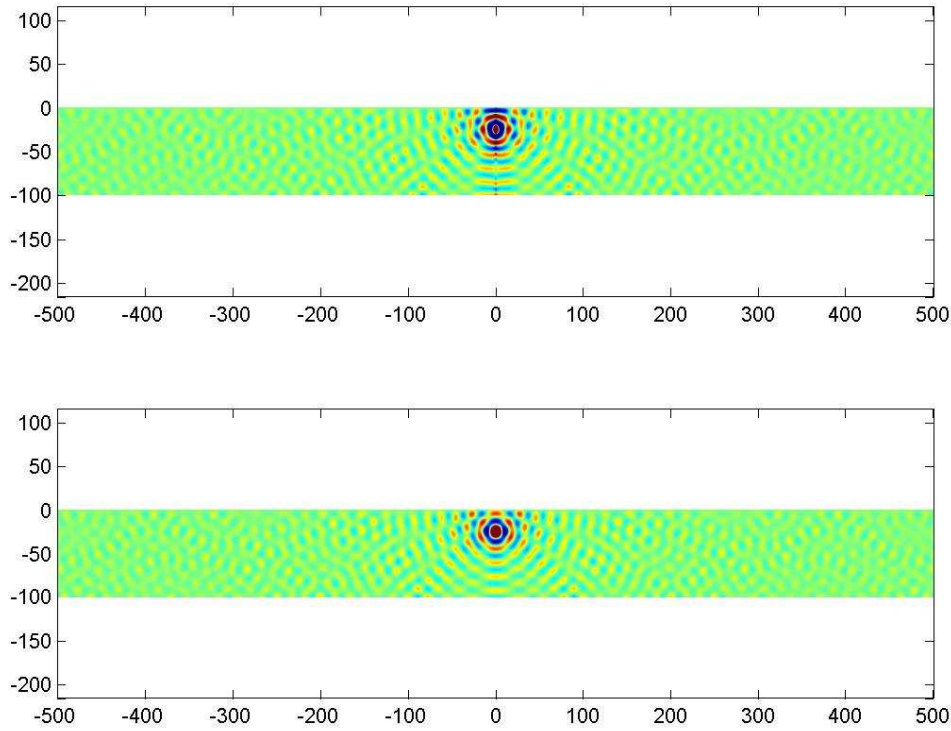
η οποία διαθέτει αναλυτικές λύσεις που εκφράζονται μέσω των συνάρτησεων Hankel (ή Bessel) ως $\Phi_n(r) = H_0^{(1,2)}(k_m r)$. Οι συναρτήσεις Hankel δεύτερου είδους, σε συνδυασμό με την υπόθεση $e^{-i\omega t}$ που έχει γίνει για την απόδοση της αρμονικής εξάρτησης από το χρόνο, αναπαριστούν λύσεις που αντιπροσωπεύουν εισερχόμενα κύματα από το άπειρο, και έτσι απορρίπτονται. Με βάση τα ανωτέρω προκύπτει τελικά η απόδοση του πεδίου της πηγής στον ακουστικό κυματοδηγό μέσω της ακόλουθης υπέρθεσης κανονικών ιδιομορφών:

$$p(r, z) = \frac{i}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Z}_m(z_s) \tilde{Z}_m(z) H_0^{(1)}(k_m r). \quad (15)$$

Τέλος, λαμβάνοντας την ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης Hankel πρώτου είδους, οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση του ακουστικού πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή (πρακτικά σε απόσταση 1-2 μηκών κύματος):

$$p(r, z) \approx \frac{i}{\sqrt{8\pi r}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Z}_m(z_s) \tilde{Z}_m(z) \frac{e^{ik_m r}}{\sqrt{k_m}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (16)$$

από όπου αναγνωρίζεται ότι το συνολικό πεδίο σε μακρινές αποστάσεις από την πηγή συντίθεται από εξερχόμενα κυλινδρικά κύματα. Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται το υπολογιζόμενο πεδίο από σημειακή μονοχρωματική πηγή συχνότητας $f = 100 \text{ Hz}$, τοποθετημένη σε βάθος $z_s = 25 \text{ m}$ σε ρηχό υδάτινο κυματοδηγό βάθους $h = 100 \text{ m}$, με σταθερή ταχύτητα του ήχου $c = 1500 \text{ m/s}$. Στην περίπτωση αυτή το κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών έχει αναλυτική λύση (η οποία θα παρουσιαστεί πιά κάτω).



Σχήμα 2. Απεικόνιση διάδοσης ηχητικού πεδίου από σημειακή πηγή σε συχνότητα 100Hz σε ρηχό ομογενές περιβάλλον

2.7.4 Γραμμική πηγή σε κυματοδηγό με επίπεδα σύνορα

Στην περίπτωση διέγερσης από μια γραμμική πηγή (η οποία μπορεί να προκύψει από συνεχή κατανομή πηγών κατά μήκος ενός (έστω του εγκάρσιου y) άξονα (βλ. Σχήμα 3), υπάρχει η δυνατότητα θεώρησης απλούστερων 2D λύσεων που παραμένουν ανεξάρτητες από την εγκάρσια χωρική μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή αναζητείται ύση της εξίσωσης Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = -\delta(x)\delta(z - z_s), \quad (17)$$

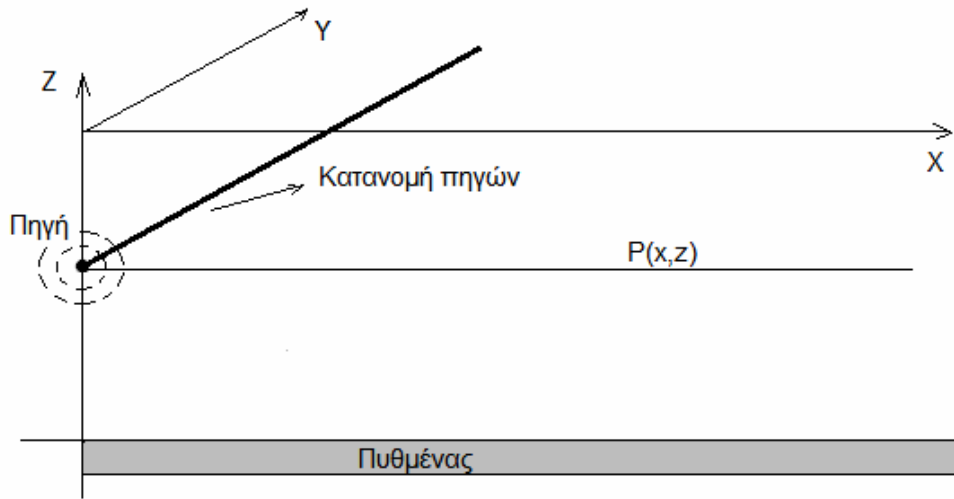
με τις ίδιες όπως προηγουμένως συνοριακές συνθήκες.

Αναζητούμε λύση της ακόλουθης μορφής στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$p(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) Z_m(z), \quad (18)$$

όπου $Z_m(z)$ οι ίδιες όπως προηγουμένως λύσεις του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών, και αντικαθιστώντας στην πεδιακή εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 \Phi_m(x)}{dx^2} Z_m(z) + \Phi_m(x) \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{dZ_m(z)}{dz} \right) \right] \right\} = -\delta(x)\delta(z - z_s). \quad (19)$$



Σχήμα 3. Γραμμική πηγή σε επίπεδη γεωμετρία.

Χρησιμοποιώντας το κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών και τις ιδιότητες του

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dZ_m(z)}{dz} \right] + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_{xm}^2 \right] Z_m(z) = 0, \quad (20)$$

όπου k_{xm}^2 τώρα οι οριζόντιοι κυματαριθμοί, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 \Phi_m(x)}{dx^2} + k_{xm}^2 \Phi_m(x) \right] Z_m(z) = -\delta(x) \delta(z - z_s). \quad (21)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων να αποδίδουν την γενικευμένη συνάρτηση Dirac προκύπτει:

$$\frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} + k_{xn}^2 \Phi_n(x) = -\delta(x) \tilde{Z}_n(z_s). \quad (22)$$

Η λύση της ανωτέρω εξίσωσης είναι η:

$$\Phi_n(x) = \frac{i}{2} \tilde{Z}_n(z_s) \frac{e^{ik_{xn}|x|}}{k_{xn}}. \quad (23)$$

Οπότε το πεδίο της γραμμικής πηγής, γενικεύοντας για πηγή στη θέση (x_s, z_s) παρέχεται από τη σχέση:

$$p(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Z}_m(z_s) \tilde{Z}_m(z) \frac{e^{ik_{xm}|x-x_s|}}{k_{xm}}. \quad (24)$$

2.7.5 Λύση του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών

Σε κάθε περίπτωση (πεδίο από σημειακή πηγή ή γραμμική πηγή) το σημαντικό στοιχείο στον υπολογισμό του πεδίου είναι η κατασκευή των κατακόρυφων ιδιοσυναρτήσεων $Z_m(z)$ καθώς και η εύρεση των αντιστοίχων ιδιοτιμών k_{zm} . Σε ειδικές (απλές) περιπτώσεις όπως $c=\text{const}$ αυτό είναι εφικτό αναλυτικά. Στην γενικότερη περίπτωση ενός περιβάλλοντος με συνεχή δείκτη διάθλασης, όπως στη περίπτωση κατακόρυφου συνεχώς στρωματοποιημένου περιβάλλοντος $c(z)$, απαιτείται αριθμητικός υπολογισμός και μια τέτοια μέθοδος που βασίζεται στη διακριτοποίηση του προβλήματος ιδιοτιμών με πεπερασμένες διαφορές παρουσιάζεται στη συνέχεια.

- Διάδοση σε περιβάλλον σταθερής ταχύτητας ήχου

Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε μια ιδεατή περίπτωση ενός περιβάλλοντος με σταθερή πυκνότητα και ταχύτητα του ήχου η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών δίνεται από τη σχέση:

$$Z_m(z) = A \sin(k_{zm}z) + B \cos(k_{zm}z), \quad (25)$$

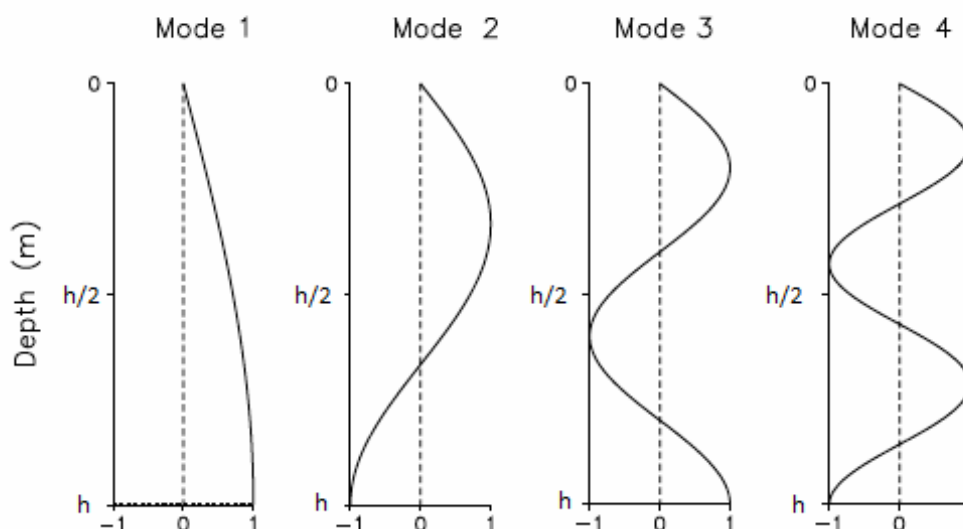
όπου ο κατακόρυφος κυματάρηθος k_{zm} δίνεται από τη σχέση:

$$k_{zm} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{xm}^2} \quad (\text{ή } k_{zm} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{xm}^2} \text{ για γραμμική πηγή}) \quad (26)$$

Η συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια επιβάλλει το $B=0$, ενώ η συνθήκη πυθμένα οδηγεί στο μηδενισμό της παραγώγου και οδηγεί στη σχέση:

$$A k_{zm} \cos(k_{zm}h) = 0, \quad (27)$$

με το h να είναι το βάθος της υπό μελέτη περιοχής, η οποία μας οδηγεί στην λύση:



Σχήμα 4. Απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών του προβλήματος σταθερής ταχύτητας.

$$k_{zm}h = \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

που συνεπάγεται πως το k_m (ή το k_{xm} στη περίπτωση της γραμμικής πηγής) θα πρέπει να λάβει τις ακόλουθες τιμές για την κάθε ιδιομορφή (mode):

$$k_m \text{ ή } k_{xm} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{h}\right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

και οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις δίνονται από τη συνάρτηση (βλ. σχήμα 11):

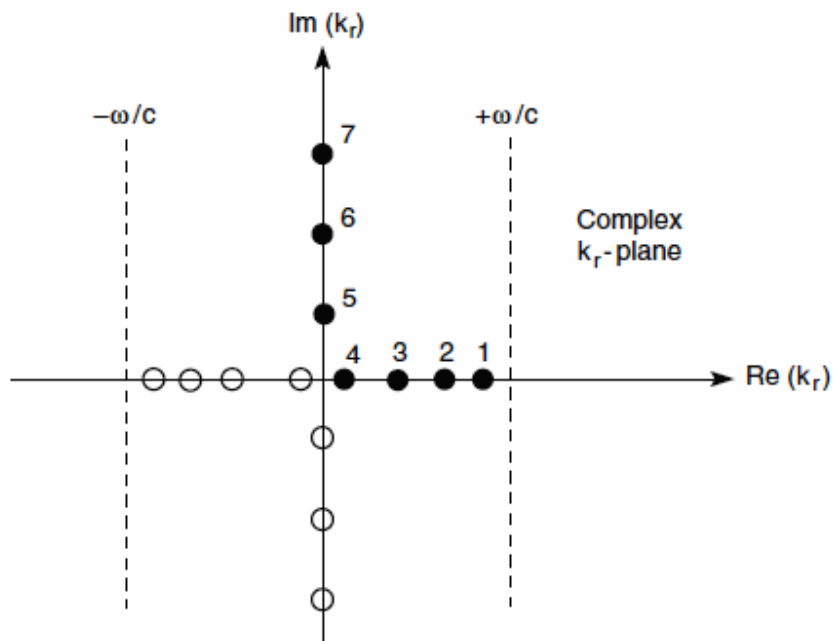
$$\tilde{Z}_m(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin(k_{zm}z), \quad (30)$$

Επιλέξαμε τη σταθερά A έτσι ώστε οι ιδιομορφές (modes) να είναι κανονικοποιημένες ($\|Z_m\| = 1$). Η εξίσωση (2.76) που μας δίνει μια συσχέτιση μεταξύ γωνιακής συχνότητας και οριζόντιου κυματάρθμου είναι γνωστή και ως σχέση διασποράς. Αντίστοιχα, οι ποσότητες $c_m(\omega) = \omega / k_{zm}$ και η $c_{gm}(\omega) = d\omega / dk_{zm}$ είναι η φασική και η ομαδική ταχύτητα της m ιδιομορφής. Οι ιδιοτιμές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το αν οι ιδιομορφές $\Phi_m(r)Z_m(z)$ αφορούν διαδιδόμενες ή αποσβενόμενες ιδιομορφές, κάτι που εξαρτάται καθαρά από το αν το υπόριζο της σχέσης (2.76) είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα; βλ Σχήμα 5. Η επιλογή μας για χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-i\omega t)$, μας επιβάλλει την επιλογή των ιδιοτιμών k_{zm} στο πρώτο τεταρτημόριο, ώστε να έχουμε κύματα που διαδίδονται από την πηγή προς το άπειρο και όχι το αντίθετο. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι στη περίπτωση αποσβενόμενων ιδιομορφών η οριζόντια εξάρτηση τους εξασθενεί εκθετικά σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή και ο συντελεστής εξασθένησης αυξάνει με το δείκτη της ιδιομορφής. Το γεγονός αυτό που επιτρέπει την προσεγγιστική περικοπή της απειροσειράς που εκφράζει τη λύση κρατώντας μόνο τις διαδιδόμενες ιδιομορφές και μικρό αριθμό αποσβενόμενων ιδιομορφών με πολύ καλή προσέγγιση του πεδίου παντού εκτός από τη γειτονία της πηγής.

Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται με γεμισμένο κύκλο και βρίσκονται στο θετικό πραγματικό άξονα οι διαδιδόμενες ιδιομορφές. Αντίστοιχα, για τις αποσβενόμενες ιδιομορφές επιλέγουμε τη μορφή $k_{zm} = i\xi$ με $\xi > 0$. Οι τιμές αυτές παρουσιάστηκαν στο Σχήμα 5 με γεμισμένους κύκλους στον θετικό φανταστικό άξονα.

Ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών καθορίζεται εύκολα στην περίπτωση του ομοιόμορφου περιβάλλοντος $c = const$ από το ακόλουθο ακέραιο μέρος:

$$N_p = \left\lfloor 0.5 + \frac{\omega h}{\pi c} \right\rfloor = \left\lfloor 0.5 + 2hf / c \right\rfloor, \quad (31)$$



Σχήμα 5. Απεικόνιση των ιδιοτιμών του προβλήματος στο μιγαδικό επίπεδο

από όπου φαίνεται ότι ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών αυξάνεται αναλογικά με την συχνότητα της πηγής και το βάθος του κυματοδηγού, και ελαττώνεται με την αύξηση της φασικής ταχύτητας. Το ανώτερο όριο των πραγματικών (διαδιδόμενων) ιδιοτιμών είναι στο ω/c . Σε αρκετά χαμηλή συχνότητα μπορεί όλες οι ιδιομορφές να γίνουν αποσβενούμενες. Η συχνότητα αυτή ονομάζεται “συχνότητα αποκοπής” (cut-off frequency) του κυματοδηγού και δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{c}{4h} . \quad (32)$$

Στην περίπτωση του γενικού οριζόντια στρωματοποιημένου περιβάλλοντος με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης $c(z)$ ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών καθορίζεται από το πρόσημο των ιδιοτιμών k_{zm} ή k_{xm} οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά. Σε κάθε περίπτωση η ανωτέρω σχέση εφαρμοζόμενη με χαρακτηριστική (μέση ή ελάχιστη) τιμή του $c(z)$ προσεγγίζει τον αριθμό των διαδιδόμενων ιδιομορφών.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.77) στην αναπαράσταση του πεδίου βρίσκουμε για το πρόβλημα σημειακής πηγής σε ομογενή κυματοδηγό σταθερής ταχύτητας:

$$p(r, z) = \frac{i}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{zm} z_s) \sin(k_{zm} z) H_0^{(1)}(k_{xm} r) , \quad (33)$$

και για την γραμμική πηγή:

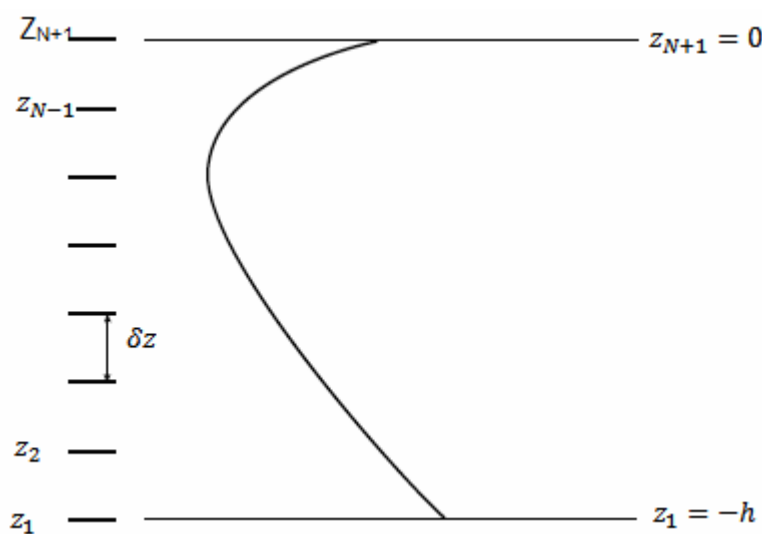
$$p(x, z) = \frac{i}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(k_{zm} z_s) \sin(k_{zm} z) \frac{\exp(ik_{xm} |x - x_s|)}{k_{xm}} . \quad (34)$$

Πολλές από τις ιδιότητες που παρουσιάστηκαν πιο πάνω στο ισοταχές πρόβλημα (isovelocity) θα έχουν ισχύ και σε πιο σύνθετα περιβάλλοντα. Στο Σχήμα 6 εικονίζεται ένα παράδειγμα υπολογισμού πεδίου από γραμμική πηγή σε ομογενές θαλάσσιο περιβάλλον σταθερής ταχύτητας $c = 1500 \text{ m/s}$ και σταθερής βαθυμετρίας $h = 100 \text{ m}$ από γραμμική πηγή συχνότητας $f = 100 \text{ Hz}$. Οι διαδιδόμενες ιδιομορφές είναι 13 και το αποτέλεσμα έχει δοθεί κρατώντας ένα αριθμό αποσβενόμενων μορφών.

- Περιβάλλον κατακόρυφα μεταβαλλόμενης ταχύτητας του ήχου

Με σκοπό την εύρεση των ιδιοτιμών σε ένα περιβάλλον, όπου έχουμε μεταβαλλόμενη κατά βάθος ταχύτητα διάδοσης του ήχου, χρησιμοποιούμε τη μεθόδους αριθμητικής επίλυσης, όπως η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που θα παρουσιάσουμε εδώ. Σύμφωνα με αυτή διαωρίζουμε το πεδίο από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια σε N ίσα τμήματα, κατασκευάζοντας ένα πλέγμα από $N + 1$ σημεία, με αφετηρία τον πυθμένα. Ο αριθμός των τμημάτων διαμέρισης N θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση των ιδιομορφών. Συνήθως χρησιμοποιούνται 10 σημεία (ή περισσότερα) ανά χαρακτηριστικό μήκος ταλαντωτικότητας της λύσης. Εφόσον θεωρούμε πως το θαλάσσιο περιβάλλον θα είναι σταθερής βαθυμετρίας ίσης με h , τα τμήματα της διαμέρισης θα έχουν μήκος που θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta z = \frac{h}{N} . \quad (35)$$



Σχήμα 6. Σχηματική αναπαράσταση του πλέγματος

Συνεχίζοντας, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $Z_j = Z(z_j)$ και θεωρώντας πως η πυκνότητα του μέσου είναι σταθερή καταλήγουμε στην παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$Z''_n + (k^2(z) - k_{zn}^2) Z_n = 0 , \quad (36)$$

όπου το $k(z) = \omega / c(z)$ και ο τόνος εδώ δηλώνει παράγωγο ως προς το z .

Ακολουθώντας την κλασική διαδικασία για την μέθοδο πεπερασμένων διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor οδηγούμενοι στη σχέση:

$$Z_{j+1} = Z_j + Z'_j \delta z + Z''_j \frac{\delta z^2}{2!} + Z'''_j \frac{\delta z^3}{3!} + \dots, \quad (37)$$

από όπου με αναδιάταξη των όρων βρίσκουμε την προς τα εμπρός διαφορική προσέγγιση για την πρώτη παράγωγο σε πρώτης τάξεως προσέγγιση:

$$Z'_j \cong \frac{Z_{j+1} - Z_j}{\delta z} . \quad (38)$$

Αντίστοιχα, από τη προς τα πίσω διαφορική προσέγγιση, ξεκινώντας από το ανάπτυγμα της σειράς Taylor:

$$Z_{j-1} = Z_j - Z'_j h + Z''_j \frac{\delta z^2}{2!} - Z'''_j \frac{\delta z^3}{3!} + \dots , \quad (39)$$

βρίσκουμε τη προσεγγιστική σχέση :

$$Z'_j \cong \frac{Z_j - Z_{j-1}}{\delta z} . \quad (40)$$

Τέλος, με την πρόσθεση των αναπτυγμάτων Taylor και την αναδιάταξη των όρων βρίσκουμε την κεντρική διαφορική προσέγγιση σε δεύτερης τάξεως προσέγγιση για τη δεύτερη παράγωγο:

$$Z''_j = \frac{Z_{j-1} - 2Z_j + Z_{j+1}}{(\delta z)^2} , \quad (41)$$

όπου τα z_j δίνονται από τη σχέση:

$$z_j = j \delta z, \quad j = 2, \dots, N . \quad (42)$$

Με βάση τα ανωτέρω προκύπτει για τα εσωτερικά σημεία του πλέγματος η ακόλουθη προσέγγιση της εξίσωσης, με σχήμα ακρίβειας δεύτερης τάξεως,

$$\frac{Z_{j+1} - 2Z_j + Z_{j-1}}{(\delta z)^2} + k^2(z_j) Z_j = 0 . \quad (43)$$

Ο πίνακας του διακριτού συστήματος είναι τριδιαγώνιος της μορφής

$$A_{j,j-1} = \frac{1}{(\delta z)^2}, \quad A_{j,j} = \left(\frac{-2}{(\delta z)^2} + k^2(z_j) \right), \quad A_{j,j+1} = \frac{1}{(\delta z)^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N . \quad (44)$$

Αναζητώντας τις ιδιοτιμές λ_n του ανωτέρω πίνακα

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = 0 , \quad (45)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας. Θα προσεγγίσουμε τις λύσεις του κατακορυφου προβλήματος ιδιοτιμών. Στον διακριτό πίνακα θα προστεθούν κάποιες τροποποιητικές αλλαγές, προκειμένου να εισαχθούν και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Αρχικά θα εισαγάγουμε τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας $Z_{N+1} = Z(z = z_{N+1} = 0) = 0$, και απαξιώνοντας τον αντίστοιχο άγνωστο οδηγούμαστ τελικά σε έναν διακριτό πίνακα διαστάσεως N . Η εισαγωγή και της συνθήκης πυθμένα, θα γίνει ως ακολούθως

$$\frac{Z_2 - Z_1}{\delta z} + \frac{k^2(z_2) + k^2(z_1)}{2} Z_1 \delta z = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\delta z} + k^2(z_1) \delta z \right) Z_1 + \frac{1}{\delta z} Z_2 = 0. \quad (46)$$

Η ανωτέρω σχέση χρησιμοποιούμενη για $z = z_1 = -h$, καθορίζει την τελική μορφή του διακριτού πίνακα \mathbf{A} . Οι ιδιοτιμές λ_n του \mathbf{A} προσεγγίζουν τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του κατακόρυφου προβλήματος $k_{zn}^2 \approx \lambda_n$ και τα ιδιοδιανύσματα τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις στα σημεία του πλέγματος $Z_n(z = z_j)$, οι οποίες κανονικοποιούνται $\tilde{Z}_n(z = z_j) = Z_n(z = z_j) / \|Z_n\|$ διαιρούμενες με την νόρμα $\|Z_n\|$, η οποία υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση:

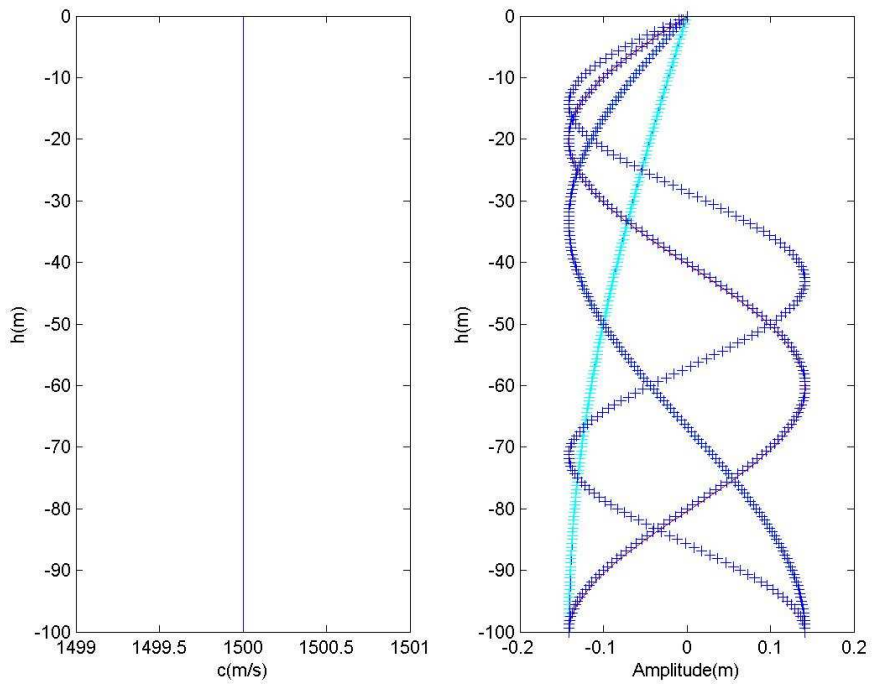
$$\|Z_n\|^2 = \int_{-h}^0 Z_n^2 dz. \quad (47)$$

Η συμφωνία αριθμητικής και αναλυτικής λύσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 7 για σταθρή ταχύτητα $c = 1500 \text{ m/s}$ κι συχνότητα 30 Hz , όπου τα σύμβολα απεικονίζουν την αριθμητική λύση ενώ οι συνεχείς γραμμές την αναλυτική λύση. Στη συνέχεια, εξετάζουμε ένα μεταβαλλόμενο κατακόρυφο προφίλ με ταχύτητα παραβολικής μορφής:

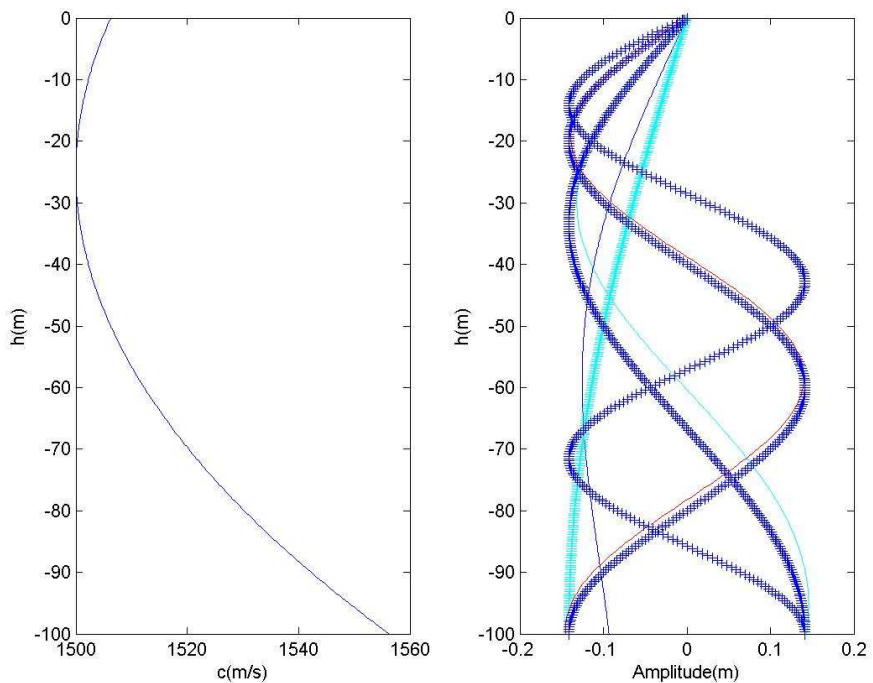
$$c(z) = c_0 + b(z - z_0)^2, \quad (48)$$

όπου $c_0 = 1500 \text{ m/s}$ η ελάχιστη τιμή της φασικής ταχύτητας μετάδοσης και $z_0 = -25 \text{ m}$ η θέση του ελαχίστου. Επίσης έχει ληφθεί $b = 0.1 \text{ m}^{-1} / \text{s}$. Το προφίλ εικονίζεται στο Σχήμα 9, όπου επίσης παρατηρούμε τις διαφοροποιήσεις των αριθμητικών λύσεων από την αναλυτική, που αναφέρεται για περιβάλλον σταθερής ταχύτητας $c_0 = 1500 \text{ m/s}$ για την ίδια συχνότητα 30 Hz . Παρατηρούμε στο Σχήμα 10 ότι μεγαλύτερες τροποποιήσεις προκύπτουν στις πρώτες κατακόρυφες ιδιοδιυναρτήσεις, ενώ όσο ο δείκτης της ιδιομορφής αυξάνεται οι ιδιοσυναρτήσεις τείνουν να συμπίπτουν στις αντίστοιχες του ομογενούς προβλήματος.

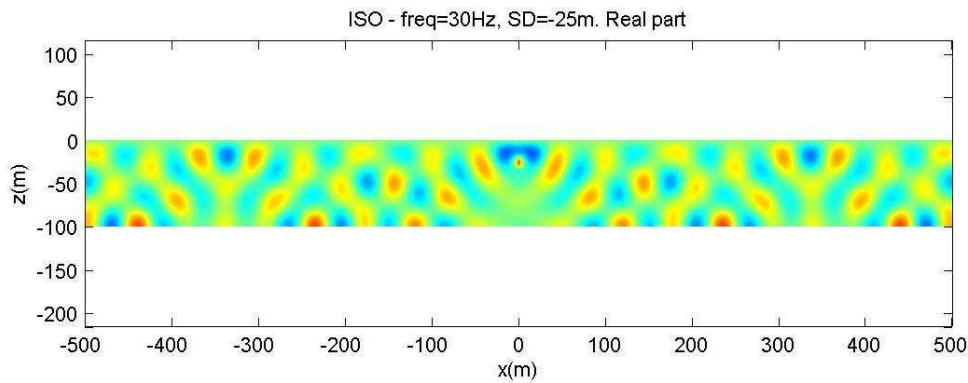
Ακολουθώς χρησιμοποιούνται τα ανωτέρω αποτελέσματα για να αποδώσουμε το υπολογιζόμενο κυματικό πεδίο από γραμμική πηγή σε συχνότητα 30 Hz στο ομογενές και ανομοιογενές περιβάλλον παρουσιάζεται όπως εικονίζεται στα Σχήματα 10 και 11 (μόνο για το πραγματικό μέρος του πεδίου), αντίστοιχα.



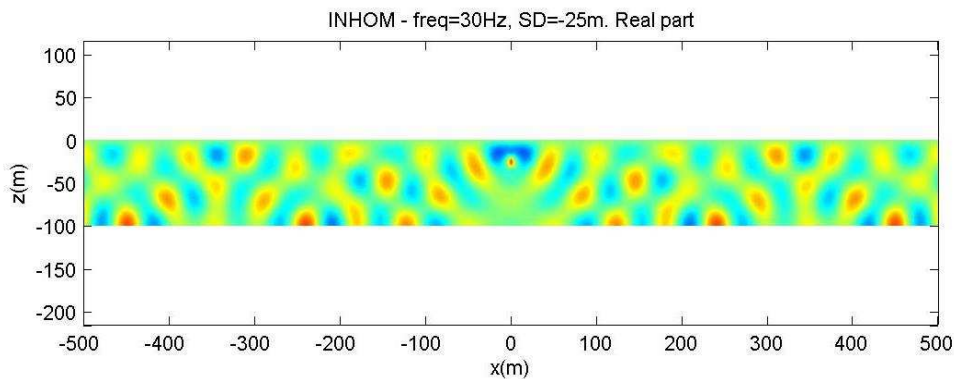
Σχήμα 7. Κατακόρυφο προφίλ σταθερής ταχύτητας (στα αριστερά) και απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών στο πρόβλημα σταθερής ταχύτητας για συχνότητα 30Hz και σύγκριση αριθμητικής λύσης (σύμβολα) με την αναλυτική (γραμμές).



Σχήμα 9. Κατακόρυφο προφίλ μεταβαλλόμενης ταχύτητας (αριστερά) και απεικόνιση των 4 πρώτων ιδιομορφών του προβλήματος για συχνότητα 30Hz. Σύγκριση της αριθμητικής λύσης (σύμβολα) με την αντίστοιχη για περιβάλλον σταθερής ταχύτητας διάδοσης 1500m/s (γραμμές).



Σχήμα 10. Ομογενές περιβάλλον διάδοσης.



Σχήμα 11. Ανομοιογενές περιβάλλον διάδοσης.

2.8 Σκέδαση σε μη φραγμένο χωρίο

2.8.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Κατά τη διάδοση ακουστικών κυμάτων στο θαλάσσιο περιβάλλον υπάρχει η πιθανότητα το κύμα να συναντήσει μεγάλα ή μικρότερα εμπόδια στην πορεία του, τα οποία θα διεγείρουν φαινόμενα σκέδασης. Σε αυτή την περίπτωση το συνολικό πεδίο γράφεται στη μορφή αθροίσματος δύο διαφορετικών συνιστωσών, ένα που θα περιγράφει το πεδίο που προέρχεται από την πηγή ή το παράλληλο κύμα και ένα που θα αφορά το πεδίο σκέδασης, δηλαδή το δυναμικό που δημιουργείται λόγω της αλληλεπίδρασης με τον σκεδαστή. Το συνολικό πεδίο θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$p_T = p_I + p \quad , \quad (1)$$

όπου το p_I θα συμβολίζει το πεδίο λόγω πηγής ή παράλληλου κύματος και το p θα συμβολίζει το πεδίο σκέδασης.

2.8.2 Σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων σε δισδιάστατο μη φραγμένο χώρο

Σε ειδικές περιπτώσεις (όπως σε ομογενές μέσο) το πρόβλημα σκέδασης από έναν πεπερασμένο δισδιάστατο σκεδαστή διαθέτει αναλυτική λύση, η οποία εκφράζεται μέσω γνωστών συναρτήσεων. Η κατασκευή των λύσεων αυτών έχει ιδιαίτερη σημασία για την έλεγχο της ακρίβειας και την αξιολόγηση αριθμητικών επιλυτών της εξίσωσης Helmholtz που

είναι σε θέση να διαχειριστούν επιφάνειες σκεδαστή – σύνορα γενικού σχήματος. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο κυκλικός σκεδαστής. Για τη κατασκευή της λύσης θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Ξεκινάμε θεωρώντας την ομογενή εξίσωση Helmholtz για το πεδίο σκέδασης της ακουστικής πίεσης p σε δισδιάστατο εξωτερικό μη φραγμένο χωρίο:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 , \quad (2)$$

η οποία γράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + k^2 p = 0 . \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας για την επίλυση τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών:

$$p(\rho, \theta) = R(r)T(\theta). \quad (4)$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\frac{r^2}{R} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R \right] = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = n^2 , \quad (5)$$

όπου n είναι η σταθερά χωρισμού μεταβλητών. Συνεχίζοντας σε ότι αφορά την $T(\theta)$:

$$T(\theta) = C e^{in\theta} , \quad n=0,1,2,\dots, \quad (6)$$

επιλογή που εξασφαλίζει την περιοδικότητα της λύσης με C να είναι μια σταθερά. Αντίστοιχα λαμβάνουμε για την $R(r)$:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 , \quad (7)$$

από όπου θέτοντας $\tilde{z} = kr$ και $\tilde{R}(\tilde{z}) = R(kr)$, και καταλήγουμε στην εξίσωση Bessel n -τάξεως:

$$\tilde{z}^2 \frac{d^2 \tilde{R}}{d\tilde{z}^2} + \tilde{z} \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{z}} + (\tilde{z}^2 - n^2) \tilde{R} = 0 . \quad (8)$$

Επομένως, η λύση της εξίσωσης (7) εφράζεται μέσω των συναρτήσεων Bessel J_n , Y_n ή των συναρτήσεων Hankel $H_n^{(1,2)} = J_n \pm iY_n$:

$$\tilde{R}(z) = \tilde{A} J_n(z) + \tilde{B} Y_n(z) = A H_n^{(1)}(z) + B H_n^{(2)}(z) , \quad (9)$$

και η γενική αναπαράσταση πεδίου στο εξωτερικό του κυλινδρικού σκεδαστή δίνεται από

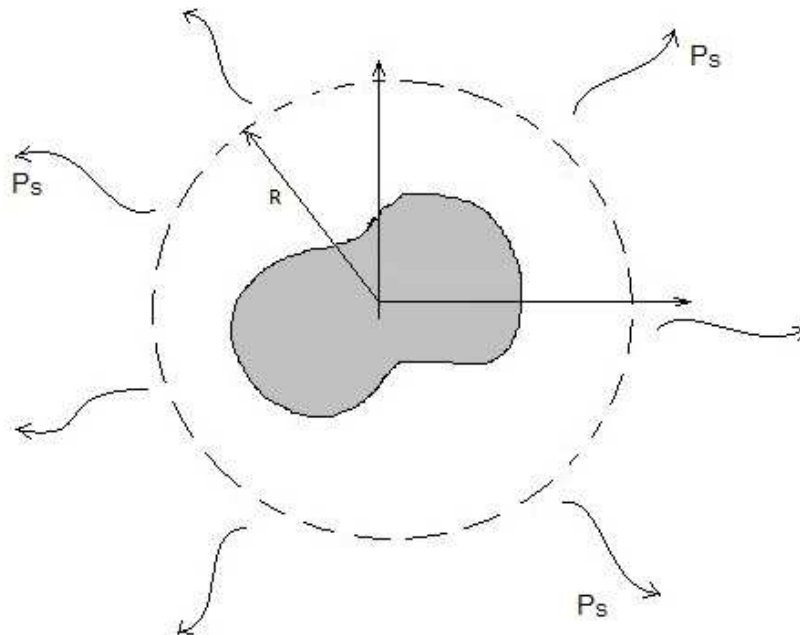
$$p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) \sin(n\theta) . \quad (10)$$

Όπως παρατηρούμε στην ανωτέρω σχέση απουσιάζει εντελώς η Hankel δεύτερου είδους, λόγω της απαίτησης της συνθήκης ακτινοβολίας (δηλαδή η λύση να αναπαριστά εξερχόμενα κύματα) και της θεώρησης μας για την αρμονική εξάρτηση του πεδίου από τον χρόνο: $p(r, \theta; t) = \text{Re}(p(r, \theta) e^{-i\omega t})$.

Πράγματι, η ασυμπτωτική μορφή των συναρτήσεων Hankel για μεγάλες τιμές του ορίσματος θα είναι:

$$H_n^{(1,2)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\pm i(kr - n\pi - \frac{\pi}{2})}, \quad (11)$$

και λόγω της τυχαίας επιλογής μας για την περιγραφή του χρονικά αρμονικού προβλήματος η μορφή της λύσης με την συνάρτηση Hankel πρώτου είδους $H_n^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}$ θα περιγράφει εξερχόμενα κύματα που έχουν φυσικό νόημα στο εξεταζόμενο πρόβλημα σκέδασης. Αντίστοιχα, η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους περιγράφει κύματα εισερχόμενα από το άπειρο προς τον σκεδαστή.



Σχήμα 12. Κύκλος ακτίνας R που περικλείει το σώμα (γενικού σχήματος) και τα σκεδαζόμενο πεδίο.

Με δεδομένο το πεδίο $p(r, \theta)$, για κάθε κύκλο ακτίνας R πολύ μεγαλύτερης της διαμέτρου σώματος, ώστε να το περικλείει στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο Σχήμα 12, οι συντελεστές A_n και B_n της ανωτέρω αναπαράστασης θα καθορίζονται από την ανάλυση του πεδίου σε σειρές Fourier,

$$a_0 = A_0 H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(\theta; R) d\theta , \quad (12)$$

$$a_n = A_n H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(\theta; R) \cos(n\theta) d\theta, \quad (13)$$

$$\beta_n = B_n H_0^{(1)}(kR) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p(\theta; R) \sin(n\theta) d\theta. \quad (14)$$

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή ($r \rightarrow \infty$) ισχύει:

$$p(r \rightarrow \infty, \theta) \approx \sqrt{\frac{1}{r}} e^{ikr}, \quad (15)$$

από όπου προκύπτει η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (16)$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την αναλυτική λύση σε πρόβλημα δύο διαστάσεων για κυκλικό σκεδαστή. Σημειώνεται ότι η ανωτέρω διαδικασία επεκτείνεται και σε άλλα γεωμετρικά συμμετρικά σώματα, όπως η έλλειψη κλπ. Θα ακολουθήσει η παρουσίαση της αριθμητικής λύσης για σκεδαστές γενικότερης γεωμετρίας με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (BEM). Σκοπός μας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις δύο μεθόδους, ώστε να ελέγξουμε και την ισχύ της αριθμητικής λύσης για μετέπειτα χρήση σε περιπτώσεις που δεν διατίθεται αναλυτική λύση.

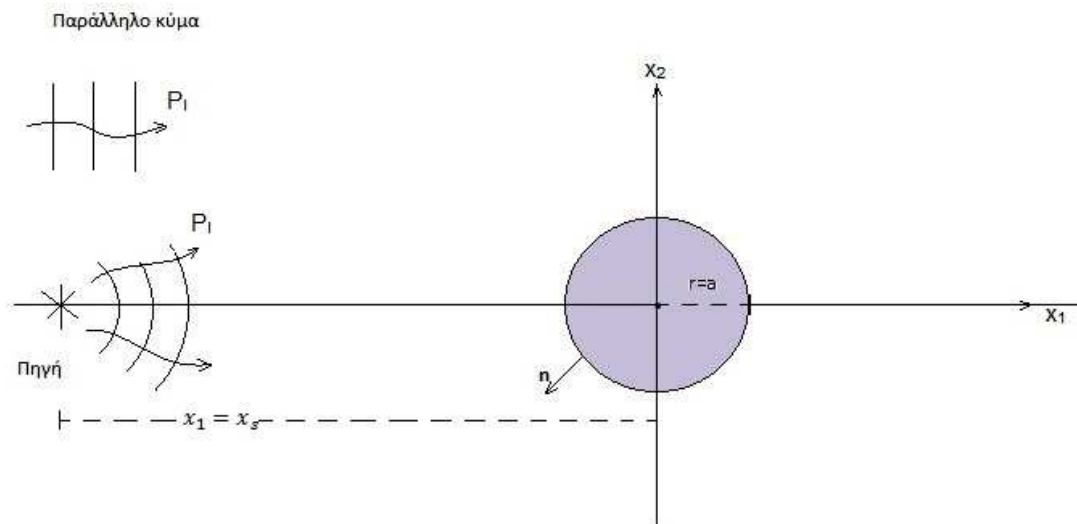
2.8.3 Εύρεση αναλυτικής λύσης σε κυκλικό σκεδαστή

Η διέγερση στα σύνορα του σκεδαστή μπορεί να προκληθεί από παράλληλο κύμα ή από σημειακή πηγή, βλ. Σχήμα 13. Στην πρώτη περίπτωση και χωρίς βλάβη της γενικότητας λαμβάνουμε το διαδιδόμενο κύμα με κατεύθυνση τον καρτεσιανό x_1 -άξονα ως προς τον σκεδαστή, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση της μορφής:

$$p_I = \exp(ikx_1), \quad (17)$$

στη δεύτερη περίπτωση, με την ύπαρξη πηγής στη θέση ($x_1 = x_s, x_2 = 0$) σε σύστημα με αρχή το κέντρο του κυκλικού σκεδαστή, το εισερχόμενο κύμα θα δίδεται από:

$$p_I = H_0^{(1)}(k|x_1 - x_s|). \quad (18)$$



Σχήμα 13. Σκέδαση από κυκλικό σκεδαστή.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα πρέπει να ισχύουν η συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του κυκλικού σκεδαστή ($r = a$), της μορφής

$$\alpha \frac{\partial p_T}{\partial n} + \beta p_T = 0 \Rightarrow \alpha \frac{\partial p_s}{\partial n} + \beta p_s = - \left(\alpha \frac{\partial p_I}{\partial n} + \beta p_I \right) = g, \quad (19)$$

καθώς και η συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο (συνθήκη Sommerfeld):

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ikp = 0. \quad (20)$$

Στην συνοριακή συνθήκη στο σώμα τα δεδομένα g δίδονται από μια συνεχή συνάρτηση που περιγράφει το πεδίο ή τη κάθετη παράγωγο του πάνω στο σύνορο. Η παραγωγή ως προς το κάθετο διάνυσμα είναι ισοδύναμη με παραγωγή ως προς την ακτίνα r που στην περίπτωση του κυκλικού σκεδαστή. Έτσι έχουμε τις συνθήκες τύπου

- Dirichlet με $\alpha=0$ και $\beta=1$, που αντιπροσωπεύει μαλακό σκεδαστή.
- Neumann με $\alpha=1$ και $\beta=0$, που αντιπροσωπεύει σκληρό σκεδαστή.

καθώς και ενδιάμεσες περιπτώσεις που οδηγούν σε συνοριακές συνθήκες Robin οι οποίες προσομοιάζουν σύνορο με συγκεκριμένα ανακλαστικά χαρακτηριστικά. Στην γενική περίπτωση οι ανωτέρω συντελεστές είναι συναρτήσεις της συχνότητας και καθορίζονται κυρίως πειραματικά με βάση το υλικό του σκεδαστή, την αγωγιμότητα του συνόρου καθώς και τα χαρακτηριστικά της επιφάνειάς του (επιστρώσεις, τραχύτητα κλπ).

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο αποτελέσματα που μας βοηθάνε στην παραγωγή της αναλυτικής λύσης με διέγερση του πεδίου είτε από παράλληλο προσπίπτον κύμα είτε από κύμα εκπεμπόμενο από σημειακή πηγή.

Θεώρημα 1: Ισχύει η ακόλουθη ανάπτυξη παράλληλου επιπέδου κύματος με κατεύθυνση τον καρτεσιανό x_1 -άξονα σε κυλινδρικά κύματα είναι η παρακάτω:

$$\exp(ikx) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta), \quad (21)$$

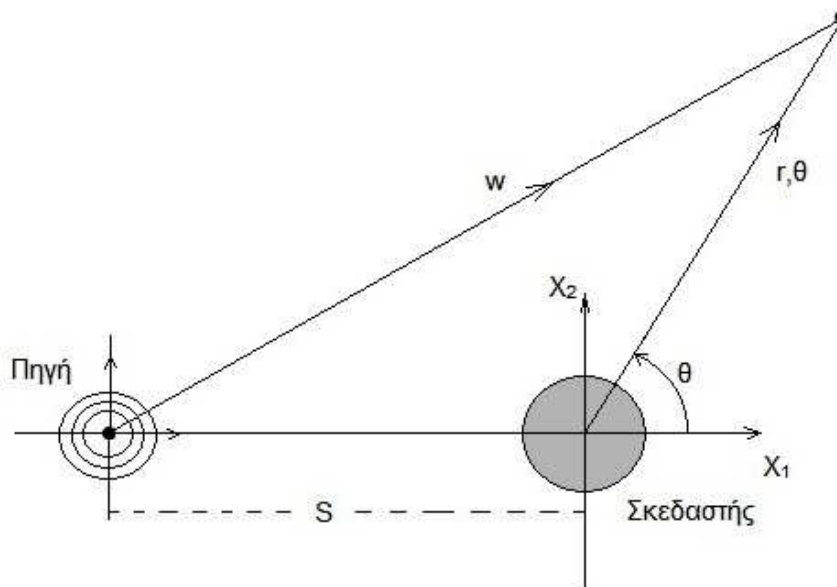
όπου ε_m είναι το σύμβολο Neumann, με τιμές 1 για $m=0$ και 2 για $m \geq 1$. Όπως παρατηρούμε στη ανωτέρω σχέση δεν εμφανίζονται ημιτονικοί όροι, καθώς το πεδίο όπως και ο κυκλικός σκεδαστής είναι συμμετρικά ως προς τον x_1 -άξονα.

Θεώρημα 2 (Αθροισής συναρτήσεων, θ. Graf) : _Ισχύει η ακόλουθη σχέση (βλ., π.χ., Abramowitz M., Stegun I.A., 1970)

$$H_0^{(1)}(kw) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m H_m^{(1)}(ks) J_m(kr) \cos(m\theta), \quad \text{για } r < s = |x_s|. \quad (22)$$

Στην παραπάνω σχέση το r συμβολίζει την απόσταση του σκεδαστή από το σημείο που αναζητάμε το πεδίο και το s τη θέση που βρίσκεται η πηγή ως προς τον σκεδαστή (βλ. Σχήμα 14). Λόγω συμμετρίας του κύκλου και του πεδίου διέγερσης, η γενική λύση του προβλήματος σκέδασης θα δίνεται από την ακόλουθη μορφή:

$$P_s(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\theta) H_m^{(1)}(kr). \quad (23)$$



Σχήμα 14. Το σύστημα πηγής-σκεδαστή με το σημείο αναζήτησης της λύσης.

(i) Πρόβλημα σκέδασης παράλληλου κύματος από κυκλικό σκεδαστή

Εξετάζουμε αρχικά μαλακό σκεδαστή ($\alpha=0, \beta=1$) και γνωρίζουμε πως στην επιφάνεια του κυκλικού σκεδαστή ακτίνας a ισχύει

$$p_T = 0 \Rightarrow p = -p_I(r = a), \quad (24)$$

και επομένως για $r = a$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(D)} \cos(m\theta) H_m^{(1)}(kr) = - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta), \quad (25)$$

από όπου λαμβάνουμε για τους συντελεστές της σειράς (10)

$$A_m^{(D)} = - \frac{\varepsilon_m i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}. \quad (26)$$

Εργαζόμενοι αντίστοιχα για το πρόβλημα Neumann ($\alpha=1, \beta=0$) έχουμε

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J'_m(ka) \cos(m\theta), \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(N)} \Phi_m^{(1)}(ka) \cos(m\theta), \quad (27)$$

όπου

$$J'_m(x) = \frac{dJ_m(x)}{dx} \quad \text{και} \quad \Phi_m^{(1)}(x) = \frac{dH_m^{(1)}(x)}{dx}, \quad (28)$$

και λαμβάνουμε τελικά για τους συντελεστές της σειράς (10)

$$A_m^{(N)} = - \varepsilon_m i^m \frac{J'_m(ka)}{\Phi_m^{(1)}(ka)}. \quad (29)$$

(ii) Πρόβλημα σκεδασης πεδίου από σημειακή πηγή από κυκλικό σκεδαστή

Ανάλογα εργαζόμαστε για την εύρεση των σχέσεων στην περίπτωση της διέγερσης από σημειακή πηγή. Στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet ($\alpha=0, \beta=1$) θα ισχύει:

$$A_m^{(D)} = - \varepsilon_m (-1)^m \frac{H_m^{(1)}(ks) J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}. \quad (30)$$

Αντίστοιχα στην περίπτωση του προβλήματος Neumann ($\alpha=0, \beta=1$) η σχέση που δίνει τον συντελεστή προκύπτει:

$$A_m^{(N)} = - \varepsilon_m (-1)^m \frac{H_m^{(1)}(ks) J'_m(ka)}{\Phi_m^{(1)}(ka)}. \quad (31)$$

(iii) Αγώγιμο σύνορο

Στην περίπτωση κυκλικού σκεδαστή με αγώγιμο σύνορο γενικότερων χαρακτηριστικών η λύση προκύπτει με γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων λύσεων $A_m^{(D)}$ και $A_m^{(N)}$ ως ακολούθως:

$$A_m = \alpha A_m^{(D)} + \beta A_m^{(N)}, \quad (32)$$

όπου α, β θα είναι γνωστοί συντελεστές ανάλογα με τις ιδιότητες του εκάστοτε σκεδαστή.

2.9 Αριθμητική λύση με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων (BEM)

Στην περίπτωση του προβλήματος σκέδασης από σώμα D γενικότερου σχήματος η λύση μπορεί να κατασκευαστεί αριθμητικά με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method). Γενικά διατίθενται διάφορες εκδοχές, όπως η μέθοδος που βασίζεται στο θεώρημα Green και η μέθοδος απλών δυναμικών (π.χ. κατανομή πηγών). Ακολούθως θα παρουσιαστεί αριθμητικό σχήμα στις δύο διαστάσεις σύμφωνα με τη δεύτερη εκδοχή.

Η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις δίνεται από:

$$G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (1)$$

και περιγράφει ακουστικό πεδίο από σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{y} . Χρησιμοποιούμε ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου σκέδασης, ως δυναμικό απλού στρώματος, στην παρακάτω μορφή:

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad (2)$$

σε όλο το χώρο εκτός του σκεδαστή. Στην ανωτέρω σχέση $\sigma(\mathbf{y})$ περιγράφει την ένταση των κατανεμημένων πηγών πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, $G(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ είναι η συνάρτηση Green για χώρο δύο διαστάσεων και το διάνυσμα $\mathbf{y} \in \partial D$ δηλώνει θέση στο σύνορο του σκεδαστή. Αντίστοιχα προς την ανωτέρω αναπαράσταση προκύπτει και η παράγωγος του ακουστικού πεδίου που δίνεται από την σχέση:

$$\nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) = \nabla \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (3)$$

Ειδικά σε σημεία πάνω στο σύνορο η ανωτέρω σχέση διαμορφώνεται ως ακολούθως

$$\nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial n} ds(\mathbf{y}), \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (4)$$

Το πεδίο που δίδεται από την Εξ. (2) θα είναι λύση του προβλήματος Neumannéan στο σύνορο του σκληρού σκεδαστή εφ'όσον ικανοποιείται η ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την άγνωστη ένταση $\sigma(\mathbf{y})$:

$$\nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2} + \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{\partial n} ds(\mathbf{y}) = g_N(\mathbf{x}) \equiv -\frac{\partial P_I}{\partial n}, \text{ για } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (5)$$

όπου g_N θα είναι η συνεχής συνάρτηση στο σκεδαστή που περιγράφει τα συνοριακά δεδομένα για το πρόβλημα Neumann.

Αντίστοιχα για συνθήκη Dirichlet πάνω στο ακουστικά μαλακό σώμα η ίδια αναπαράσταση Εξ. (2) οδηγεί στην παραάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$P_s(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = g_D(\mathbf{x}) \equiv -P_l(\mathbf{x}), \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D. \quad (6)$$

Η συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz (και της εξίσωσης Laplace) παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία όταν $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ (Colton & Kress, 1983)

$$H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \approx \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{k}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right), \quad (7)$$

πράγμα που καθιστά τα ανωτέρω ολοκληρώματα πάνω στο σύνορο ιδιόμορφα και ο υπολογισμός τους απαιτεί ειδικό χειρισμό. Η εφαρμοζόμενη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος σκέδασης θα περιγραφεί κατωτέρω σε συνδυασμό με τη χαμηλοτάξια μέθοδο συνοριακών στοιχείων.

2.9.1 Χαμηλοτάξια Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Panel Method)

Κατά την εφαρμογή της χαμηλοτάξιας εκδοχής των συνοριακών στοιχείων η επιφάνεια του σκεδαστή προσεγγίζεται από ευθύγραμμα τμήματα-στοιχεία (elements ή panels). Στην απλούστερη περίπτωση στις δύο διαστάσεις το σύνορο προσεγγίζεται από μια κλειστή πολυγωνική γραμμή, η οποία με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων προσεγγίζει το πραγματικό σύνορο του σκεδαστή

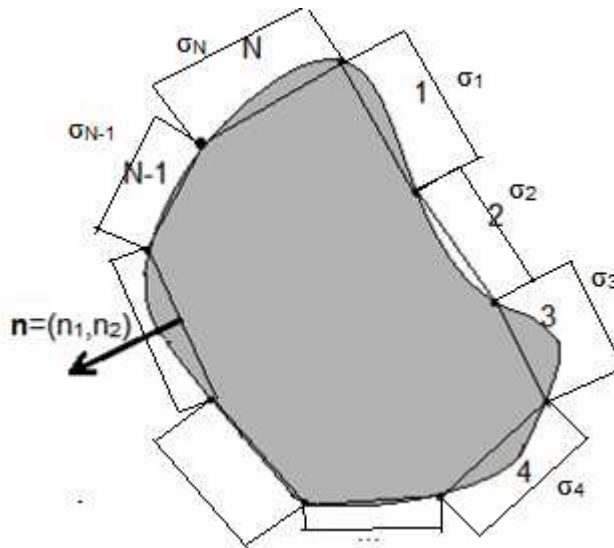
$$\partial D_N \rightarrow \partial D, \quad \text{για } N \rightarrow \infty, \quad (8)$$

βλ. Σχήμα 15, όπου N είναι το πλήθος των στοιχείων μερισμού του συνόρου-επιφάνεια του σκεδαστή ∂D . Σε ότι αφορά την άγνωστη συνάρτηση που στην βασική εκδοχή είναι η ένταση πηγών $\sigma(s) \equiv \sigma(\mathbf{y}(s))$ πάνω στο σύνορο - επιφάνεια του σκεδαστή, αυτή προσεγγίζεται ως τμηματικώς σταθερή σε κάθε ένα από τα στοιχεία (panels) του συνόρου, $i=1,2,\dots,N$ στο Σχήμα 16, όπου θα λαμβάνει διαφορετική αλλά σταθερή τιμή $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$. Η ανωτέρω τμηματικώς σταθερή κατανομή προσεγγίζει την πραγματική ένταση πηγών στην επιφάνεια του σκεδαστή,

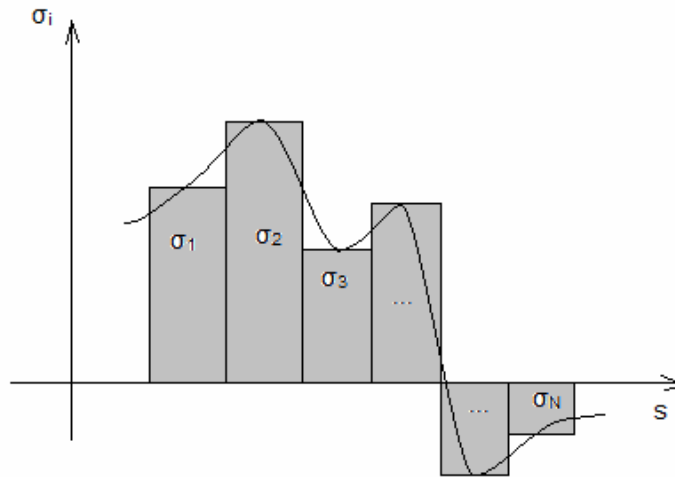
$$\|\sigma_N - \sigma(s)\|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Η ακολουθούμενη προσέγγιση (η ένταση πηγών σ διατηρείται σταθερή σε κάθε στοιχείο) υποβοηθεί σημαντικά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που δίδονται από τις Εξ.(2,3,4) στην επιφάνεια του σκεδαστή που παρέχει το πεδίο σκέδασης και τις παραγώγους αυτού.

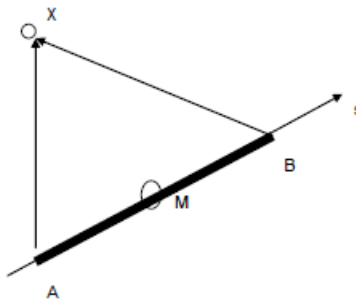
$$P_s(\mathbf{x}) = \int_A^B \sigma(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} | \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}). \quad (10)$$



Σχήμα 15. Διακριτοποίηση συνόρου σκεδαστής πεπερασμένων διαστάσεων με ευθύγραμμο στοιχεία



Σχήμα 16. Προσέγγιση της λύσης από τμηματικώς σταθερή κατανομή



Σχήμα 17. Επαγόμενο δυναμικό από ευθύγραμμο συνοριακό στοιχείο AB

Η επίλυση του διακριτοποιημένου προβλήματος ανάγεται τελικά στον υπολογισμό των επαγόμενου πεδίου και των παραγώγων αυτού από κάθε ευθύγραμμο στοιχείο με σταθερή κατανομή πηγών σ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, σε κάθε σημείο του χώρου, όπως εικονίζεται το Σχήμα 17. Για ένα στοιχείο AB, με άκρα τα A και B, θα ισχύει πως το δυναμικό σκέδασης που παράγει σε κάποιο σημείο του χώρου θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

Γνωρίζοντας πως η συνάρτηση Green στις δύο διαστάσεις δίνεται από τη Εξ.(1), και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ένταση πηγών είναι σταθερή εντός κάθε στοιχείου, οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση που θα μας δίνει το δυναμικό σκέδασης στο σημείο \mathbf{x} από το στοιχείο AB :

$$P_s(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \sigma_{AB} \int_A^B H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) ds(\mathbf{y}) = \sigma_{AB} U_{AB}, \quad (11\alpha)$$

όπου

$$U_{AB}(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int_A^B H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) ds, \quad \text{για } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D \text{ ή } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (11\beta)$$

το επαγόμενο δυναμικό στοιχείου μοναδιαίας έντασης.

Συνεχίζοντας, με παραγωγή της ανωτέρω εξίσωσης καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την κάθετη παράγωγο πάνω στο σύνορο

$$\frac{\partial P_s(\mathbf{x})}{\partial n} = \sigma_{AB} F_{AB}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

όπου

$$F_{AB}(\mathbf{x}) = -\frac{ik}{4} \int_A^B H_1^{(1)}\left(k\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) Q ds, \quad \text{για } \mathbf{x} \in \partial D, \quad (13)$$

η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα από το στοιχείο AB μοναδιαίας έντασης στο σημείο \mathbf{x} πάνω στο σύνορο, και

$$Q = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} n_2 \right). \quad (14)$$

Τα ανωτέρω ολοκληρώματα είναι ιδιόμορφα όταν το \mathbf{x} ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο στοιχείο AB . Σύμφωνα με τη εφαρμοζόμενη μέθοδο συνοριακών στοιχείων και την τεχνική της ταξιοθεσίας (BEM-collocation) αυτό θα συμβεί στη περίπτωση των αυτεπαγωμενων συνεισφορών από το κάθε στοιχείο στον κέντρο του, όταν δηλαδή το στοιχείο ελέγχου θα συμπίπτει με το κέντρο του εκάστοτε θεωρούμενου στοιχείου. Όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (11) παρουσιάζει ασθενή ολοκληρώσιμη ιδιομορφία (λογαριθμικό απειρισμό) και υπολογίζεται εύκολα με απλό μετασχηματισμό. Αντιθέτως το ολοκλήρωμα της σχέσης (13) είναι ισχυρά ιδιόμορφο καθότι η συνάρτηση:

$$H_1^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (15)$$

όταν $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ παρουσιάζει ισχυρή ιδιομορφία, και το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (13) υπάρχει κατά την έννοια της κύριας κατά Cauchy τιμής. Όμως αυτό θα συμβεί όταν υπολογίζεται η επαγόμενη κάθετη ταχύτητα (13,14) από το κάθε ευθύγραμμο στοιχείο AB στο κέντρο του, δηλαδή όταν το σημείο στο Σχήμα 17 λαμβάνεται στο μέσο M του ίδιου του στοιχείου AB . Όμως, από την ειδική μορφή του ολοκληρώματος (13) παρατηρούμε πως οι συνεισφορές από

τις κατανεμημένες πηγές σταθερής έντασης εκατέρωθεν του κέντρου του στοιχείου απειρίζονται για $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ (στο μέσον του στοιχείου) αλλά είναι συμμετρικά αντίθετες. Οπότε λόγω συμμετρίας προκύπτει ότι το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα (13) ως συνολική συνεισφορά στην κάθετη ταχύτητα στο κέντρο του στοιχείου από τη κατανεμημένη πηγή σταθερής έντασης στο κέντρο του ίδιου στοιχείου θα μηδενίζεται. Σε κάθε άλλη περίπτωση, όταν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ τα ανωτέρω ολοκληρώματα δεν παρουσιάζουν ιδιομορφία και μπορούν να υπολογιστούν με κλασσικές μεθόδους. Στην παρούσα εργασία έχουμε θεωρήσει σκεδαστές-σύνορα σωμάτων πεπερασμένου πάχους (μη λεπτόγραμμα σχήματα) και σχετικά μικρούς κυματαριθμούς, και έχει χρησιμοποιηθεί κανόνας Simpson με δεδομένο (ικανοποιητικά μεγάλο) αριθμό σημείων για το αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Στην πράξη αρκεί αριθμός 20-30 σημείων ανά χαρακτηριστικό μήκος κύματος (το οποίο φυσικά εξαρτάται από την συχνότητα του προβλήματος).

Πρόβλημα Dirichlet

Με βάση τα ανωτέρω το πεδίο στο σύνορο στα κέντρα των στοιχείων θα δίνεται την υπέρθεση:

$$g^{(D)}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}_i) \text{ για } i=1,2,\dots,N, \quad (16)$$

Στην περίπτωση όπου είναι δεδομένο το πεδίο πάνω στο σύνορο, όπως συμβαίνει στο πρόβλημα σκέδασης από έναν μαλακό ακουστικό σκεδαστή

$$g^{(D)}(\mathbf{x}_i) = -P_I(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (17)$$

οι ανωτέρω εξισώσεις ορίζουν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους, τις εντάσεις των πηγών $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, στα στοιχεία του συνόρου.

Πρόβλημα Neumann

Αντίστοιχα, η κάθετη παράγωγος του πεδίου στο σύνορο από όλη την κατανομή πηγών σταθερής έντασης σε κάθε στοιχείο $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, υπολογιζόμενη στα κέντρα $\mathbf{x}_i, i=1,2,\dots,N$ των στοιχείων θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$g_N(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_j F_j(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (18)$$

και με δεδομένη τη τιμή της κάθετης παραγωγού του πεδίου πάνω στο σύνορο, όπως συμβαίνει στο πρόβλημα σκέδασης από έναν σκληρό ακουστικό σκεδαστή

$$g^{(N)}(\mathbf{x}_i) = -\partial P_I(\mathbf{x}_i) / \partial n = -\mathbf{n} \nabla P_I, \quad \mathbf{x}_i \in \partial D_N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (19)$$

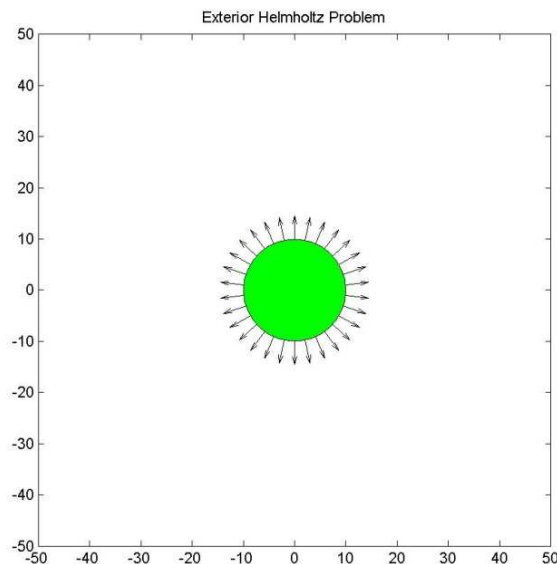
ορίζεται ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους, και πάλι τις εντάσεις των πηγών $\sigma_i, i=1,2,\dots,N$, στα στοιχεία του συνόρου.

Σε κάθε περίπτωση, μετά τον υπολογισμό των αγνώστων εντάσεων των στοιχείων, το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου, και πάνω στο σύνορο του σκεδαστή, υπολογίζεται με τη σχέση

$$P_s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \sigma_j U_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \quad (20)$$

Τέλος, στην περίπτωση μικτής συνοριακής συνθήκης (impedance boundary condition) η λύση μπορεί να κατασκευαστεί με γραμμικό συνδυασμό των λύσεων των ανωτέρω προβλημάτων.

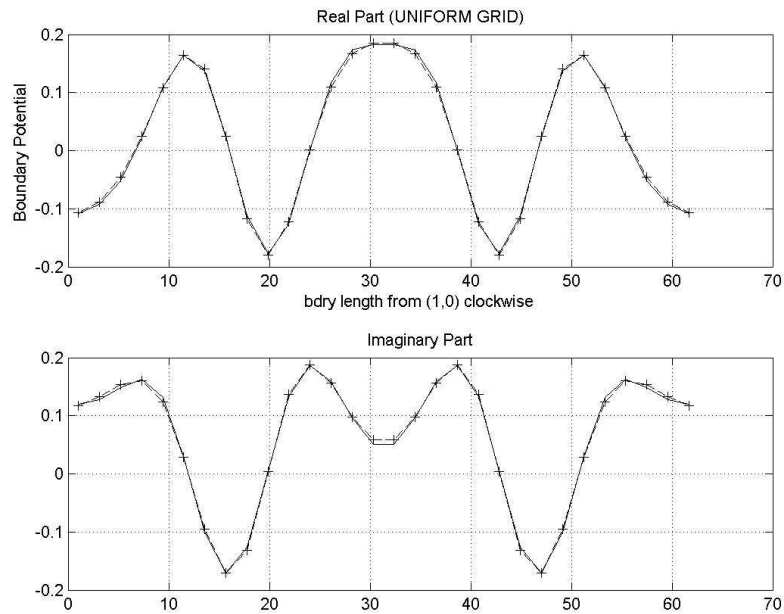
Ως παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου παρουσιάζουμε στη συνέχεια σκέδαση πεδίου πηγής από μαλακό κυκλικό σκεδαστή ακτίνας $10m$, Σχήμα 18, σε περιβάλλον με σταθερή ταχύτητα διάδοσης ήχου $1500m/s$ και συχνότητα $100Hz$ (Πρόβλημα Dirichlet - προσπίπτον κύμα από σημειακή πηγή), και σκέδαση παραλλήλου επιπέδου κύματος από σκληρό κυκλικό σκεδαστή ίδιας ακτίνας στο ίδιο περιβάλλον (πρόβλημα Neumann - προσπίπτον παράλληλο κύμα). Και στις δύο περιπτώσεις διατίθεται αναλυτική λύση η οποία περιγράφηκε σε προηγούμενα μέρη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της αριθμητικής λύσης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 19 και 20, αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε την πολύ καλή ακρίβεια της μεθόδου με διακριτοποίηση του συνόρου χρησιμοποιώντας 30 συνοριακά στοιχεία.



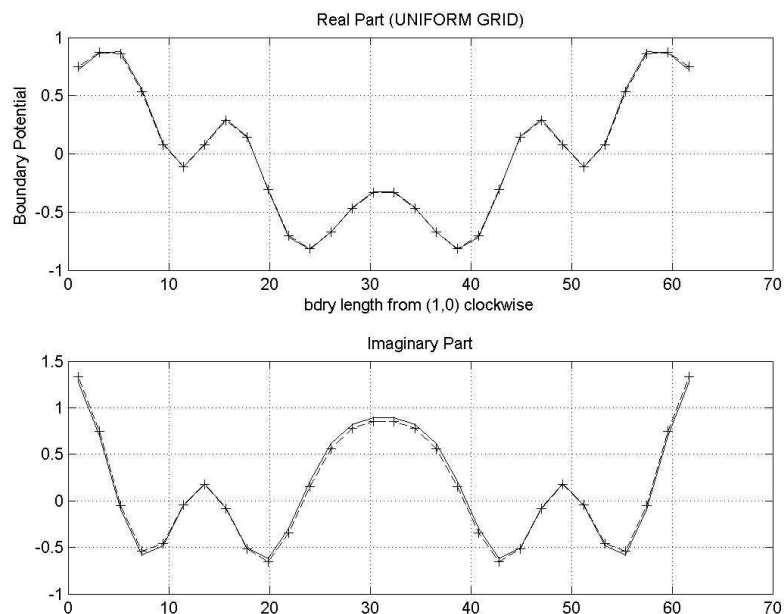
Σχήμα 18. Διακριτοποίηση κυκλικού σκεδαστή σε ευθύγραμμα στοιχεία και κατανομή κάθετων διανυσμάτων στα κέντρα τους.

Ακολουθώς το προσπίπτον, το σκεδαζόμενο και το συνολικό πεδίο όπως υπολογίζεται με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων παρουσιάζεται στις δύο περιπτώσεις στα Σχήματα 21 έως 24, αντίστοιχα, τόσο για το πραγματικό όσο και για το φανταστικό μέρος των θεωρούμενων πεδίων.

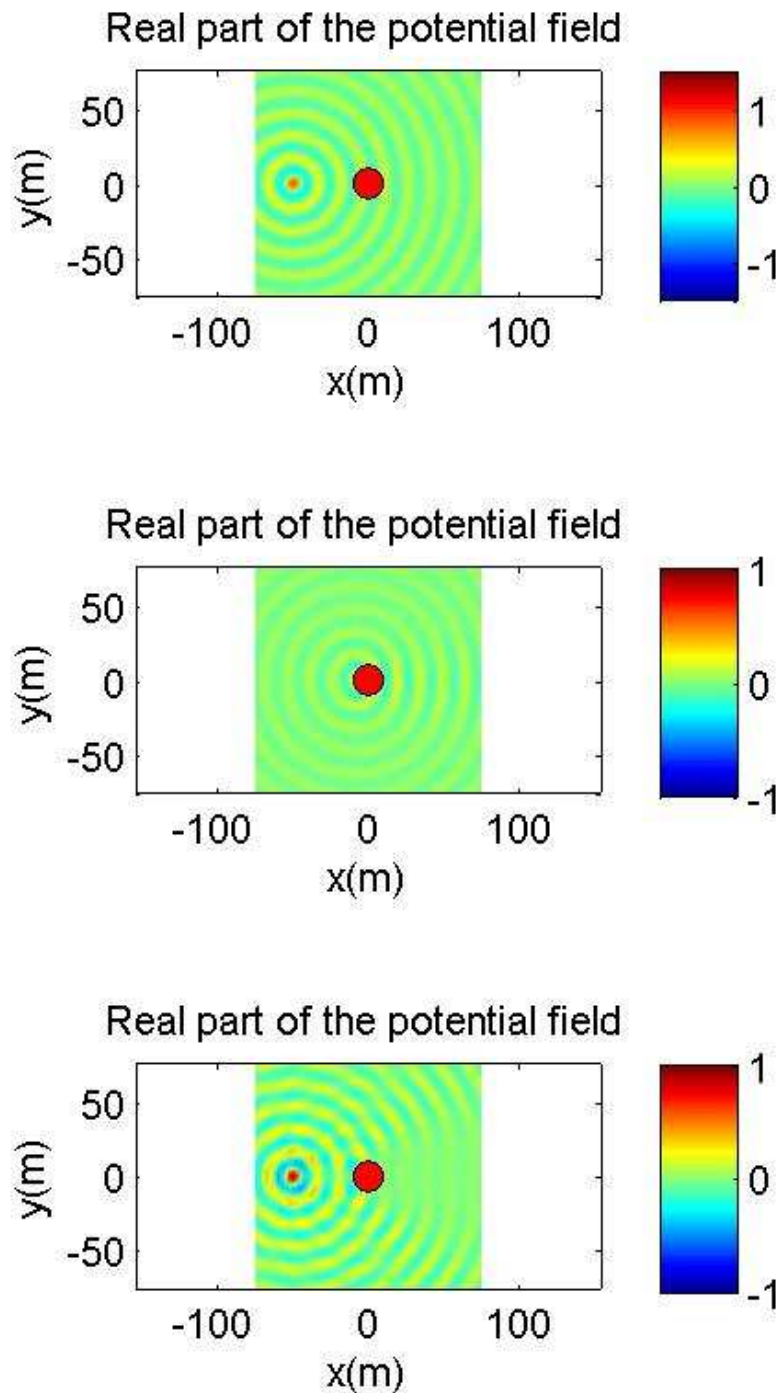
Αντίστοιχο παράδειγμα για σώματα γενικής μορφής παρουσιάζεται στο Σχήμα 25 για την περίπτωση επιπέδου παραλλήλου κύματος που προσπίπτει υπό γωνία στο σώμα (εικονίζεται μόνο το πραγματικό μέρος των υπολογιζόμενων πεδίων). Το παράδειγμα αυτό προσομοιάζει και την σκέδαση υδάτινων κυματισμών σε λωρίδα νερού σταθερού βάθους από κατασκευή με κατακόρυφα τοιχώματα η οποία εκτείνεται από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια.



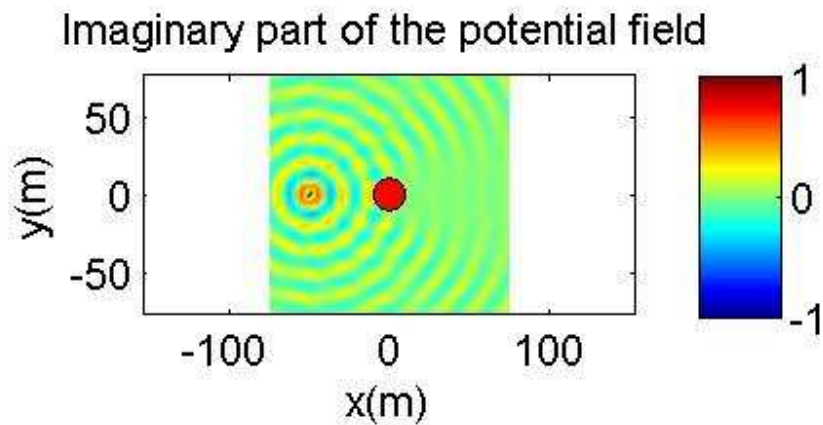
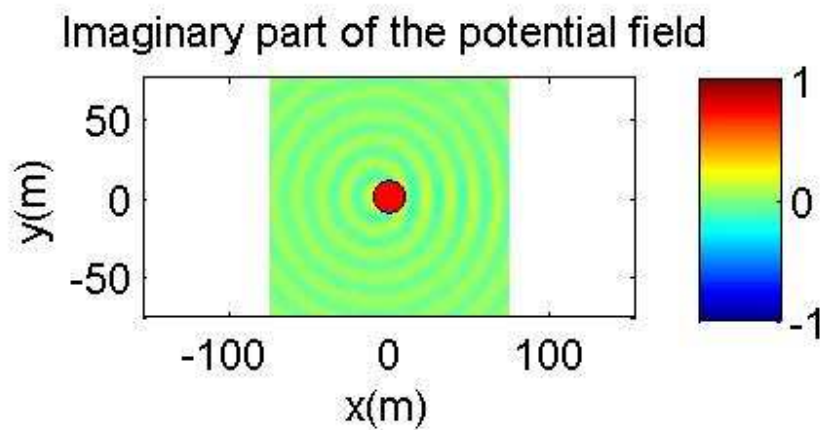
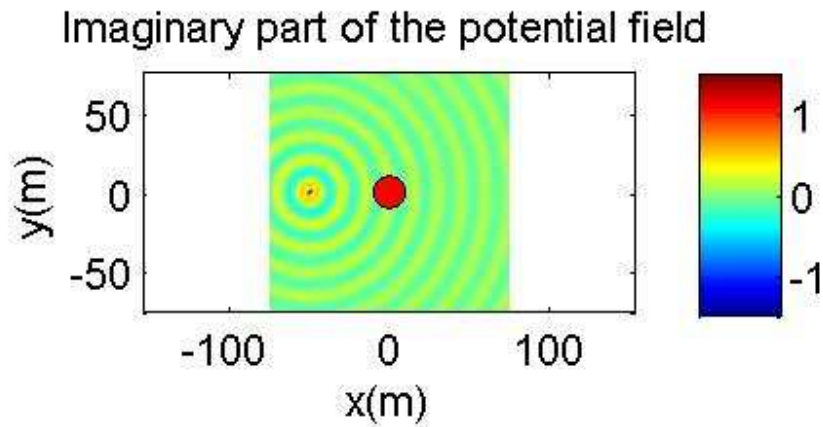
Σχήμα 19. Σύγκριση αναλυτικής λύσης (συνεχής γραμμή) με αριθμητική λύση (διακεκομμένη γραμμή με σύμβολα) για το πρόβλημα Dirichlet. Σκέδαση κύματος από σημειακή πηγή σε απόσταση 50 m από μαλακό κυκλικό σκεδαστή ακτίνας 10m (πρόβλημα Dirichlet). Συχνότητα $f=100\text{Hz}$.



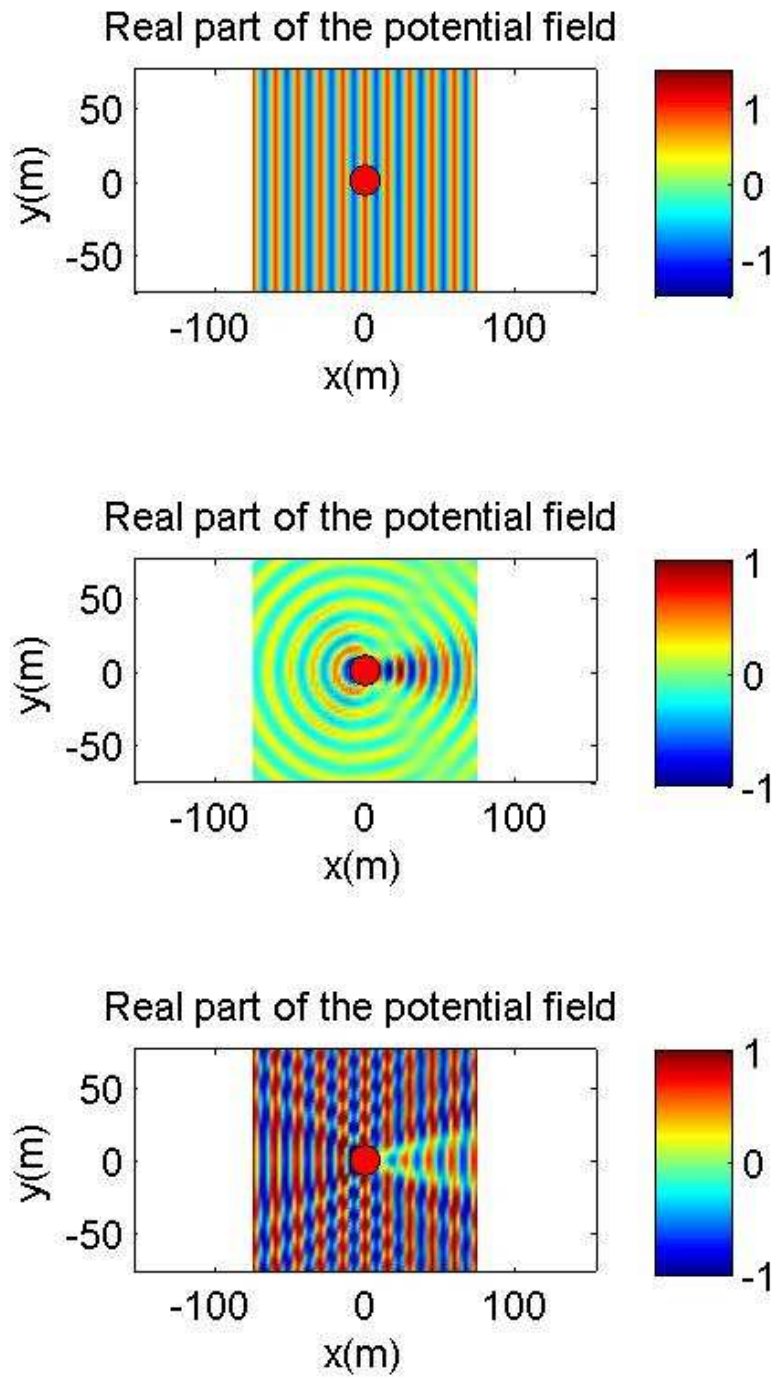
Σχήμα 20. Σύγκριση αναλυτικής (συνεχής γραμμή) με αριθμητική λύση (διακεκομμένη γραμμή με σύμβολα) για το πρόβλημα Neumann στην περίπτωση σκληρού κυκλικού σκεδαστή ακτίνας 10m (πρόβλημα Neumann) και παράλληλο προπίπτον κύμα. Συχνότητα $f=100\text{Hz}$.



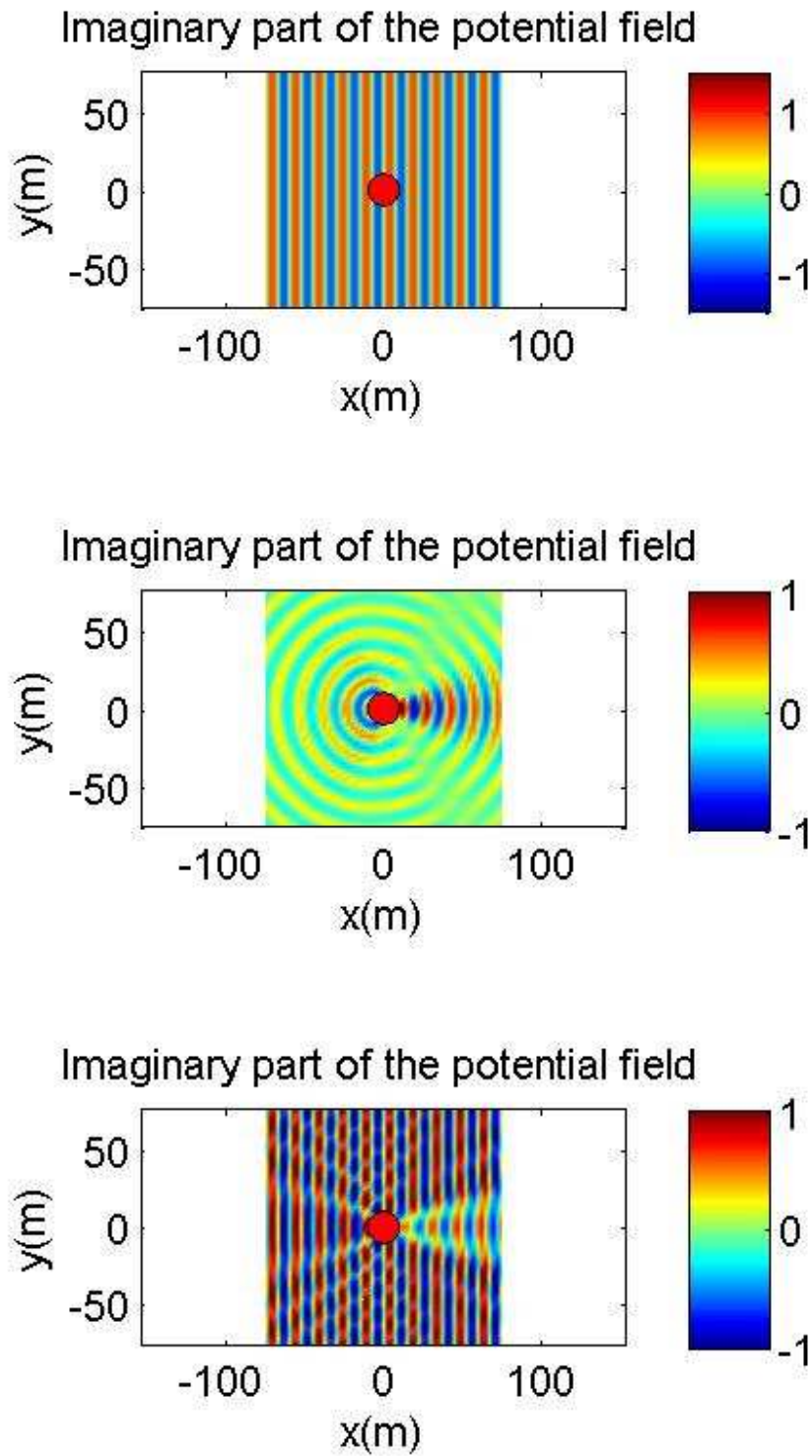
Σχήμα 21. Προσπίπτον πεδίο (κύμα από σημειακή πηγή σε απόσταση 50m από το κέντρο του σκεδαστή), σκεδαζόμενο πεδίο από μαλακό κυκλικό σκεδαστή, και συνολικό πεδίο. Συχνότητα $f=100\text{Hz}$. Πραγματικό μέρος.



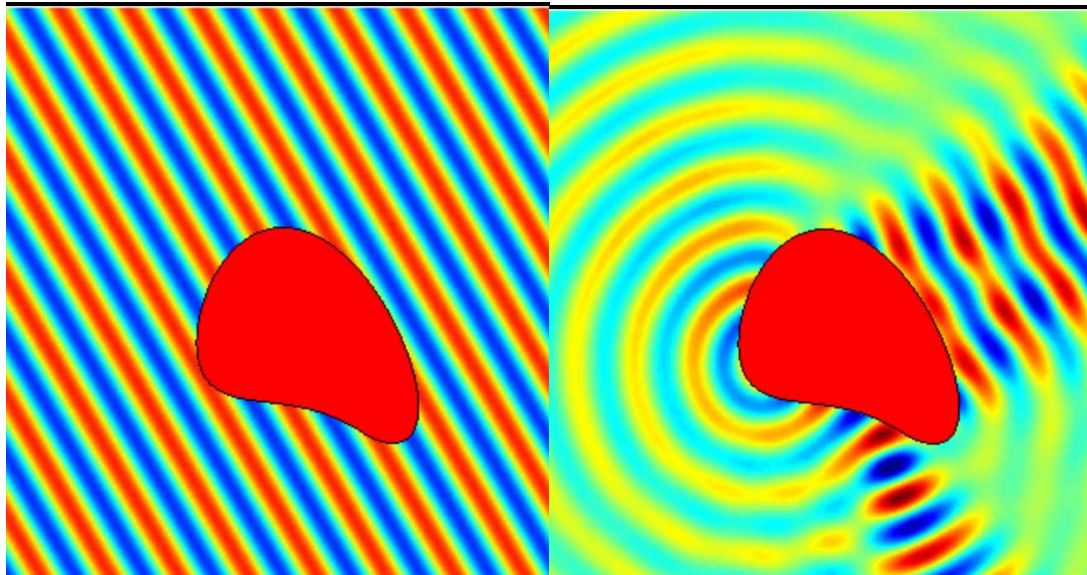
Σχήμα 22. Προσπίπτον πεδίο (κύμα από σημειακή πηγή σε απόσταση 50m από το κέντρο του σκεδαστή), σκεδαζόμενο πεδίο από μαλακό κυκλικό σκεδαστή, και συνολικό πεδίο. Συχνότητα $f=100\text{Hz}$. Φανταστικό μέρος.



Σχήμα 23. Προσπίπτον πεδίο (παράλληλο κύμα), σκεδαζόμενο πεδίο από μαλακό κυκλικό σκεδαστή, και συνολικό πεδίο. Συχνότητα $f=100\text{Hz}$. Πραγματικό μέρος.

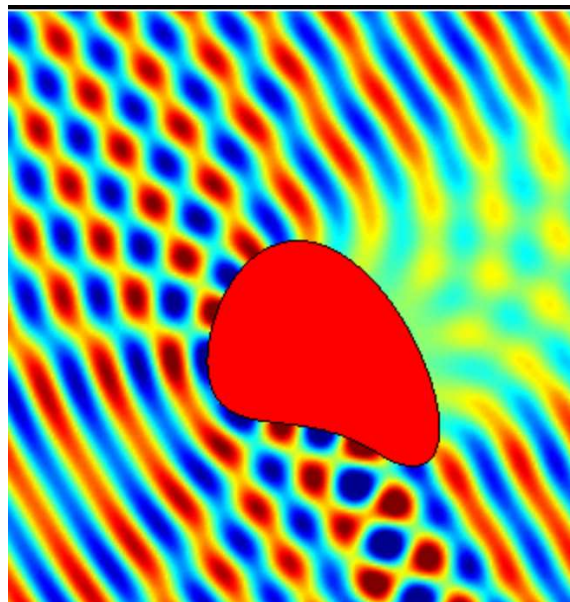


Σχήμα 24. Προσπίπτον πεδίο (παράλληλο κύμα), σκεδαζόμενο πεδίο από μαλακό κυκλικό σκεδαστή, και συνολικό πεδίο. Συχνότητα $f=100\text{Hz}$. Φανταστικό μέρος.



(α) προσπίπτον παράλληλο κύμα

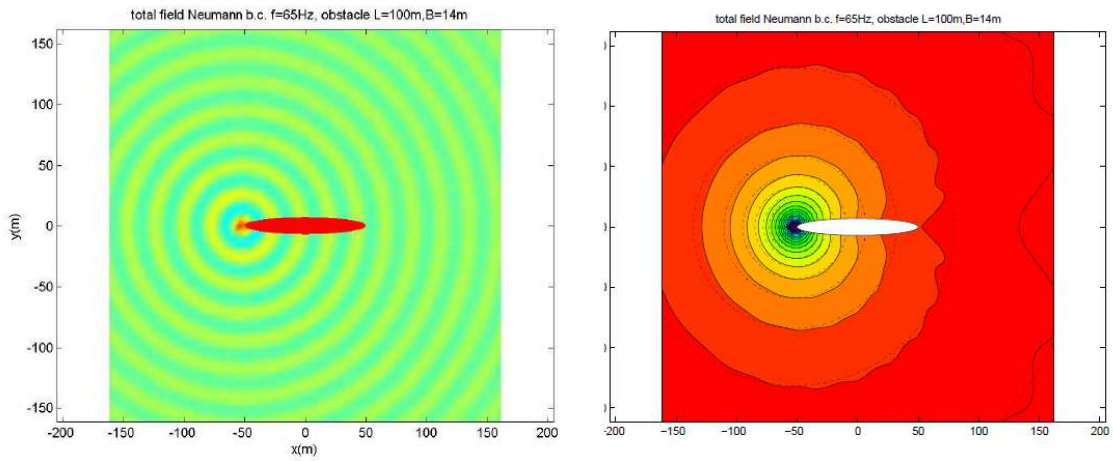
(β) σκεδαζόμενο πεδίο



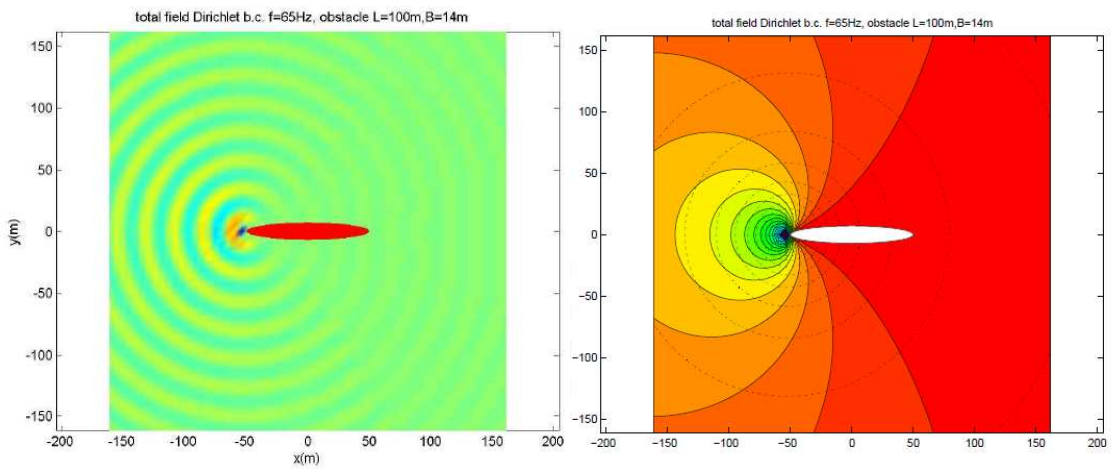
(γ) συνολικό πεδίο

Σχήμα 25. Προσπίπτον πεδίο (παράλληλο κύμα), σκεδαζόμενο πεδίο από σκεδαστή γενικού σχήματος, και συνολικό πεδίο, όπως υπολογίζεται από τη μέθοδο BEM.

Τέλος, άλλο ένα ενδιαφέρον παράδειγμα εικονίζεται στα Σχήματα 26 και 27 για την σκέδαση ακουστικού πεδίου από σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση του κέντρου του δίσκου της έλικας ενός υποβρυχίου, στην περίπτωση του προβλήματος Neumann (Σχ.26) και Dirichlet (Σχ.27). Παρατηρούμε ότι η κατανομή του συνολικού ακουστικού πεδίου αποκτά έντονη ανομοιογένεια λόγω της παρουσίας του σώματος.



Σχήμα 26. Σκεδαση πεδίου πηγής (π.χ. στη θέση του κέντρου της έλικας ενός AUV) από σκληρό ακουστικά σώμα ελλειπτικής μορφής .



Σχήμα 27. Σκεδαση πεδίου πηγής (π.χ. στη θέση του κέντρου της έλικας ενός AUV) από μαλακό ακουστικά σώμα ελλειπτικής μορφής .

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Abramowitz M., Stegun I.A., Abramowitz M., Stegun I.A., «Handbook of Mathematical Functions», Dover Publications, 1970.
2. Boyles C.A., «Acoustic Waveguides: Applications to Oceanic Science», John Wiley and Sons, 1984.
3. Brekhovskikh L.M., Lysanov Y.P., «Fundamentals of Ocean Acoustics», Springer-Verlag, 2003.
4. Clay, C.S., Medwin, H., Acoustics: An introduction to its physical principles and applications, Wiley-Interscience, 1997.
5. Colton D., Kress R., «Integral Equation Methods in Scattering Theory», Wiley, 1983.
6. Frisk G., «Ocean and seabed acoustics», Prentice Hall, 1994.
7. Jensen F.B., Kuperman W.W., Porter M.B., Schmidt H., «Computational Ocean Acoustics», AIP Press, 1994 (2nd Edition 2011).

Γενικές αρχές της κυματικής και εφαρμογές αυτών

- 3.1 Η Αρχή της υπέρθεσης (ή της επαλληλίας)
- 3.2 Η Αρχή των Huygens-Fresnel
- 3.3 Η Αρχή των Έρβωνος-Fermat
- 3.4 Επίλυση των εξισώσεων των ακτίνων
Εφαρμογές στην περιβαλλοντική ακουστική
- 3.5 Εφαρμογές των εξισώσεων των ακτίνων στη μελέτη της διάδοσης επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας σε ρηχή θάλασσα
- 3.6 Κώδικες επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων των ακτίνων

3.1 Η Αρχή της υπέρθεσης (ή της επαλληλίας)

3.1.1 Γενική διατύπωση

Η αρχή της υπέρθεσης (αναλυτικότερα, αρχή της γραμμικής υπέρθεσης) είναι μια εξαιρετικά σημαντική αρχή για τη μελέτη των κυμάτων⁽¹⁾, η οποία έχει το προνόμιο να δίδει πληροφορίες για το εξεταζόμενο φαινόμενο ακόμη και... όταν δεν ισχύει(!).

Η αρχή της γραμμικής υπέρθεσης "γεννήθηκε" από την παρατήρηση ότι τα κύματα μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να καταστραφούν ή να αλλοιωθούν, με την έννοια ότι μετά από αυτή τη διάβαση, εμφανίζονται και πάλι, και το καθένα συνεχίζει να διαδίδεται ως εάν δεν είχε υπάρξει το άλλο. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε κατ' αρχήν από τον Leonardo da Vinci (1452-1519), στα υδάτινα κύματα⁽²⁾. Η **αρχή της υπέρθεσης** είναι γενικότερη από την ανωτέρω διαπίστωση⁽³⁾, και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Δύο ή περισσότερες (ομοειδείς) κυματικές διαταραχές μπορούν να διαδοθούν στον ίδιο χώρο ανεξάρτητα η μια από την άλλη.

Το ακριβές (μαθηματικό) νόημα αυτής της διατύπωσης είναι ότι, εάν οι κυματικές διαταραχές

$$y_1(\mathbf{x}, t), \quad y_2(\mathbf{x}, t), \quad \dots, \quad y_N(\mathbf{x}, t)$$

διαδίδονται στην ίδια περιοχή D του χώρου, κατά το ίδιο χρονικό διάστημα I , τότε η συνολική διαταραχή $y(\mathbf{x}, t)$ που αναπτύσσεται (μετράται) στην περιοχή D , κατά το χρονικό διάστημα I , δίδεται από τη σχέση

$$y(\mathbf{x}, t) = y_1(\mathbf{x}, t) + y_2(\mathbf{x}, t) + \dots + y_N(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για βαθμωτά όσο και για διανυσματικά μεγέθη (όταν βέβαια ισχύει η αρχή της υπέρθεσης).

Η **αρχή της υπέρθεσης είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τη γραμμικότητα του αντιστοίχου κυματικού φαινομένου**. Υπό αυτή την έννοια μπορεί να διατυπωθεί και στην ακόλουθη μορφή, ως συνθήκη γραμμικότητας του φυσικού συστήματος:

Εάν κάθε μια από τις διεγέρσεις f_n , $n = 1, 2, \dots, N$, δημιουργεί (όταν δρα μόνο αυτή) την κυματική διαταραχή $y_n(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in D$, $t \in I$, τότε η διέγερση

⁽¹⁾ Αλλά και κάθε είδους στατικών και δυναμικών φαινομένων.

⁽²⁾ Η πειραματική επαλήθευση του φαινομένου στην περίπτωση των υδατινών κυμάτων είναι πολύ εύκολη. Δεν χρειάζεται παρά να ρίξετε δύο πέτρες (σε κάποια λογική απόσταση μεταξύ τους) σε ήρεμη θάλασσα, και να παρατηρήσετε τη διάδοση και την αλληλεπίδραση των αποκλινόντων κυλινδρικών κυμάτων που δημιουργού-νται.

⁽³⁾ Η οποία, σημειωτέον, ισχύει και σε ορισμένες περιπτώσεις μη-γραμμικών κυμάτων, όπου δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης με τη γενική διατύπωση η οποία δίδεται στη συνέχεια.

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_N f_N, \quad \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \quad (2\alpha)$$

η οποία προκύπτει από ταυτόχρονη δράση των επί μέρους διεγέρσεων (επί τους αντιστοίχους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες) δημιουργεί την κυματική διαταραχή

$$y(\mathbf{x}, t) = \alpha_1 y_1(\mathbf{x}, t) + \alpha_2 y_2(\mathbf{x}, t) + \dots + \alpha_N y_N(\mathbf{x}, t). \quad (2\beta)$$

Πρέπει να τονισθεί ότι η αρχή της υπέρθεσης *δεν ισχύει για όλα τα κυματικά φαινόμενα*. (Ισοδυνάμως: *δεν είναι όλα τα κυματικά φαινόμενα γραμμικά*). Η μη-ισχύς της αρχής της υπέρθεσης μας δίνει λοιπόν την (πολύ σημαντική) πληροφορία ότι το αντίστοιχο φαινόμενο είναι μη-γραμμικό. Γι' αυτό το λόγο αναφέραμε στην αρχή ότι η αρχή αυτή "... δίνει πληροφορίες για το εξεταζόμενο φαινόμενο ακόμη και... όταν δεν ισχύει".

3.1.2 Εύρος ισχύος της αρχής της υπέρθεσης

Κατά κανόνα, κάθε φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί (κατά προσέγγιση) γραμμικό, εφ' όσον η αντίστοιχη διαταραχή παραμένει επαρκώς μικρή. Επί παραδείγματι, τα υδάτινα κύματα μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά, εφ' όσον η κλίση θ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού παραμένει μικρή ($\theta(\text{rad}) \ll 1$). Επίσης, τα ακουστικά και τα ελαστικά κύματα μπορούν να θεωρηθούν γραμμικά, εφ' όσον οι αντίστοιχες διαταραχές είναι αρκετά μικρού εύρους (ώστε να αποφεύγεται η γεωμετρική μη-γραμμικότητα) και, ταυτόχρονα, ισχύει ο νόμος αναλογίας τάσεων παραμορφώσεων (νόμος Hooke)⁽⁴⁾.

Ορισμένα κυματικά φαινόμενα θεωρούνται *εγγενώς γραμμικά*. Αυτό σημαίνει ότι οι φυσικοί νόμοι (άρα και οι μαθηματικές εξισώσεις) που διέπουν τα φαινόμενα αυτά είναι γραμμικοί στην πλήρη διατύπωσή τους, και δεν προκύπτουν με γραμμικοποίηση άλλων, γενικότερων, νόμων. Τέτοια είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό (όχι όμως σε διηλεκτρικά μέσα!), καθώς και τα κύματα πιθανότητας στην κβαντομηχανική.

Τα υδάτινα, τα ακουστικά, τα ελαστικά και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (τα τελευταία όταν διαδίδονται σε διηλεκτρικά μέσα), εμφανίζουν απόκλιση από την αρχή της υπέρθεσης, εφ' όσον το εύρος της διαταραχής είναι σχετικά μεγάλο. Η *επίδραση της μη-γραμμικότητας* μπορεί να είναι είτε *ασθενής* (οπότε η προκύπτουσα κυματική διαταραχή αφίσταται ελαφρά από την αναμενόμενη μέσω της αρχής της υπέρθεσης), είτε *ισχυρά* (οπότε εμφανίζονται τελείως καινούργιοι χαρακτήρες, οι οποίοι ουδεμία σχέση έχουν με ότι αναμένεται βάσει της αρχής της υπέρθεσης). Παραδείγματα ισχυρώς μη-γραμμικών φαινομένων, ποιοτικά διαφορετικών απ' ότι αναμένεται βάσει της αρχής της υπέρθεσης, είναι: η θραύση των υδατίνων κυμάτων, η ηλεκτρική εκκένωση στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, και η κατάρρευση (θραύση) των στερεών σωμάτων δια της οποίας διαδίδονται ελαστικά κύματα μεγάλου εύρους.

⁽⁴⁾ Ο οποίος, κατά κανόνα, ισχύει στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων.

3.1.3 Μαθηματικές συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης

Για να συζητήσουμε τις μαθηματικές συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης είναι σκόπιμο να δώσουμε μια γενική αναπαράσταση των κυματικών εξισώσεων που είναι συμβατές με αυτήν (δηλαδή, των γραμμικών κυματικών εξισώσεων). Χωρίς να επιδιώξουμε "απόλυτη" γενικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια αρκετά γενική μορφή γραμμικής κυματικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη⁽⁵⁾

$$P\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3}\right)y(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

όπου $P(z_0, z_1, z_2, z_3)$ είναι πολυώνυμο ως προς z_0, z_1, z_2, z_3 , με συντελεστές γνωστές συναρτήσεις των \mathbf{x} και t , οι οποίες δεν εξαρτώνται κατά κανένα τρόπο (άμεσο ή έμμεσο) από το άγνωστο πεδίο $y = y(\mathbf{x}, t)$ ⁽⁶⁾. Οι δυνάμεις των ορισμάτων του πολυωνύμου P ερμηνεύονται ως παράγωγοι αντιστοίχου τάξεως. Επί παραδείγματι, εάν το αντιπροσωπευτικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$P(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0^2 - a_1^2 z_1^2 - a_2^2 z_2^2 - a_3^2 z_3^2,$$

τότε το αριστερά μέλος της (1) παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{\partial^2 \bullet}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_1^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_2^2} - a_3^2 \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_3^2}\right)y(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - a_3^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2},$$

και άρα η εξίσωση (1) γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - a_3^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} = f(\mathbf{x}, t),$$

η οποία αποτελεί μια γενίκευση της εξίσωσης D' Alembert (και ταυτίζεται με την τελευταία όταν $a_1 = a_2 = a_3 = \sigma\alpha\theta$).

Οι ποσότητες a_i , $i = 1, 2, 3$, μπορεί να είναι σταθερές ή συναρτήσεις των \mathbf{x}, t , πρέπει όμως να είναι ανεξάρτητες του άγνωστου κυματικού πεδίου $y(\mathbf{x}, t)$.

Μια εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα της εξίσωσης (1) είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 1: Εάν η διέγερση $f(\mathbf{x}, t)$ της εξίσωσης (1) είναι χρονικά αρμονική με κυκλική συχνότητα ω , δηλαδή εάν

⁽⁵⁾ Η μορφή αυτή δεν καλύπτει μη-τοπικές επιδράσεις, οι οποίες μοντελοποιούνται με τη μορφή ολοκληρωτικών όρων και οδηγούν σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Παρ' όλα αυτά, τα συμπεράσματα του παρόντος υποεδαφίου ισχύουν και σε αυτές τις περιπτώσεις.

⁽⁶⁾ Η εξίσωση (1) θεωρείται, χάριν απλότητας, βαθμωτή. Εν τούτοις, όλες οι συνέπειες οι οποίες αναπτύσσονται στη συνέχεια αυτού του υποεδαφίου ισχύουν εξ ίσου και στην περίπτωση διανυσματικών κυματικών εξισώσεων, δηλαδή συστημάτων εξισώσεων της μορφής (1).

$$f(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\}, \quad (2)$$

όπου $j = \sqrt{-1}$ είναι η μιγαδική μονάδα, τότε και η απόκριση $y(\mathbf{x}, t)$ είναι χρονικά αρμονική με την ίδια κυκλική συχνότητα ω . ■

Η ανωτέρω πρόταση αποδεικνύεται ως εξής. Αναζητούμε λύση της εξίσωσης (1) της μορφής

$$y(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{y}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\}. \quad (3)$$

Εισάγοντας την τελευταία στην (1), έχουμε

$$\begin{aligned} P \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \right) \cdot \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{y}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\} &= \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\} \\ \Leftrightarrow \text{Re} \left\{ P \left((-j\omega), \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \right) \cdot \overset{\circ}{y}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\} &= \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} \right\}. \end{aligned}$$

Αγνοώντας τα $\text{Re} \{ \}$, παίρνουμε

$$P \left((-j\omega), \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \right) \cdot \overset{\circ}{y}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\} = \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) \cdot \exp\{-j\omega t\},$$

εκ της οποίας, απαλείφοντας τον εκθετικό όρο (ο οποίος είναι πάντοτε διάφορος του μηδενός), καταλήγουμε στην ακόλουθη (ανεξάρτητη του χρόνου) εξίσωση

$$P \left((-j\omega), \frac{\partial \bullet}{\partial x_1}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_2}, \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \right) \cdot \overset{\circ}{y}(\mathbf{x}) = \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Η τελευταία είναι μια (μερική) γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τις χωρικές μεταβλητές, η λύση της οποίας προσδιορίζει το άγνωστο πεδίο $\overset{\circ}{y}(\mathbf{x})$. Τότε, η σχέση (3) ορίζει μια λύση της (1) η οποία ικανοποιεί τις επιθυμητές απαιτήσεις, είναι δηλαδή χρονικά αρμονική με κυκλική συχνότητα ω . Κατά κανόνα η εξίσωση (4) δέχεται μοναδική λύση, οπότε η (3) ορίζει τότε την λύση του προβλήματος (1), στην περίπτωση χρονικά αρμονικής διέγερσης της μορφής (2). Ας σημειωθεί ότι η απόδειξη **θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας** της λύσης της εξίσωσης (4) είναι συχνά μια δύσκολη υπόθεση, η οποία απαιτεί ειδική μελέτη κατά περίπτωση.

Άμεση συνέπεια της αρχής της υπέρθεσης και της Πρότασης 1 είναι η ακόλουθη

Πρόταση 2: Εάν η διέγερση $f(\mathbf{x}, t)$ της εξίσωσης (1) είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο T , τότε και το παραγόμενο κυματικό πεδίο (απόκριση) $y(\mathbf{x}, t)$ θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με την ίδια περίοδο T . ■

Η απόδειξη βασίζεται στην ανάλυση της διέγερσης σε σειρά Fourier (ως προς το χρόνο), την εφαρμογή της Προτάσεως 1 για κάθε όρο της σειράς Fourier της διέγερσης, και την εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης για την κατασκευή της τελικής λύσης.

Γενικώς, η ισχύς της αρχής της υπέρθεσης επιτρέπει την ανάλυση ενός περίπλοκου κυματικού φαινομένου σε απλά στοιχειώδη κύματα (π.χ., με τη βοήθεια σειρών ή ολοκληρωμάτων Fourier), τη μελέτη των επί μέρους απλούστερων προβλημάτων και, τέλος, τη σύνθεση της λύσης του αρχικού προβλήματος με γραμμική υπέρθεση. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται ευρύτατα στη μελέτη των γραμμικών κυματικών φαινομένων.

3.2 Η Αρχή των Huygens-Fresnel

3.2.1 Ιστορική διατύπωση

Η *αρχή του Huygens* διατυπώθηκε από τον Ολλανδό φυσικό, αστρονόμο και μαθηματικό Christian Huygens⁽¹⁾ το 1678 (δημοσιεύθηκε όμως το 1690, στο βιβλίο του *Traité de la Lumière*), ως ερμηνευτική αρχή για τη διάδοση του φωτός. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε εδώ ότι εκείνη την εποχή η ηλεκτρομαγνητική φύση του φωτός δεν ήταν γνωστή (αφού η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell εμφανίσθηκε περίπου δύο αιώνες αργότερα!). Η αρχή του Huygens είναι ανεξάρτητη από την ειδικότερη φύση (τη δυναμική) του κυματικού φαινομένου, και *ισχύει σχεδόν για όλα τα κυματικά φαινόμενα*.

Η αρχή του Huygens προϋποθέτει μόνο την (γεωμετρικού-κινηματικού χαρακτήρα) έννοια του *μετώπου κύματος*, η οποία συζητήθηκε στο εδάφιο 2.1.3. Μια εκτενής διατύπωση της αρχής του Huygens (στην οποία περιγράφεται αναλυτικά η κατασκευή του Huygens) είναι η ακόλουθη:

Αν γνωρίζουμε το μέτωπο κύματος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t , η νέα θέση του μετώπου κύματος στη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, βρίσκεται ως εξής: Σχεδιάζουμε μικρές σφαίρες με κέντρα τα σημεία του μετώπου κύματος στη χρονική στιγμή t , και ακτίνες $r = c \cdot \Delta t$, όπου c είναι η (τοπική) ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Το νέο μέτωπο κύματος είναι η περιβάλλουσα επιφάνεια αυτών των σφαιρών (προς την κατεύθυνση όπου πράγματι διαδίδεται το κύμα, όχι την αντίθετη!).

Παρατήρηση 1: Η ταχύτητα c με την οποία διαδίδεται η κυματική διαταραχή μπορεί να μεταβάλλεται με τη θέση στο χώρο ή, ακόμη, και με το χρόνο! Δηλαδή, η αρχή του Huygens εφαρμόζεται τόσο σε ομογενή μέσα ($c = \text{σταθερή}$), όσο και σε

ανομοιογενή μέσα, είτε χρονικά αμετάβλητα ($c = c(\mathbf{x}) = c(x, y, z)$), είτε χρονικά μεταβαλλόμενα ($c = c(\mathbf{x}, t) = c(x, y, z, t)$).

Παρατήρηση 2: Η αρχή του Huygens, όπως διατυπώθηκε ανωτέρω, εφαρμόζεται στην περίπτωση κυματικής διάδοσης στο πεδίο του χρόνου. Η αρχή εξακολουθεί να ισχύει και στο πεδίο συχνοτήτων (περίπτωση περιοδικής κυματικής κίνησης), υπό την προϋπόθεση ότι θα αντικαταστήσουμε το **μέτωπο κύματος** (έννοια που έχει σαφές νόημα στο πεδίο του χρόνου) (πρόβλημα αρχικών τιμών) με την **ισοφασική επιφάνεια** (έννοια που έχει σαφές νόημα στο πεδίο συχνοτήτων). Βλ. σχετικά και εδάφιο 2.1.3. Η επέκταση της αρχής στο πεδίο συχνοτήτων (περιοδικά κύματα) έγινε από τον Fresnel το 1818, ο οποίος, για την εργασία του αυτή βραβεύθηκε από τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών. Και ο Fresnel (όπως και ο Huygens) αναφερόταν στη μελέτη της διάδοσης του φωτός στα πλαίσια της υπόθεσης του αιθέρα. Λόγω της συμβολής του Fresnel, η αρχή ονομάζεται συχνά και **αρχή των Huygens-Fresnel**.

Παρατήρηση 3: Οι μικρές σφαίρες που θεωρούμε (σχεδιάζουμε) με κέντρα πάνω στη στιγμιαία θέση του μετώπου κύματος ονομάζονται **κυματίδια** (wavelets). Κάθε κυματίδιο είναι ένα (υποθετικό) δευτερογενές κύμα, το οποίο υποτίθεται ότι "εκπέμπεται" από το αντίστοιχο σημείο του μετώπου κύματος. Με βάση αυτή τη θεώρηση, η αρχή του Huygens μπορεί να διατυπωθεί συνοπτικά ως εξής:

Η κυματική διαταραχή διαδίδεται στο χώρο ως εάν κάθε σημείο του (στιγμιαίου) μετώπου κύματος ήτο μια (υποθετική) δευτερογενής πηγή κύματος. Το κάθε κυματίδιο διαδίδεται με την τοπική ταχύτητα διάδοσης.

(1)



Christian Huygens (1629-1695). Ολλανδός φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός. Εκτός από τη σημαντική συνεισφορά του στη μηχανική (υπολόγισε την περίοδο των ταλαντώσεων του εκκρεμούς και μελέτησε την περιστροφική κίνηση), πραγματοποίησε σπουδαίες αστρονομικές παρατηρήσεις (ανακάλυψε έναν δορυφόρο του Κρόνου και διαπίστωσε την πραγματική μορφή των δακτυλίων αυτού του πλανήτη με τη βοήθεια τηλεσκοπίων που βελτίωσε ο ίδιος), και κυρίως- τελειοποίησε και επεξέτεινε την κυματική θεωρία του φωτός, η οποία, είχε προταθεί από τον Hooke. Η ομώνυμη αρχή διατυπώθηκε μάλλον πριν από το 1678, δημοσιεύθηκε όμως το 1690, στο έργο του *Traité de la Lumière*. Στο έργο αυτό ο Huygens επισημαίνει την ανάγκη χρησιμοποίησης κατάλληλης μηχανικής ερμηνείας για την περιγραφή των φαινομένων που σχετίζονται με τη διάδοση του φωτός, και εισάγει την ομώνυμη αρχή, ως ερμηνευτική αρχή μηχανικού

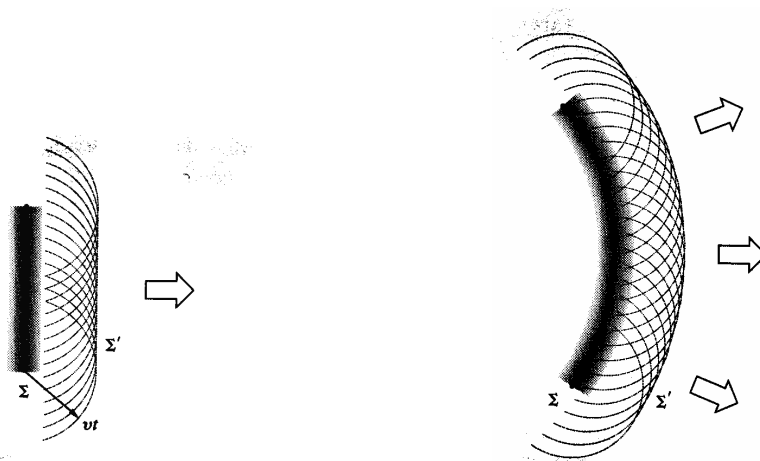
χαρακτήρα (σε συνδυασμό με την υπόθεση του αιθέρα). Με τη βοήθεια της αρχής αυτής έδωσε εξαιρετικά ικανοποιητικές ερμηνείες των (γνωστών) νόμων της ανάκλασης και της διάθλασης του φωτός.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η κοινωνική όψη της ζωής του Christian Huygens. Καταγόταν από πλούσια και διακεκριμένη οικογένεια της μεσαιάς τάξης. Ο πατέρας του, Constantijn Huygens ήταν διπλωμάτης, λατινιστής και ποιητής, και υπήρξε φίλος πολλών προσωπικοτήτων της εποχής του, όπως ήταν ο Descart (Καρτέσιος). Ο Christian Huygens σπούδασε Μαθηματικά και Δίκαιο στο Πανεπιστήμιο του Leyden, στο οποίο έγινε δεκτός το 1645. Επισκέφθηκε για πρώτη φορά το Παρίσι το 1655, και αργότερα έζησε εκεί επί 15 έτη (1666-1681). Ήταν ένα από τα ιδρυτικά μέλη της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών (1666). Κατά τη διάρκεια της ζωής του γνώρισε τον Descart (Καρτέσιο), τον Pascal και τον Leibnitz (με τους οποίους διατήρησε φιλικές σχέσεις για πολλά χρόνια), καθώς και τον Newton, τον οποίον συνάντησε το 1689, όταν επισκέφθηκε το Λονδίνο.

3.2.2 Απλές εφαρμογές

Η αρχή (κατασκευή) του Huygens είναι ένας συστηματικός τρόπος (αλγόριθμος) με τον οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε (και να προβλέψουμε) την κινηματική της κυματικής διάδοσης, δηλαδή το πώς εξελίσσεται στο χρόνο το μέτωπο κύματος, όταν γνωρίζουμε το πεδίο $c(x,t)$ της ταχύτητας διάδοσης του κύματος, στις δύο και στις τρεις διαστάσεις. (Στη μία διάσταση η αρχή του Huygens καθίσταται τετριμμένη). Δεν μας δίνει όμως πληροφορίες για την ένταση της κυματικής διαταραχής, η μελέτη της οποίας απαιτείται και χρήση των δυναμικών νόμων (εξισώσεων) του κυματικού φαινομένου. Πριν προχωρήσουμε τη συζήτησή μας επί της αρχής του Huygens, θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής της.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται πως εφαρμόζεται η αρχή (κατασκευή) του Huygens σ' ένα επίπεδο και ένα σφαιρικό κύμα που διαδίδονται σε ομογενές μέσο. Η ταχύτητα διάδοσης σ' αυτά τα δύο παραδείγματα είναι $c = \text{σταθερή}$, και συνεπώς η ακτίνα όλων των κυματιδίων είναι ίση. Κατά



Σχήμα 1 (3.2): Εφαρμογή της αρχής του Huygens σε επίπεδο και σφαιρικό κύμα, σε ομογενές μέσο.

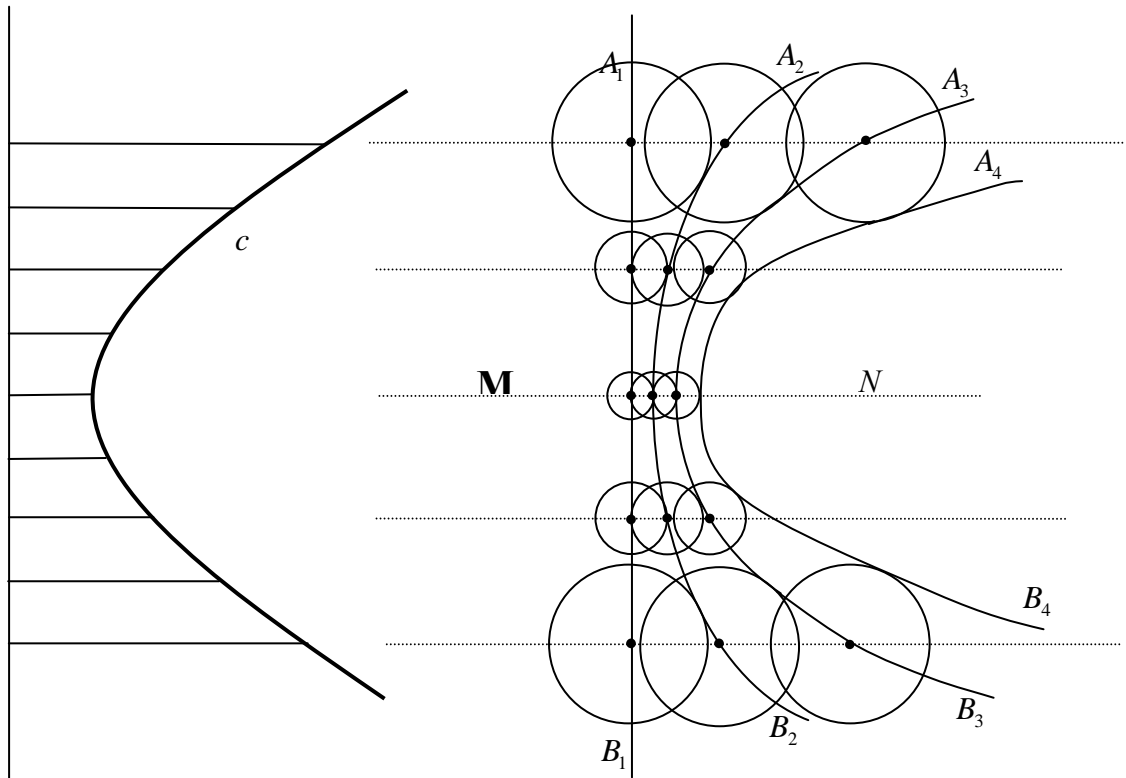
συνέπεια, στην περίπτωση, αυτή, η αρχή του Huygens μας λέει ότι το επίπεδο κύμα παραμένει επίπεδο, και το σφαιρικό κύμα παραμένει σφαιρικό. Οι **ακτίνες διάδοσης** (που είναι γραμμές κάθετες στο μέτωπο κύματος) είναι παράλληλες ευθείες στην περίπτωση του επιπέδου κύματος, και αποκλίνουσες ευθείες στην περίπτωση του σφαιρικού κύματος. Τα κυματίδια του Σχήματος 1 (θεωρούμενα ως πλήρες σφαίρες) έχουν δύο περιβάλλουσες επιφάνειες, μία μέσα στο χώρο απ' όπου έχει ήδη διαδοθεί (περάσει) το κύμα, και μια έξω από αυτόν. Προφανώς, η δεύτερη επιφάνεια είναι η κατάλληλη για το πρόβλημά μας. Η πρώτη επιφάνεια θα ήταν κατάλληλη αν είχαμε κύμα διαδιδόμενο προς την αντίθετη κατεύθυνση, πράγμα που είναι, βέβαια, δυνατόν.

Η αρχή του Huygens δεν "επαληθεύει" μόνο τετριμμένα αποτελέσματα, όπως αυτά του Σχήματος 1. Μπορεί επίσης να παράγει αποτελέσματα, τα οποία δεν είναι καθόλου προφανή εκ πρώτης όψεως. Ένα τέτοιο παράδειγμα, όπου η αρχή του Huygens εφαρμόζεται στην περίπτωση κυματικής διάδοσης σε ανομοιογενές μέσο, εξετάζεται αναλυτικά στο επόμενο υποεδάφιο. Στο παραδείγμα αυτό η ταχύτητα διάδοσης μεταβάλλεται γραμμικά ως προς z . Τότε, ένα αρχικά ευθύγραμμο μέτωπο κύματος παραμένει ευθύγραμμο, διερχόμενο διαρκώς δι' ενός σταθερού σημείου.

Άρα, οι ακτίνες διάδοσης διαγράφουν τόξα κύκλου! Το αποτέλεσμα αυτό θα το βρούμε και με τη βοήθεια της αρχής του Fermat (Θεωρία ακτίνων) στο εδάφιο 3.3.

Ένα ακόμη γενικό χαρακτηριστικό κάθε κυματικής διάδοσης, το οποίο συνάγεται πολύ εύκολα με τη βοήθεια της αρχής του Huygens, είναι το ακόλουθο:

Σε ανομοιογενή μέσα, το μέτωπο του κύματος (και άρα και οι ακτίνες διάδοσης) στρέφεται προς (συγκλίνουν προς) περιοχές όπου η ταχύτητα διάδοσης εμφανίζει τοπικό ελάχιστο.



Σχήμα 2 (3.2): Εφαρμογή της αρχής του Huygens σε αρχικά επίπεδο κύμα, διαδιδόμενο σε ανομοιογενές μέσο.

Η απόδειξη της ανωτέρω προτάσεως προκύπτει αμέσως με τη βοήθεια της κατασκευής Huygens, όπως αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Δεδομένου ότι τα κυματίδια έχουν μεγαλύτερη ακτίνα στα σημεία όπου η ταχύτητα διάδοσης είναι μεγαλύτερη, η περιβάλλουσα αυτών καμπλώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα σημεία της να πλησιάζουν προς την περιοχή όπου η ταχύτητα διάδοσης παρουσιάζει ελάχιστο (ευθεία MN στο Σχήμα 2).

Όπως θα δούμε σε επόμενα εδάφια, η κατασκευή του Huygens μας επιτρέπει να εξάγουμε τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης, και να μελετήσουμε ποιοτικά τα φαινόμενα της περίθλασης και της συμβολής (με τη βοήθεια της επέκτασης του Fresnel).

3.2.4 Η Αρχή του Huygens στα πλαίσια της σύγχρονης μαθηματικής φυσικής

Παρά το ότι τόσο ο Huygens όσο και Fresnel διετύπωσαν την ομώνυμη αρχή στα πλαίσια της μελέτης της διάδοσης του φωτός⁽⁷⁾, οι διατυπώσεις τους σήμερα θεωρούνται ως μαθηματικές προτάσεις των οποίων η ισχύς πρέπει να αποδειχθεί (ή να διαψευσθεί) με τη βοήθεια των αντιστοιχών κυματικών εξισώσεων που διέπουν τα διάφορα φαινόμενα. Η απαρχή της σύγχρονης θεώρησης της αρχής του Huygens (ως μαθηματικού ερωτήματος) ανάγεται στον J. Hadamard. Η συμβολή του, που έγινε στη δεύτερη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα, παρουσιάζεται εκτενώς στη δημοσίευσή του *Le Principe de Huygens* (Bull. de la Soc. Math. de France, Vol. 52, 1924, pp. 610-640), και συνοψίζεται στο βιβλίο του *Lectures on Cauchy's Problem* (Yale, 1924). Ο Hadamard επαναδιατυπώνει προσεκτικά την αρχή του Huygens αναλύοντας την σε τρία σκέλη, δύο υποθέσεις και ένα συμπέρασμα, ως εξής:

A. (Βασική υπόθεση): Προκειμένου να προσδιορίσουμε ένα φωτεινό σήμα (κύμα) στη χρονική στιγμή $t = t_1$, το οποίο παρήχθη από μια αρχική διέγερση στη χρονική στιγμή $t = t_0 < t_1$, μπορούμε να προσδιορίσουμε πρώτα το κύμα σε μια ενδιάμεση χρονική στιγμή $t = t'$, $t_0 < t' < t_1$, και από αυτό να υπολογίσουμε το κύμα τη χρονική στιγμή $t = t_1$.

B. (Δευτερεύουσα υπόθεση): Εάν κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$ (ή, ακριβέστερα, κατά το μικρό χρονικό διάστημα $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$) προκαλέσουμε μια φωτεινή διαταραχή (αρχική διέγερση) εντοπισμένη στη γειτονιά ενός σημείου O , τότε η διαταραχή αυτή σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή $t = t'$ θα παραμένει εντοπισμένη σε ένα πολύ λεπτό σφαιρικό κέλυφος, με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $c(t' - t_0)$, όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (του κύματος).

C. (Συμπέρασμα): Προκειμένου να προσδιορίσουμε ένα φωτεινό σήμα (κύμα) στη χρονική στιγμή $t = t_1$, το οποίο παρήχθη από μια αρχική διέγερση εντοπισμένη στη γειτονιά ενός σημείου O στη χρονική στιγμή $t = t_0 < t_1$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αρχική διαταραχή από ένα κατάλληλο σύστημα διαταραχών (διεγέρσεων) οι οποίες εμφανίζονται σε μια ενδιάμεση χρονική στιγμή $t = t'$, $t_0 < t' < t_1$, πάνω σε μια σφαίρα με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $c(t' - t_0)$.

Το πρώτο σκέλος είναι φιλοσοφικού χαρακτήρα μάλλον, και εκφράζει την αρχή της αιτιότητας (causality principle) για την κυματική διάδοση. Το δεύτερο και το τρίτο σκέλος είναι μαθηματικές προτάσεις, η ισχύς των οποίων πρέπει να αποδειχθεί (ή να διαψευσθεί) σε αναφορά με τις εξισώσεις που διέπουν τα εξεταζόμενα φαινόμενα. Πρέπει όμως να σημειωθεί εδώ ότι τα σκέλη **B** και **C** είναι διατυπωμένα (από τον Hadamard) κατά τρόπο που έχει νόημα μόνο για την περίπτωση σταθερής ταχύτητας διάδοσης. Κατά συνέπεια, η διατύπωση της αρχής του Huygens κατά Hadamard είναι μεν περισσότερο ακριβής και επιδέχεται συστηματική μαθηματική επεξεργασία (απόδειξη ή διάψευση), δεν καλύπτει όμως το εύρος των φαινομένων τα οποία καλύπτει η αρχική διατύπωση του Huygens.

⁽⁷⁾ Γι' αυτό το λόγο η αρχή αυτή αναφέρεται συνήθως ως αρχή της κυματικής οπτικής.

Η μαθηματική ανάλυση των προτάσεων **B** και **C**, ανωτέρω, απαιτεί, βεβαίως, την αναφορά σε συγκεκριμένη κυματική εξίσωση (ή σύστημα εξισώσεων), καθώς και την ύπαρξη μεθόδων λύσεως των εξισώσεων αυτών. Σε σχέση με τη "κλασική" κυματική εξίσωση, δηλαδή την εξίσωση D'Alembert στο πεδίο του χρόνου,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

και την εξ αυτής προκύπτουσα εξίσωση Helmholtz στο πεδίο συχνοτήτων

$$\Delta u + k^2 \cdot u = 0,$$

όπου $c = \text{σταθ.}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης, $k = \text{σταθ.}$ είναι ο κυματικός αριθμός, και $\Delta \bullet$ είναι ο τελεστής Laplace στις δύο ή τρεις διαστάσεις⁽⁸⁾, η κατάσταση μπορεί να συνοψισθεί ως ακολούθως.

Γενικές λύσεις των ανωτέρω κυματικών εξισώσεων στον \mathbb{R}^2 και τον \mathbb{R}^3 έδωσαν οι: Poisson (1818, λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στις τρεις διαστάσεις), Kirchhoff (1882, λύση του χρονικά αρμονικού προβλήματος στις τρεις διαστάσεις⁽⁹⁾), Weber (1869, λύση του χρονικά αρμονικού προβλήματος στις δύο διαστάσεις), Volterra (1892, 1894, λύση του προβλήματος αρχικών τιμών και του χρονικά αρμονικού προβλήματος στις δύο διαστάσεις).

Με τη βοήθεια των λύσεων αυτών, προέκυψε το πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα ότι η **δομή της διαδιδόμενης διαταραχής είναι διαφορετική στις δύο και στις τρεις διαστάσεις!** Έτσι, ενώ στις τρεις διαστάσεις μια κυματική διαταραχή μπορεί να διαδίδεται εντοπισμένη (βλ. Σχήμα 6) (δηλαδή ισχύει η Δευτερεύουσα Υπόθεση του Hadamard), στις δύο διαστάσεις αυτό δεν συμβαίνει αλλά, αντίθετα, πίσω από το μέτωπο του κύματος υπάρχει μια παραμένουσα διαταραχή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Δηλαδή στις δύο διαστάσεις, δεν ισχύει η Δευτερεύουσα Υπόθεση του Hadamard.

Η ανωτέρω χαρακτηριστική διαφορά της μορφής της κυματικής διάδοσης στις δύο και στις τρεις διαστάσεις είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο αναδεικνύει τις βαθιές μαθηματικές διαφορές της δομής των χώρων άρτιας και περιττής διάστασης. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε εδώ ότι οι διάφορες λύσεις της εξίσωσης D'Alembert στις δύο και στις τρεις διαστάσεις έχουν γενικευθεί στις n χωρικές διαστάσεις. Ακριβέστερα, η ακόλουθη γενικευμένη εξίσωση D' Alembert στις n διαστάσεις:

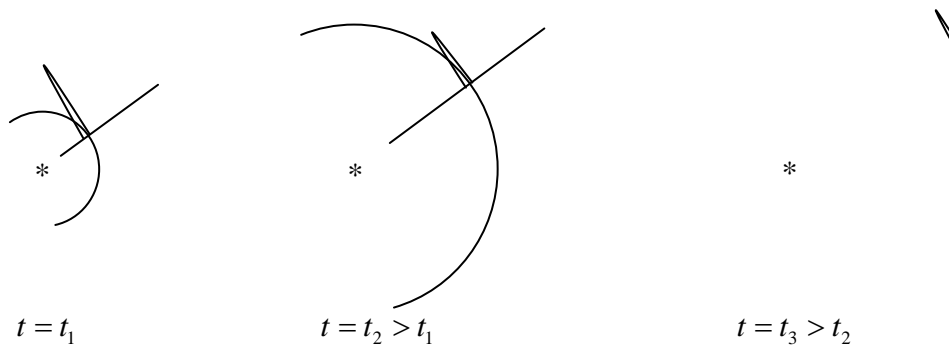
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0,$$

έχει μελετηθεί (και λυθεί στον \mathbb{R}^n) από τον Ούγγρο μαθηματικό Marcel Riesz στη δεκαετία του 1930, με τη βοήθεια του fractional calculus⁽¹⁰⁾.

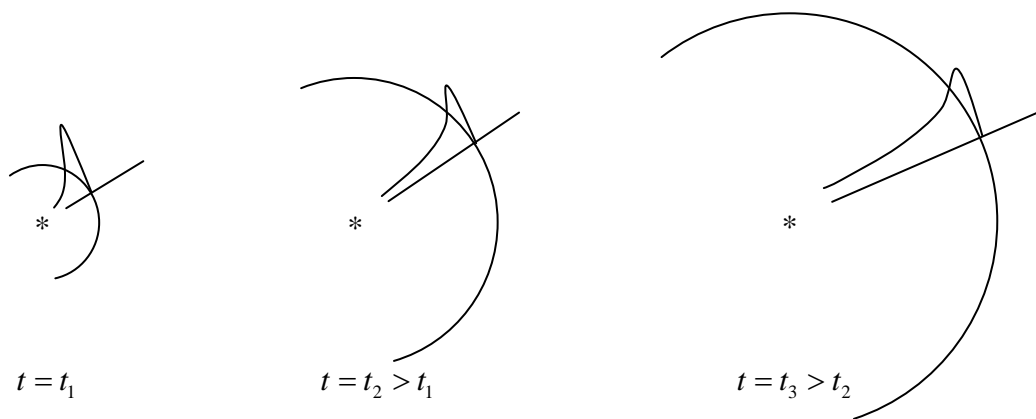
⁽⁸⁾ Οι ανωτέρω εξισώσεις περιγράφουν τη διάδοση του ήχου και του φωτός σε ομογενή μέσα.

⁽⁹⁾ Η λύση του Kirchhoff επεκτείνεται άμεσα και στο πεδίο του χρόνου.

⁽¹⁰⁾ Στα πλαίσια του fractional calculus, οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος τάξεως m , $m = 1, 2, 3, \dots$, γενικεύονται για κάθε $m > 0$.



Σχήμα 6 (3.2): Διάδοση κυματικής διαταραχής στις 3 διαστάσεις (ή, γενικότερα, σε χώρο περιττού αριθμού διαστάσεων).



Σχήμα 7 (3.2): Διάδοση κυματικής διαταραχής στις 2 διαστάσεις (ή, γενικότερα, σε χώρο αρτίου αριθμού διαστάσεων).

Με τη βοήθεια των λύσεων του M. Riesz προκύπτει ότι, όταν $n = 2\ell + 1$ η κυματική διαταραχή διαδίδεται εντοπισμένη (όπως φαίνεται στο Σχήμα 6), ενώ όταν $n = 2\ell$ υπάρχει πάντοτε παραμένουσα διαταραχή η οποία διαχέεται σε μεγάλη έκταση πίσω από το μέτωπο (όπως φαίνεται στο Σχήμα 7).

3.2.5 Ειδική βιβλιογραφία (επί της αρχής του Huygens)

Asgeirsson, L., 1956, "Some hints on Huygens' principle and Hadamard's conjecture", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 9, pp. 307-326.

Baker, B.B., Copson, E.T., 1953, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Clarendon Press, Oxford.

Günther, P., 1988, *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*, Academic Press, Boston.

Hadamard, J., 1923, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven.

Hadamard, J., 1924, "Le Principe de Huygens", *Bull. De la Soc. Math. De France*, Vol. 52, pp. 610-640.

Hadamard, J., 1932, *Le problème de Cauchy et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris.

3.3 Η αρχή των Ήρωνος-Fermat

Η Αρχή των Ήρωνος-Fermat, ή Αρχή του Στασίμου Χρόνου, αποτελεί την πρώτη (ιστορικά) μεταβολική αρχή της Φυσικής,⁽¹¹⁾ και ισχύει για κάθε είδους κύματα, υπό την προϋπόθεση ότι το μήκος κύματος είναι μικρό ως προς τις χαρακτηριστικές διαστάσεις των ανομοιογενειών του πεδίου⁽¹²⁾. Η διατύπωση και η αξιοποίησή της αρχής για τον προσδιορισμό των ακτίνων διάδοσης της κυματικής διαταραχής δεν προϋποθέτει τη λεπτομερή γνώση των φυσικών νόμων που διέπουν το εξεταζόμενο κυματικό φαινόμενο. Το μόνο στοιχείο που χρειαζόμαστε είναι η τοπική ταχύτητα διάδοσης της κυματικής διαταραχής. Στη συνέχεια, στα δύο πρώτα υποεδάφια του παρόντος εδαφίου, θα διατρέξουμε ένα τμήμα της ιστορίας της ανάπτυξης αυτής της αρχής, και κατόπιν θα ασχοληθούμε με τη σύγχρονη διατύπωσή της και ορισμένες εφαρμογές της. Στη σύγχρονη μορφή της, η αρχή των Ήρωνος-Fermat διατυπώνεται με τη γλώσσα του *λογισμού των μεταβολών*, και οδηγεί στην παραγωγή διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια των οποίων προσδιορίζονται οι ακτίνες διάδοσης. Στο τελευταίο υποεδάφιο του παρόντος εδαφίου οι *εξισώσεις των ακτίνων* επιλύονται σε διάφορες ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με κυματικά φαινόμενα στο θαλάσσιο περιβάλλον (ακουστικά κύματα στην υδάτινη μάζα, και επιφανειακά υδάτινα κύματα σε ρηχή θάλασσα).

3.3.1 Η ανάκλαση του φωτός και η Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου

Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς⁽¹³⁾, γύρω στο 125 π.χ., απέδειξε, στα *Κατοπτρικά* του, την ακόλουθη πρόταση:

"Όταν μια ακτίνα φωτός ανακλάται σε ένα κάτοπτρο⁽¹⁴⁾ η πραγματική διαδρομή που ακολουθεί (πηγή Π – κάτοπτρο (k) – μάτι παρατηρητή Δ) είναι συντομότερη ως προς οποιαδήποτε άλλη δυνατή διαδρομή της ανακλώμενης ακτίνας".

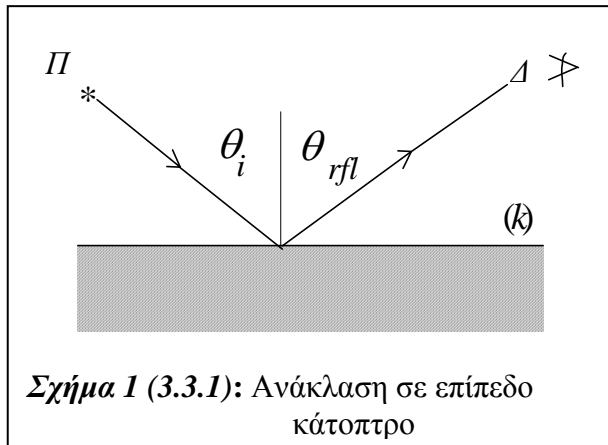
⁽¹¹⁾ Yourgau & Mandelstam (1968/1979)

⁽¹²⁾ Η συνθήκη αυτή συνάγεται από τη λεπτομερή μελέτη των δυναμικών εξισώσεων των διαφόρων κυματικών φαινομένων, απ' όπου προκύπτει ότι η θεωρία ακτίνων μπορεί να θεωρηθεί ως υψίσυχη ασυμπτωτική προσέγγιση των πλήρων δυναμικών εξισώσεων.

⁽¹³⁾ Ο Ήρων έζησε στην Αλεξάνδρεια, στο τέλος του πρώτου και στις αρχές του δευτέρου αιώνα μ.Χ.. Ακριβή στοιχεία σχετικά με τον τόπο και το χρόνο της γεννήσεως του δεν είναι γνωστά. Θεωρείται όμως βέβαιο ότι υπήρξε διευθυντής του "Πολυτεχνείου" στην Αλεξάνδρεια. Όπως προκύπτει από τα διασωθέντα έργα του, ο Ήρων υπήρξε μεγάλος μαθηματικός και φυσικός και, ταυτόχρονα, εξαιρετικά ιδιοφυής μηχανικός, αλλά και πολυγραφώτατος συγγραφέας. Τα σπουδαιότερα από τα σωζόμενα έργα του είναι τα εξής: "*Μετρικά*", όπου περιέχεται πλήθος Γεωμετρικών προτάσεων, ήδη γνωστών ή πρωτοτύπων, καθώς και μέθοδοι υπολογισμοί της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας, και επίλυσης της δευτοβάθμιας εξίσωσης. "*Πνευματικά*", όπου περιέχονται οι θεωρίες του Ήρωνος περί του κενού, του αέρος, και της πίεσης του αέρος, του νερού και του ατμού, και περιγράφονται σχετικά πειράματα και συστήματα που κινούνται με την πίεση του ατμού. "*Κατοπτρικά*", όπου περιέχεται η θεωρία του Ήρωνος για την ανάκλαση του φωτός, εισάγεται η Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου, η οποία αποτελεί τον πρώτο μεταβολικό φυσικό νόμο που διατυπώθηκε ποτέ (15 περίπου αιώνες πριν από τον δεύτερο!), και μελετώνται συστήματα κατόπτρων. "*Μηχανικά*", όπου εξετάζονται συστήματα με οδοντωτούς τροχούς και εφαρμογές αυτών, η κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο, το κέντρο βάρους, και η ανάλυση δυνάμεων και ταχυτήτων σε συνιστώσες. "*Περί Αυτοματοποιητικής*", όπου μελετώνται συστήματα αυτοματισμού για τις σκηνές των θεάτρων. "*Διόπτρα*", όπου περιγράφεται η θεωρία και η κατασκευή οπτικού οργάνου, παρομοίου με τον σημερινό θεοδόλιχο. Τα βιβλία του Ήρωνος, μεταφρασμένα και στα λατινικά και αραβικά, λειτούργησαν, μαζί με τα Στοιχεία του Ευκλείδη και ορισμένα έργα του Αρχιμήδη, ως θεμελιώδη συγγράμματα αναφοράς ως το τέλος του 17^{ου} αιώνα!

⁽¹⁴⁾ Επίπεδο ή σφαιρικό

Ο Ήρων απέδειξε την ανωτέρω πρόταση ξεκινώντας από το γνωστό (πειραματικά βεβαιωμένο) γεγονός ότι η γωνία προσπτώσεως θ_{in} και η γωνία ανακλάσεως θ_{rfl} μιας ακτίνας είναι ίσες μεταξύ τους: $\theta_{in} = \theta_{rfl}$. Βλ Σχήμα 1.



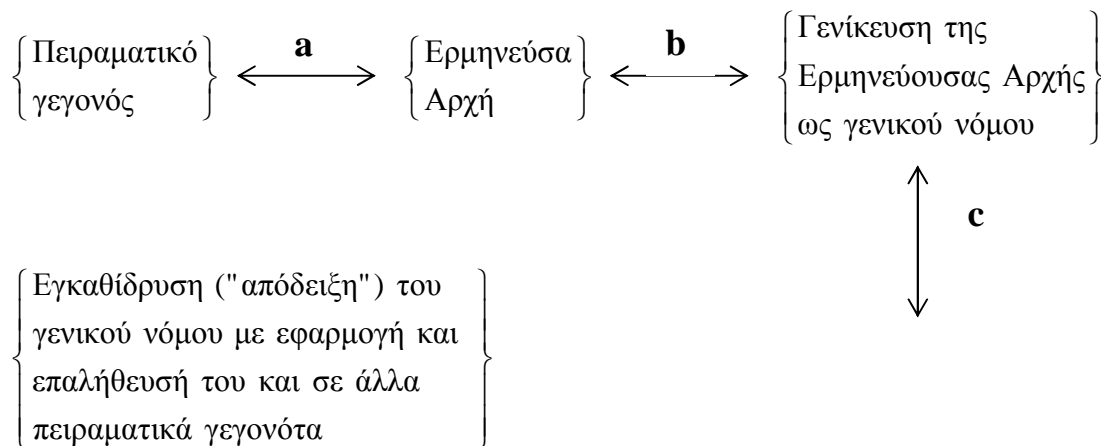
Η ανωτέρω πρόταση παρουσιάζει μια *εγγενή γενικότητα*. Επί παραδείγματι, έχει νόημα για κάτοπτρο κάθε σχήματος (π.χ., καμπυλόγραμμο κάτοπτρο), καθώς και για την περίπτωση πολλαπλών ανακλάσεων σε σύστημα κατόπτρων. Επί πλέον, είναι εξαιρετικά *απλή*, και διατηρεί την απλότητά της ακόμη και όταν εφαρμόζεται σε πολύπλοκα συστήματα. Έτσι, ο Ήρων, συνεχίζοντας τη φιλοσοφική

παράδοση του Πυθαγόρα, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, σύμφωνα με τους οποίους η κατανόηση της δομής και των νόμων της φύσεως μπορεί και πρέπει να γίνεται με τη βοήθεια "απλών" ("τελειών") αρχών και σχημάτων, θεώρησε την πρόταση αυτή ως μια "Ερμηνεύουσα Αρχή" των πειραματικών δεδομένων. Με αυτόν τον τρόπο, συνόψισε τη φυσική της ανάκλασης του φωτός στην "*Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου*", την οποία θα αναφέρουμε επίσης και ως "*Αρχή του Ήρωνος*":

"Το ανακλώμενο φως ακολουθεί διαδρομές ελαχίστου δρόμου (μήκους)".

Η *ελαχιστοποίηση* πρέπει να νοείται μεταξύ των διαδρομών με *ίδια αρχή, ίδιο πέρας*, και *ίδιο αριθμό ανακλάσεων σε κάθε κάτοπτρο*.

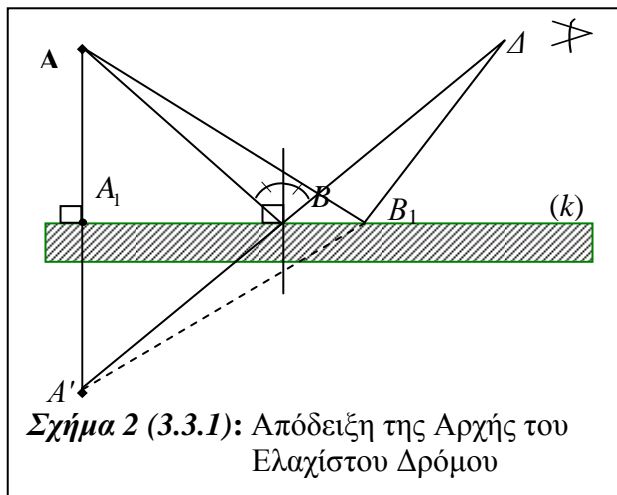
Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι ο τρόπος σκέψης του Ήρωνος αποτελεί ένα σημαντικό βήμα πρόοδου ως προς τους προηγούμενους μεγάλους Έλληνες φιλοσόφους, οι οποίοι δεν συνέδεαν, κατά κανόνα, τις Κοσμολογικές και Φυσικές απόψεις τους με εμπειρικά ή πειραματικά δεδομένα. (Επί παραδείγματι, κατά τον Αριστοτέλη, η Γη είναι σφαιρική, επειδή η σφαίρα είναι το "τέλειο" στερεό). Συνδέοντας, ο Ήρων, μια "απλή αρχή" με πειραματικά δεδομένα, εισήγαγε τη θεώρηση



η οποία αποτελεί το μεθοδολογικό βάθρο των φυσικών επιστημών σήμερα. Το βήμα **C** είναι συνήθως επίπονο και μακροχρόνιο, και απαιτεί τη συσσώρευση εκτεταμένης γνώσεως/ εμπειρίας, από μεγάλο αριθμό περιπτώσεων. Ένα εντυπωσιακό παράδειγμα του βήματος αυτού αποτελεί, κατ' ουσίαν, η "Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου" του Fermat (που αναπτύσσεται στο επόμενο υποεδάφιο), η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως γενικότερη "Ερμηνεύουσα Αρχή", η οποία περιλαμβάνει την αρχή του Ήρωνος και, ταυτόχρονα, καλύπτει και άλλα πειραματικά γεγονότα, πέραν του νόμου της ανάκλασης.

Απόδειξη της "Αρχής του Ήρωνος" από το νόμο της ανάκλασης: Θα δώσουμε τώρα μια γεωμετρική απόδειξη της πρότασης: "εάν οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι ίσες, τότε το μήκος της αντίστοιχης ακτίνας είναι ελάχιστο, σε σύγκριση με το μήκος κάθε άλλης διαδρομής που συνδέει την πηγή με το δέκτη και υφίσταται ανάκλαση στο ίδιο κάτοπτρο".

Η πρόταση αυτή, η οποία, αποδεικνύεται πολύ εύκολα. Κατ' ουσίαν δεν είναι παρά μια άσκηση Ευκλείδειας Γεωμετρίας.



Σχήμα 2 (3.3.1): Απόδειξη της Αρχής του Ελαχίστου Δρόμου

Ας συμβολίσουμε με (βλ. Σχήμα 2)

- A : Την πηγή του φωτός,
- Δ : το δέκτη,
- $AB\Delta$: Την πραγματική πορεία της ανακλώμενης ακτίνας,
- $AB_1\Delta$: μια οποιαδήποτε άλλη διαδρομή που συνδέει την πηγή A με το δέκτη Δ και υφίσταται ανάκλαση.

Φέρουμε την $AA_1 \perp (k)$ και προεκτείνουμε την ΔB . Έστω $A' = (AA_1) \cap (\Delta B)$, δηλ. το σημείο

τομής των ευθειών (AA_1) και (ΔB) . Τότε $\hat{A}B A_1 = \hat{\Delta}B B_1$ (λόγω της ισότητας των γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης) και άρα τα τρίγωνα $A \hat{B} A_1$ και $A' \hat{B} A_1$ είναι ίσα. Ως εκ τούτου, το σημείο A' είναι συμμετρικό του A ως προς το κάτοπτρο, και $AB = A'B$.

Άρα

$$(\text{Μήκος ανακλώμενης ακτίνας}) = AB + B\Delta = A'B + B\Delta = A'\Delta.$$

Όμως, για κάθε $B_1 \in (k)$ ισχύει επίσης $AB_1 = B_1A'$ και άρα $AB_1 + B_1\Delta = A'B_1 + B_1\Delta$. Από το τρίγωνο $A' \hat{\Delta} B_1$ βλέπουμε ότι, αν $B_1 \neq B$,

$$\underbrace{A'\Delta = AB + B\Delta} < \underbrace{AB_1 + B_1\Delta = A'B_1 + B_1\Delta}$$

μήκος ανακλώμενης ακτίνας

μήκος οποιασδήποτε άλλης διαδρομής από A σε Δ , που υφίσταται ανάκλαση.

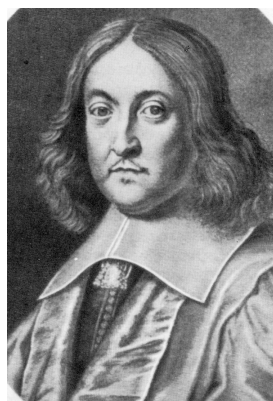
Αποδείξαμε, δηλαδή, ότι το μήκος της ανακλώμενης ακτίνας είναι μικρότερο από το μήκος οποιασδήποτε άλλης διαδρομής που συνδέει την πηγή A με το δείκτη Δ και υφίσταται ανάκλαση στο κάτοπτρο (k).

Ο Ήρων απέδειξε με παρόμοιο τρόπο την ανωτέρω αρχή και για σφαιρικό κάτοπτρο (κυρτό ή κοίλο).

Η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή ότι από την Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου έπεται η ισότητα των γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης, για επίπεδο κάτοπτρο είναι επίσης εύκολη, και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Η γενικότερη όμως πρόταση, ότι από την Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου προκύπτει ο νόμος της ανάκλασης $\theta_{in} = \theta_{refl}$ για καμπυλόγραμμα κάτοπτρο οποιουδήποτε σχήματος, είναι δύσκολη και απαιτεί τη χρήση αναλυτικών μεθόδων. Η πρόταση αυτή θα αποδειχθεί αργότερα.

3.3.2 Η διάθλαση του φωτός, ο Fermat και η Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου

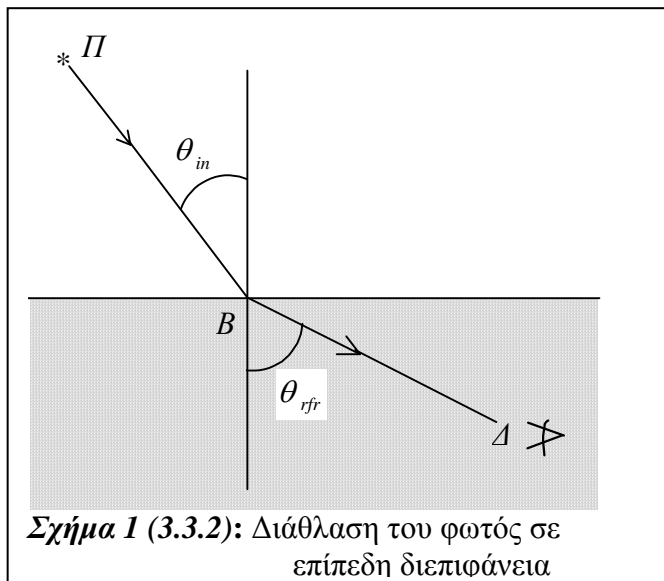
Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, η διάθλαση του φωτός είχε ήδη μελετηθεί αρκετά, και ο "νόμος του ημιτόνου" ή "νόμος του Snell", όπως τον ονομάζουμε σήμερα, είχε γίνει γενικά αποδεκτός. Στη Γαλλία, οι νόμοι της διάδοσης του φωτός μελετήθηκαν διεξοδικά (για τα δεδομένα της εποχής, βέβαια) από τον Descartes (1596-1650) στα βιβλία του "*Le Monde, ou Traité de la Lumière*" και "*Dioptrics*". Ο Fermat⁽¹⁾ (1601-



(¹) Ο Pierre de Fermat γεννήθηκε στη νότια Γαλλία το 1601, πιθανότατα στην πόλη Beaumont-de-Lomagne, όπου και πέρασε την παιδική του ηλικία. Ο πατέρας του ήταν ένας ευκατάστατος έμπορος δερμάτων. Σπούδασε νομικά, και εργάστηκε ως δικηγόρος και αργότερα ως δικαστής. Υπήρξε, επίσης, νομικός σύμβουλος του Κοινοβουλίου της Toulouse. Η ενασχόλησή του με τα μαθηματικά υπήρξε έντονη, αλλά εντελώς ερασιτεχνική. (Οι ιστορικοί των μαθηματικών τον αποκαλούν "ο Πρίγκιψ των Ερασιτεχνών"!.) Αυτό δεν είναι, πάντως, κάτι ασυνήθιστο για την εποχή του, στην οποία δεν υπήρχε το επάγγελμα του μαθηματικού με οποιαδήποτε επίσημη έννοια ή αναγνώριση. Η δύναμη της ιδιοφυίας του Fermat ήταν τόσο, ώστε να βάλει τη σφραγίδα του σε πολλές περιοχές των μαθηματικών, αλλά και στη φυσική, κυρίως στην οπτική, όπου η ομόνυμη Αρχή αποτελεί πλέον ένα γενικό ερμηνεύσιμο μελέτης της κλασικής κίνησης.

Τότε δεν υπήρχαν ακόμα ούτε ακαδημίες επιστημών, ούτε επιστημονικά περιοδικά. Οι διάφοροι φίλοι της επιστήμης, σκορπισμένοι εδώ κι εκεί, είτε αλληλογραφούσαν άμεσα, είτε έστελναν γράμματα σε κάποιον λάτρη της επιστήμης στο Παρίσι, που τα αντέγραφε και τα έστελνε σε άλλους επιστήμονες. Έτσι, ο Fermat διατύπωνε τις συναρπαστικές σκέψεις και ιδέες του σε γράμματα στους φίλους του, όπως ο Descartes (Καρτέσιος), ο Pascal, ο Roberval, ο Desargue, και άλλοι. Και όλοι αυτοί τον θεωρούσαν ως τον μέγιστο μαθηματικό της Ευρώπης. Ο Fermat, εκτός από τα γράμματα και τις εργασίες των φίλων του, μελετούσε επίσης τα μεγάλα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, όπως τα *Κωνικά* του Απολλωνίου, από το οποίο εμπνεύστηκε τις ιδέες του για την Αναλυτική Γεωμετρία, και τα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, στο περιθώριο του οποίου έγραψε το περίφημο "Τελευταίο Θεώρημα" του Fermat. (Ως γνωστόν το "Τελευταίο Θεώρημα" του Fermat, βασάνισε τους μαθηματικούς όλου του κόσμου για τρεις αιώνες και αποδείχθηκε μόλις το 1993-1994 από τον Andrew Wiles). Οι συμβολές του στα μαθηματικά περιλαμβάνουν, μεταξύ άλλων: *Σύστημα αναλυτικής γεωμετρίας*, πριν από τον Descartes και σε πιο ολοκληρωμένη μορφή. Ανάπτυξη μεθόδων για τον προσδιορισμό των μεγίστων και των ελαχίστων συναρτήσεων, καθώς και των εφαπτομένων σε καμπύλες, δηλαδή μια πρώτη μορφή του *διαφορικού λογισμού*, πριν από τον Newton. Περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό εμβαδών, όγκων και μηκών καμπυλών, δηλαδή μια μορφή του *ολοκληρωτικού λογισμού*, επίσης πριν από τον Newton. Ουσιαστική συμβολή στη θεμελίωση της *θεωρίας των πιθανοτήτων*, μαζί με τον Pascal. Και, κυρίως, σημαντικό και βαθύ έργο στη *θεωρία των αριθμών*, στην οποία μπορεί να θεωρηθεί ο αδιαφιλονίκητος Πρώτος, μέχρι σήμερα.

1665) δεν είχε, κατ' αρχήν, κάποιο σοβαρό ενδιαφέρον για την Οπτική. Η αρχική συμβολή του, το 1637, ήταν μια κριτική των επιχειρημάτων του Descartes, τα οποία δεν εύρισκε καθόλου πειστικά.



Ο Fermat επανήλθε στη μελέτη του προβλήματος της διάθλασης το 1657, με αφορμή ένα γράμμα του *Martin Cureau de la Chambre*. Ο τελευταίος του ζητούσε να διαβάσει και να σχολιάσει το βιβλίο του "*La Lumière*", στο οποίο εισήγαγε την (ελληνική, όπως είδαμε) ιδέα των μεταβολικών νόμων ("*η φύση ενεργεί πάντοτε κατά βέλτιστο τρόπο*"), και εφάρμοζε την Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου του Ήρωνος για να παράγει το νόμο της ανάκλασης. Ο Fermat ενδιαφέρθηκε κυρίως για το μαθηματικό μέρος της Αρχής του

Ελαχίστου Δρόμου, και αποφάσισε να την χρησιμοποιήσει για να δώσει μια απόδειξη και για το νόμο της διάθλασης. Ο σκοπός του ήταν να παράγει μια απόδειξη ελεύθερη από τα σκοτεινά σημεία που είχε η "απόδειξη" του Descartes. Το κύριο πρόβλημα που είχε να αντιμετωπίσει ήταν προφανές. Βλ. Σχήμα 1. Ο δρόμος *PBA*, που ακολουθεί η διαθλώμενη ακτίνα, δεν συμμορφώνεται προς την Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου. Εδώ ακριβώς έγκειται η μεγάλη συμβολή του Fermat. Διαισθάνθηκε ότι η **ισχύς της Αρχής του Ελαχίστου μπορεί να αποκατασταθεί αν επιλέξουμε ένα άλλο μέγεθος προς ελαχιστοποίηση**. (Μην ξεχνάμε ότι ο Fermat ήταν τότε ο μόνος ίσως μαθηματικός που μπορούσε να υπολογίζει ακρότατα συναρτήσεων!). Το επιχείρημά του ήταν ότι ο δρόμος *BA*, που διανύει η ακτίνα στο δεύτερο μέσο, πρέπει να "αναχθεί" σε ισοδύναμο δρόμο στο πρώτο μέσο, πολλαπλασιάζοντάς τον με το λόγο των "οπτικών αντιστάσεων" των δύο μέσων. Θεωρώντας τις "οπτικές αντιστάσεις" αντιστρόφως ανάλογες προς τις ταχύτητες διάδοσης του φωτός στα δύο μέσα, οδηγήθηκε ουσιαστικά στο να αντικαταστήσει το μήκος του δρόμου που διανύει η φωτεινή ακτίνα, από το χρόνο που απαιτείται για να διαδοθεί το φως από την πηγή *P* στο δέκτη *A*. Στη συνέχεια, βρίσκοντας τη συνθήκη ελαχιστοποίησης⁽¹⁶⁾ της ποσότητας αυτής, κατέληξε στο "νόμο του ημιτόνου" για τη διάθλαση. Οι υπολογισμοί του ανακοινώθηκαν με υπερηφάνεια στον Martin Cureau, με γράμμα του την 1 Ιανουαρίου του 1658.

Οι συμβολές του στη φυσική ήταν μάλλον περιστασιακές, και αναφέρονται στη *γεωστατική*, στη *μηχανική*, και στην *οπτική*. Σημαντικότερη είναι η συμβολή του στην οπτική, όπου διετύπωσε την "Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου", βασική αρχή της σύγχρονης κυματικής, η οποία αναπτύσσεται εκτενώς στο κυρίως κείμενο. Μεγάλο μέρος από το έργο του Fermat περιέχεται σε γράμματα προς τους φίλους του, με τα οποία απαντούσε σε σχετικά ερωτήματά τους. Ας σημειωθεί ότι ελάχιστα από τα έργα του δημοσιεύθηκαν όσο ζούσε, και αυτά μετά από επίμονη απαίτηση των φίλων του. Την πρώτη συλλογή και έκδοση των έργων του επιμελήθηκε ο γιος του Samuel Fermat, μετά το θάνατό του. Ο Pierre de Fermat πέθανε το 1665.

⁽¹⁶⁾ Ουσιαστικά τη συνθήκη στασιμότητας. Ας σημειωθεί ότι οι μεταβολικές αρχές δεν είναι πάντοτε αρχές ελαχίστου ή μεγίστου. Σήμερα ξέρουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις είναι απλώς **συνθήκες στασιμότητας** ενός κατάλληλα επιλεγμένου συναρτησιακού.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να συνοψίσουμε την "*Αρχή του Fermat*" ή "*Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου*", ως εξής:

"Το διαθλώμενο φως ακολουθεί διαδρομές ελαχίστου χρόνου".

Η Αρχή του Fermat ενέχει τους χαρακτήρες της *εγγενούς γενικότητας* και *απλότητας* που επισημάναμε και για την Αρχή του Ήρωνος, και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό. Και τούτο διότι: (i) Αν και διατυπώθηκε ως νόμος της διάθλασης, περιέχει και την Αρχή του Ελαχίστου Δρόμου ως ειδική περίπτωση, όταν έχουμε διάδοση σε ένα μόνο μέσον. Αρα ισχύει τόσο για την ανάκλαση όσο και για τη διάθλαση. (ii) Διατηρεί την απλότητά της (αλλά και την ισχύ της!) και σε πιο πολύπλοκα συστήματα, στα οποία συμβαίνουν πολλαπλές ανακλάσεις και διαθλάσεις. (iii) Γενικεύεται άμεσα (και ισχύει) και στην περίπτωση ανομοιογενών μέσων, δηλαδή μέσων στα οποία η ταχύτητα διάδοσης του φωτός μεταβάλλεται κατά γενικό τρόπο από θέση σε θέση. Τα ανωτέρω συνοψίζονται στην ακόλουθη διατύπωση:

"Κάθε ακτίνα που συνδέει μια φωτεινή πηγή Π με ένα δέκτη Δ, ακολουθεί εκείνο το δρόμο, δια του οποίου ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να φθάσει από την πηγή στο δέκτη καθίσταται ελάχιστος",

ή, ακόμη πιο συνοπτικά,

"Το φως ακολουθεί διαδρομές ελαχίστου χρόνου".

Στις ανωτέρω διατυπώσεις δεν αναφέρεται τίποτε για ανακλάσεις, διαθλάσεις ή για τις ιδιότητες των μέσων δια των οποίων διαδίδεται το φως. Αυτό δεν αποτελεί παράλειψη ή ελλειπτικό λόγο. Οφείλεται στο γεγονός ότι η Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου ισχύει για κάθε δυνατή οπτική διάταξη (οπτικό σύστημα). Ας σημειωθεί ότι, με αυτή τη γενικότητα, η Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου δεν αποδείχθηκε (ούτε εξετάστηκε) από το Fermat. Είναι αποτέλεσμα που επαληθεύθηκε, πειραματικά και θεωρητικά, πολύ αργότερα. Η μόνη πρόνοια που πρέπει να ληφθεί εφαρμόζοντας την ανωτέρω αρχή είναι ότι **η συνθήκη ελαχιστοποίησης πρέπει να νοείται ως προς γειτονικές μεταξύ τους διαδρομές, οι οποίες περνούν από τα ίδια μέσα και παρουσιάζουν τον ίδιο αριθμό ανακλάσεων και διαθλάσεων**. Αναζητούμε δηλαδή τα τοπικά ακρότατα (ή σημεία στασιμότητας) του συναρτησιακού του χρόνου. Ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον γεγονός, το οποίο στηρίζει περαιτέρω την Αρχή του Fermat ως γενικό νόμο, είναι το ότι διαφορετικά τοπικά ακρότατα (ή σημεία στασιμότητας) του συναρτησιακού του χρόνου, αντιστοιχούν σε διαφορετικούς δρόμους διάδοσης, οι οποίοι όντως λαμβάνουν χώρα στη φύση!

Απόδειξη του νόμου της διάθλασης από την Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου: Θα δώσουμε τώρα την απόδειξη του νόμου του Snell από την Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου, ακολουθώντας ουσιαστικά τη γραμμή σκέψης του Fermat, αλλά χρησιμοποιώντας σύγχρονη μαθηματική ορολογία.

Θεωρούμε δυο μέσα 1 και 2, τα οποία χωρίζονται από μια επίπεδη διεπιφάνεια (δ). Οι ταχύτητες διάδοσης του φωτός (της κυματικής διαταραχής, γενικότερα) στα δύο μέσα είναι c_1 και c_2 , αντιστοίχως. Βλ. Σχήμα 2. Εστω $AB\Delta$ η διαθλώμενη ακτίνα,

και A_1, Δ_1 οι προβολές της πηγής A και του δέκτη Δ πάνω στη διεπιφάνεια (δ) .
Θέτουμε (βλ. και Σχήμα 2)

$$\ell = A_1\Delta_1, \quad d_1 = AA_1, \quad d_2 = \Delta\Delta_1,$$

και

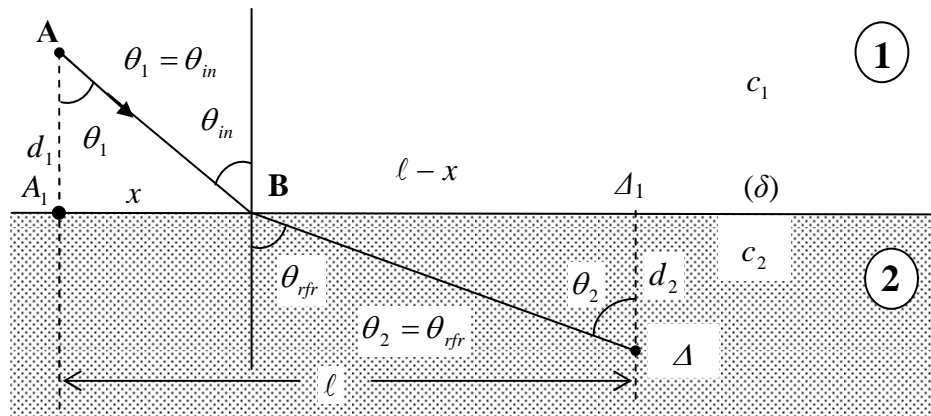
$$x = A_1B.$$

Προφανώς, ο προσδιορισμός της ακριβούς διαδρομής της διαθλώμενης ακτίνας ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του μήκους x .

Ο χρόνος διάδοσης της διαταραχής από την πηγή A στο δέκτη Δ εκφράζεται από τη σχέση:

$$t = t(x) = \frac{AB}{c_1} + \frac{B\Delta}{c_2} = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{d_2^2 + (\ell - x)^2}}{c_2} .$$

(1)



Σχήμα 2 (3.3.2): Εφαρμογή της Αρχής του Ελαχίστου Χρόνου στη διάθλαση του φωτός.

Παραγωγίζοντας ως προς x , η ανωτέρω σχέση μας δίνει

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{d_2^2 + (\ell - x)^2}} .$$

(2)

Η **συνθήκη στασιμότητας του χρόνου** $t = t(x)$ ως προς x είναι

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{c_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{d_2^2 + (\ell - x)^2}} .$$

(3)

Η συνθήκη (3), με τη βοήθεια και του Σχήματος 2, γράφεται επίσης στη μορφή

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{A_1B}{AB} = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{B\Delta_1}{B\Delta} \Leftrightarrow \frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \Leftrightarrow \frac{\sin \theta_{in}}{c_1} = \frac{\sin \theta_{rfr}}{c_2} ,$$

(4)

η οποία δεν είναι παρά ο νόμος του Snell! Βλέπουμε λοιπόν ότι η *συνθήκη στασιμότητας του συναρτησιακού του χρόνου είναι ισοδύναμη με το νόμο του Snell*. Άρα, δεν είναι η συνθήκη ελαχιστοποίησης, αλλά η συνθήκη στασιμότητας του χρόνου διάδοσης, η οποία ενδιαφέρει, προκειμένου να καταλήξουμε στο νόμο της διάθλασης. Αυτό είναι μια γενικότερη παρατήρηση, η οποία οδηγεί στη γενίκευση της Αρχής του Ελαχίστου Χρόνου, ως *Αρχής του Στασίμου Χρόνου*. Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν πράγματι περιπτώσεις όπου η ακτίνα διάδοσης δεν αντιστοιχεί σε διαδρομή ελαχίστου χρόνου, πάντοτε όμως αντιστοιχεί σε διαδρομή στασίμου χρόνου.

Μελετώντας τη δεύτερη παράγωγο του $t(x)$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, στην προκειμένη περίπτωση, το σημείο στασιμότητας (που αντιστοιχεί στο νόμο του Snell) είναι σημείο ελαχίστου του συναρτησιακού του χρόνου. Πράγματι, παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της σχέσης (2), βρίσκουμε

$$t''(x) = \frac{d_1^2}{c_1(d_1^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{d_2^2}{c_2(d_2^2 + (\ell - x)^2)^{3/2}} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in [0, \ell], \quad (5)$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι *το σημείο στασιμότητας*, δηλαδή η λύση της εξίσωσης $t'(x) = 0$, είναι *σημείο ελαχίστου* του συναρτησιακού του χρόνου.

Επί προσθέτως, η σχέση (5) εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $t'(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα, και άρα η λύση ως προς x της εξίσωσης (3) είναι *μοναδική*.

Άσκηση: Έστω ότι στη διάταξη του Σχήματος 2 γνωρίζουμε τις αποστάσεις d_1, d_2, ℓ , και τις ταχύτητες διάδοσης c_1, c_2 . Να προσδιορισθεί η ακτίνα που συνδέει την πηγή A με το δέκτη Δ .

Υπόδειξη: Δεδομένου ότι τα τμήματα AB και $B\Delta$ της ακτίνας είναι ευθύγραμμα, αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο B . Υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της (3) φθάνετε σε μια πλήρη εξίσωση τετάρτου βαθμού. Εναλλακτικά, μπορείτε να θέσετε $\ell - x = y$ και να οδηγηθείτε σε ένα σύστημα ως προς x και y . Ο δεύτερος τρόπος διευκολύνει τη γραφική επίλυση.

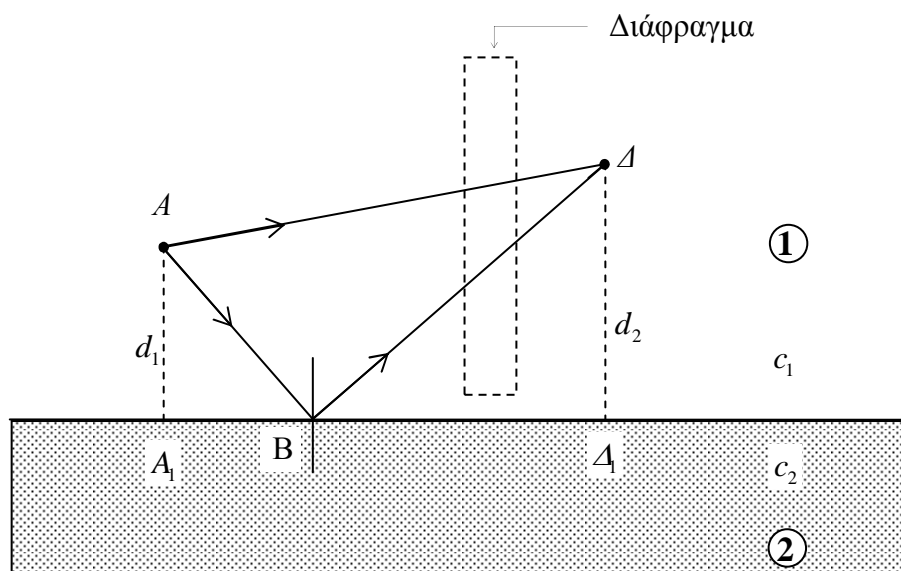
Παρατήρηση: Όπως βλέπουμε από τα ανωτέρω, το πρόβλημα του προσδιορισμού της ακτίνας που συνδέει την πηγή με ένα δεδομένο δέκτη (*ιδιοακτίνα, eigenray*), είναι δυσκολότερο από το πρόβλημα του προσδιορισμού της πορείας μιας ακτίνας που ξεκινάει από την πηγή με δεδομένη κατεύθυνση. Αυτό συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις, και αντιμετωπίζεται συνήθως ως εξής: σχεδιάζουμε μια δέσμη ακτίνων και επιλέγουμε εκείνη που περνά (κοντά) από το δέκτη. Το σημείο αυτό θα συζητηθεί εν εκτάσει αργότερα.

Πρόβλημα: [*Διάδοση μέσω διάθλασης σε άλλο μέσο (refraction arrival paths)*]. Ας θεωρήσουμε το σύστημα που εικονίζεται στο Σχήμα 3. Τώρα, η πηγή A και ο δέκτης Δ βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο **1**, όπου η ταχύτητα διάδοσης του κύματος έχει τιμή c_1 , και απέχουν αποστάσεις $d_1 = AA_1$ και $d_2 = \Delta A_1$, αντιστοίχως από τη διεπιφάνεια (δ). Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στον ημίχωρο **2** είναι $c_2 > c_1$. Επί παραδείγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διαδιδόμενο κύμα είναι ακουστικό, στον ημίχωρο **1** υπάρχει αέρας ($c_1 = 330 \text{ m/sec}$), και στον ημίχωρο **2** υπάρχει νερό (θάλασσα, $c_2 = 1500 \text{ m/sec}$). Προφανώς, η κυματική διαταραχή μπορεί να φθάσει

στο δέκτη Δ με δύο τρόπους (μέσω δύο ακτίνων): (i) διάδοση απ' ευθείας, ακτίνα $A\Delta$, (ii) διάδοση μέσω ανάκλασης στη διεπιφάνεια (δ), ακτίνα $AB\Delta$. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι τρόποι (ακτίνες) διάδοσης, τότε, αν τοποθετήσουμε μεταξύ της πηγής A και του δέκτη Δ ένα (ηχοαπορροφητικό) διάφραγμα, όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχήμα 3, θα εμποδίζεται η λήψη του ακουστικού σήματος στο δέκτη Δ , (τουλάχιστον εάν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο από το ύψος του διαφράγματος, ώστε να μη συμβαίνει περίθλαση). Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει όμως στην πραγματικότητα! Το σήμα λαμβάνεται και όταν υπάρχει διάφραγμα, εκτός εάν αυτό βρίσκεται πολύ κοντά στην πηγή ή πολύ κοντά στο δέκτη. Πώς μπορούμε να εξηγήσουμε αυτό το φαινόμενο?

Λύση: Στο Σχήμα 4 φαίνεται ένας άλλος πιθανός τρόπος (πιθανή ακτίνα) διάδοσης: Το κύμα εισέρχεται, σε κάποια θέση B_1 στο μέσο 2, οδεύει στο μέσον αυτό ως το σημείο B_2 , και στη συνέχεια διαθλάται και πάλι, εισέρχεται ξανά στο μέσον 1, και φθάνει στο δέκτη Δ . Δύο αλληλένδετα ερωτήματα προκύπτουν, εν προκειμένω:

- Μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία B_1 και B_2 ?
- Προβλέπεται η ακτίνα $AB_1B_2\Delta$ από την αρχή του Fermat?



Σχήμα 3 (3.3.2): Πηγή και δέκτης πάνω από διεπιφάνεια: (i) διάδοση απ' ευθείας, ακτίνα $A\Delta$, (ii) διάδοση μέσω ανάκλασης στη διεπιφάνεια, ακτίνα $AB\Delta$.

Για να εξετάσουμε τα ερωτήματα αυτά θα μελετήσουμε το χρόνο διάδοσης $t(x, y)$ που αντιστοιχεί στην ακτίνα $AB_1B_2\Delta$, ως συνάρτηση των αγνώστων μηκών $x = A_1B_1$ και $y = B_2A_2$:

$$t(x, y) = \frac{AB_1}{c_1} + \frac{B_1B_2}{c_2} + \frac{B_2\Delta}{c_1} = \frac{AB_1 + B_2\Delta}{c_1} + \frac{B_1B_2}{c_2} .$$

Άρα

$$t(x, y) = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + y^2}}{c_1} - \frac{\ell - (x + y)}{c_2}, \quad (\alpha)$$

όπου $\ell = A_1\Delta_1$. Παραγωγίζοντας τη σχέση (α) ως προς x και y , και μηδενίζοντας τις πρώτες παραγώγους, βρίσκουμε τη συνθήκη στασιμότητας:

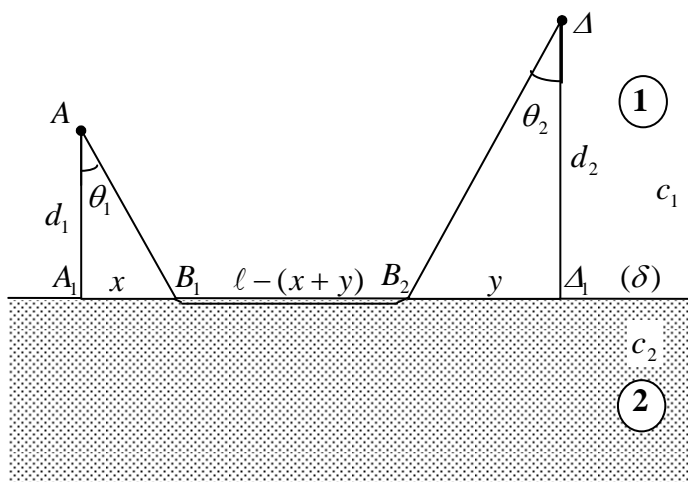
$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x}{c_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} = 0, \quad (\beta.1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y}{c_1\sqrt{d_2^2 + y^2}} - \frac{1}{c_2} = 0. \quad (\beta.2)$$

Με τη βοήθεια και του Σχήματος 4, βλέπουμε ότι οι σχέσεις (β.1), (β.2) γράφονται, ισοδυνάμως, στη μορφή

$$\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \sin \theta_2 = \frac{c_1}{c_2}. \quad (\gamma.1, 2)$$

Άρα, εφ' όσον $c_1/c_2 < 1$, υπάρχουν πράγματι οξείες θ_1, θ_2 , οι οποίες ορίζουν την ακτίνα $AB_1B_2\Delta$, και οι οποίες καθιστούν το συναρτησιακό του χρόνου στάσιμο. Επί πλέον, μελετώντας τις δεύτερες παραγώγους του συναρτησιακού (της συνάρτησης) $t(x, y)$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι



Σχήμα 4 (3.3.2): Πηγή και δέκτης πάνω από διεπιφάνεια: Διάδοση μέσω ακτίνας που οδεύει για ένα διάστημα κάτω από τη διεπιφάνεια.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0, \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} = 0, \quad (\delta)$$

εκ των οποίων προκύπτει ότι το σημείο στασιμότητας είναι και **σημείο ελαχίστου**. Τέλος, στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε ότι η κατασκευή της ιδιοακτίνας $AB_1B_2\Delta$

είναι άμεση, είτε με τη βοήθεια των γωνιών θ_1, θ_2 , είτε υπολογίζοντας τα μήκη x και y , από τις εξισώσεις (β.1) και (β.2).

Διερεύνηση:

1. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν το ηχοαπορροφητικό διάφραγμα τοποθετηθεί πολύ κοντά στην πηγή A ή πολύ κοντά στο δέκτη Δ (ακριβέστερα, σε απόσταση $< x$ από την πηγή, ή σε απόσταση $< y$ από το δέκτη), τότε και αυτή η ακτίνα θα προσκρούσει στο διάφραγμα και θα απορροφηθεί.
2. Για να έχει νόημα η ανωτέρω λύση/κατασκευή, θα πρέπει $x + y > \ell$. Υπολογίζοντας τα x και y από τις σχέσεις (β.1,2), η ανωτέρω συνθήκη παίρνει τη μορφή:

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \cdot (d_1 + d_2) > \ell.$$

3.3.3 Σύγχρονη διατύπωση της Αρχής των Ήρωνος-Fermat. Η Αρχή του Στασίμου Χρόνου

Παρά το ότι τόσο ο Ήρων όσο και ο Fermat διετύπωσαν τις ομώνυμες Αρχές Ελαχίστου ασχολούμενοι με προβλήματα οπτικής, η Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου, γενικευμένη ως **Αρχή του Στασίμου Χρόνου**, ισχύει πολύ γενικότερα, σε κάθε περίπτωση κυματικής κίνησης όπου ορίζεται (έχει νόημα) η ακτίνα διάδοσης του κύματος. Αυτό συμβαίνει όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο από τις διαστάσεις των εμποδίων και, ταυτόχρονα, οι ιδιότητες του μέσου δια του οποίου διαδίδεται το κύμα μεταβάλλονται αργά ως προς το μήκος κύματος.

Η ισχύς της Αρχής του Στασίμου χρόνου για τα διάφορα είδη κυμάτων (π.χ., ακουστικά, υδάτινα, ελαστικά, ηλεκτρομαγνητικά) μπορεί να αποδειχθεί ξεκινώντας κάθε φορά από τις συγκεκριμένες εξισώσεις που διέπουν τα αντίστοιχα φαινόμενα (π.χ., τις εξισώσεις του Euler για τα ακουστικά και υδάτινα κύματα, τις εξισώσεις του Maxwell για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, κ.λπ.). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δούμε με σαφήνεια τις ακριβείς προϋποθέσεις, υπό τις οποίες ισχύει η Αρχή αυτή (υψίσυχη περιοχή ή, ισοδυνάμως, σχετικώς μικρά μήκη κύματος, όπως αναφέρθη ανωτέρω). Από την άλλη μεριά, η Αρχή του Στασίμου Χρόνου μπορεί να διατυπωθεί και να αξιολογηθεί για την παραγωγή εξισώσεων που ορίζουν τις ακτίνες διάδοσης των κυμάτων, ανεξαρτήτως του είδους των κυμάτων και των συγκεκριμένων δυναμικών εξισώσεων που τα διέπουν. Με την έννοια αυτή η Αρχή του Στασίμου Χρόνου έχει ένα αυτόνομο χαρακτήρα και μια γενικότητα που υπερβαίνει τις επί μέρους μαθηματικές μοντελοποιήσεις των διαφόρων κυματικών προβλημάτων. Είναι μια γενική "Ερμηνεύουσα Αρχή", που της αξίζει το status ενός γενικού νόμου της κυματικής.

- Φραστική διατύπωση της Αρχής του Στασίμου Χρόνου σε ανομοιογενή μέσα

Στο υποεδάφιο αυτό θα ξεκινήσουμε από τη γενική (φραστική) διατύπωση της **Αρχής του Στασίμου Χρόνου**, σύμφωνα με την οποία

"Τα κύματα οδεύουν ακολουθώντας διαδρομές στασίμου χρόνου",

και θα καταλήξουμε, εφαρμόζοντας τεχνικές του Λογισμού των Μεταβολών, στις διαφορικές εξισώσεις που ορίζουν τις ακτίνες διάδοσης των κυμάτων. Η όλη ανάπτυξη θα γίνει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε τα αποτελέσματά μας να ισχύουν για κάθε είδους κύμα. Μόνη προϋπόθεση είναι η έννοια της ακτίνας να έχει νόημα.

Εστω D μια περιοχή του χώρου στην οποία διαδίδεται μια κυματική διαταραχή. Στην περιοχή D υποτίθεται ότι υπάρχει το κατάλληλο μέσο δια του οποίου διαδίδεται το θεωρούμενο κύμα. (Ας μην ξεχνάμε βέβαια ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και στο κενό). Το μέσον μπορεί να είναι ομογενές, ή ανομοιογενές με συνεχώς ή ασυνεχώς κατανομημένες παραμέτρους. Η μοναδική παράμετρος που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η (τοπική) ταχύτητα διάδοσης της κυματικής διαταραχής $c = c(M)$, σε κάθε σημείο $M = (x_1, x_2, x_3)$ του χωρίου D .

Ας θεωρήσουμε ότι η κυματική διαταραχή ξεκινάει (ή περνάει) από το σημείο M_0 (βλ. Σχήμα 1) και, μετά από κάποιο χρόνο, φθάνει στο σημείο M_1 . Η **Αρχή του Στασίμου Χρόνου** εξειδικεύεται για τη διάδοση μεταξύ των σημείων M_0 και M_1 ως εξής:

"Η κυματική διαταραχή οδεύει από το σημείο M_0 στο σημείο M_1 μέσω εκείνου του δρόμου ο οποίος καθιστά στάσιμο το χρόνο διάδοσης"

ή, ισοδυνάμως,

"Η ακτίνα που συνδέει τα σημεία M_0, M_1 είναι εκείνη η διαδρομή που καθιστά το χρόνο διάδοσης στάσιμο".

Η στασιμότητα εξετάζεται ως προς γειτονικές μεταξύ τους διαδρομές. Προσοχή! Μπορεί να υπάρχουν πολλές ακτίνες που ικανοποιούν την Αρχή του Στασίμου Χρόνου! Το ... ευτυχές αυτό γεγονός θα συζητηθεί εκτενώς στη συνέχεια.

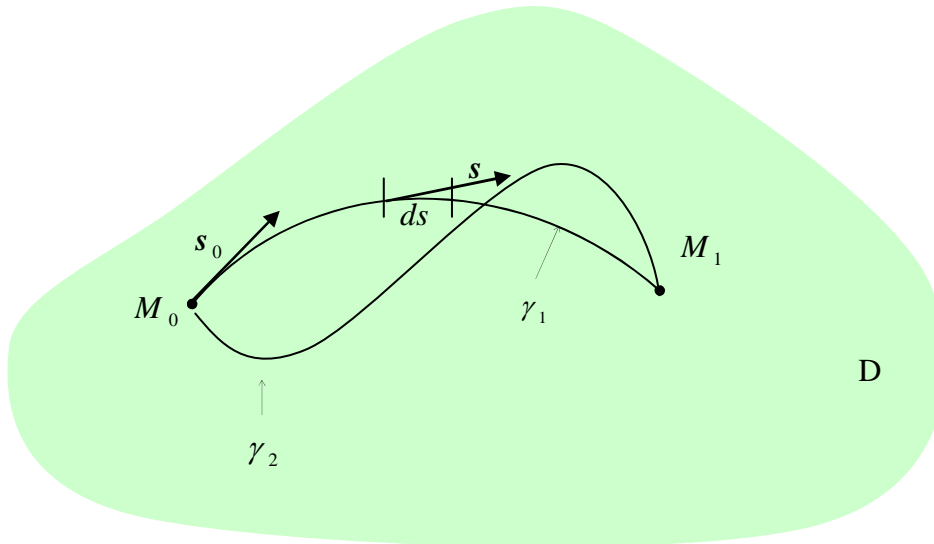
- Μαθηματική διατύπωση της Αρχής του Στασίμου Χρόνου σε ανομοιογενή μέσα

Ας δούμε τώρα πως "μεταφράζεται" μαθηματικά ή ανωτέρω αρχή. Το **πρώτο βήμα** είναι, προφανώς, να εκφράσουμε μαθηματικά την ποσότητα η οποία πρέπει να στασιμοποιηθεί, δηλαδή το χρόνο διάδοσης της κυματικής διαταραχής.

Εστω γ μια οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει τα σημεία M_0 και M_1 , παραμένουσα διαρκώς μέσα στο χώρο διάδοσης D . Αν ds είναι το στοιχειώδες μήκος τόξου επί της γ και dt είναι ο χρόνος στον οποίο η διαταραχή διατρέχει το ds , τότε προφανώς $dt = ds / c(M)$. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε η κυματική διαταραχή να διαδοθεί από το σημείο M_0 έως το σημείο M_1 , αν υποθέσουμε ότι η διάδοση γίνεται δια της καμπύλης γ , υπολογίζεται αθροίζοντας τους χρόνους dt , δηλαδή ολοκληρώνοντας κατά μήκος της καμπύλης γ :

$$\tau(\gamma) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c(M)}. \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε διάφορες καμπύλες που συνδέουν τα σημεία M_0 και M_1 , το ολοκλήρωμα (1) θα μας δώσει διαφορετικές τιμές για το χρόνο διάδοσης. Προσοχή! Οι διαφορές αυτές δεν οφείλονται μόνο στη διαφορά του μήκους των διαδρομών, αλλά και στο γεγονός ότι η ταχύτητα διάδοσης έχει διαφορετικές τιμές πάνω σε διαφορετικές διαδρομές.



Σχήμα 1 (3.3.3): Διαδρομές που συνδέουν τα σημεία M_0 και M_1 .

Η σχέση (1) ορίζει μία απεικόνιση με πεδίο ορισμού ένα κατάλληλο σύνολο καμπυλών, και πεδίο τιμών τους θετικούς αριθμούς: σε κάθε καμπύλη γ αντιστοιχίζεται η πραγματική τιμή $\tau(\gamma)$. Με άλλα λόγια, η σχέση (1) ορίζει ένα **συναρτησιακό** (functional), το οποίο θα ονομάζουμε και **συναρτησιακό του χρόνου** ή **συναρτησιακό του Fermat**. Πριν προχωρήσουμε, είναι σκόπιμο να περιγράψουμε με σαφήνεια το "κατάλληλο" σύνολο των διαδρομών (καμπυλών) γ επί του οποίου ορίζεται το συναρτησιακό του χρόνου $\tau(\gamma)$. Το σύνολο αυτό πρέπει να είναι αρκετά γενικό, ώστε να περιλαμβάνει όλες τις φυσικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, αλλά και καταλλήλως περιορισμένο, ώστε να έχει νόημα το ολοκλήρωμα (1).

Ορισμός 1 [Πεδίον ορισμού του συναρτησιακού του χρόνου]: Δοθέντων: (i) ενός χωρίου D εντός του οποίου (υποτίθεται ότι) λαμβάνει χώρα η κυματική διάδοση, και (ii) δύο σημείων $M_0, M_1 \in D$, θεωρούμε **το σύνολο των κατά τμήματα λείων καμπυλών οι οποίες κείνται εξ ολοκλήρου εντός του $\bar{D} = D \cup \partial D$, και έχουν ως ακραία σημεία (αρχή, πέρας) τα M_0, M_1** . Το σύνολο αυτό, το οποίο θα συμβολίζουμε ως $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Sectionally } C^1)$, λαμβάνεται (τίθεται) ως το πεδίου ορισμού του συναρτησιακού του χρόνου $\tau(\gamma)$, εξίσωση (1). ■

Παρατήρηση 1: Το συναρτησιακό (1) μπορεί να ορισθεί και σε ευρύτερο σύνολο καμπυλών (π.χ. τις καμπύλες των οποίων η κλίση είναι συνάρτηση φραγμένης κυμάνσεως). Η επέκταση αυτή δεν θα θεωρηθεί εδώ γιατί δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από φυσική άποψη.

Παρατήρηση 2: Δεδομένου ότι το συναρτησιακό $\tau(\gamma)$, εξίσωση (1), εξαρτάται και από το πεδίο ταχύτητας $c(\mathbf{x})$, είναι προφανές ότι, για να είναι καλώς ορισμένο, απαιτείται και ο καθορισμός συνθηκών λειότητας για το πεδίο $c(\mathbf{x})$. Η συνήθης συνθήκη, η οποία καλύπτει τις φυσικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, είναι ότι το πεδίο ταχύτητας $c(\mathbf{x})$ είναι κατά τμήματα C^1 στο \bar{D} .

Παρατήρηση 3: Στα πλαίσια της μαθηματικής μελέτης του συναρτησιακού του χρόνου είναι συχνά σημαντικό να διακρίνουμε την περίπτωση των λείων διαδρομών (διάδοσης της κυματικής διαταραχής) από την περίπτωση των κατά τμήματα λείων διαδρομών. Για το λόγο αυτό θεωρούμε επίσης το ακόλουθο γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; SectionallyC^1)$, επί του οποίου θα περιορίζουμε το συναρτησιακό του χρόνου σε ορισμένες περιπτώσεις:

$$\mathcal{D}(D; M_0, M_1; StrictlyC^1) = \{ \gamma \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; SectionallyC^1) : \gamma \text{ είναι λείο} \}.$$

Παρατήρηση 4: Σημειώνουμε εδώ ότι στην περίπτωση των λείων διαδρομών, δηλαδή όταν το συναρτησιακό $\tau(\gamma)$ θεωρείται ορισμένο στο $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; StrictlyC^1)$, το πεδίο ταχύτητας $c(\mathbf{x})$ θεωρείται κατά κανόνα λείο: $c(\mathbf{x}) \in C^1(D)$. Η απαίτηση αυτή συνδέεται με το φυσικό γεγονός της διάθλασης, σύμφωνα με την οποία ακτίνες που προσπίπτουν πλαγίως (όχι κάθετα) σε επιφάνειες ασυνέχειας της $c(\mathbf{x})$ χάνουν τη λειότητά τους.

Έχοντας ορίσει με αρκετή αυστηρότητα το συναρτησιακό του χρόνου $\tau(\gamma)$ και το πεδίο ορισμού του, προχωρούμε στο **επόμενο βήμα** για τη μαθηματοποίηση της Αρχής του Στασίμου Χρόνου, το οποίο είναι να κατανοήσουμε την έννοια της στασιμότητας του $\tau(\gamma)$. Ας θεωρήσουμε, προς στιγμήν, ότι η καμπύλη $\gamma \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; SectionallyC^1)$, περιγράφεται με τη βοήθεια πεπερασμένου πλήθους παραμέτρων, έστω των $a_n, n=1,2,\dots,N$. Τότε η ποσότητα $\tau(\gamma) = \tau(\gamma(\mathbf{a}))$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, μπορεί να νοηθεί ως μια συνάρτηση $\varphi = \varphi(\mathbf{a}) = \tau(\gamma(\mathbf{a}))$, των N μεταβλητών a_1, a_2, \dots, a_N . Στην περίπτωση αυτή, η έννοια της στασιμότητας είναι ήδη γνωστή από το Διαφορικό Λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Υπενθυμίζουμε δύο (σχεδόν) ισοδύναμους ορισμούς:

Ορισμός 2: Η συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ είναι **στάσιμη** στη θέση \mathbf{a} αν και μόνον αν για κάθε $\tilde{\mathbf{a}}$ γειτονικό του \mathbf{a} , δηλαδή τέτοιο ώστε η απόσταση $d(\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|$ να είναι επαρκώς μικρή, ισχύει η σχέση

$$\varphi(\tilde{\mathbf{a}}) = \varphi(\mathbf{a}) + O(\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|^2). \quad \blacksquare \quad (2a)$$

Ισοδύναμος με τον ανωτέρω ορισμό είναι ο ακόλουθος, υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ είναι παραγωγίσιμη.

Ορισμός 2': Η (παραγωγίσιμη) συνάρτηση $\varphi(\cdot)$ είναι **στάσιμη** στη θέση \mathbf{a} αν και μόνον αν

$$\nabla \varphi(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi(\mathbf{a})}{\partial a_n} = 0, \quad n=1,2,\dots,N. \quad \blacksquare \quad (2\beta)$$

Πώς όμως πρέπει να νοηθεί η στασιμότητα του $\tau(\gamma)$ στη γενική περίπτωση μιας καμπύλης γ που εξαρτάται από απείρου πλήθους παραμέτρους? Είναι φανερό ότι για να προχωρήσουμε εν προκειμένω πρέπει να εισάγουμε μια κατάλληλη μαθηματική δομή στο σύνολο των καμπυλών που μας ενδιαφέρουν, έτσι ώστε να μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε τις μεταβολές του $\tau(\gamma)$ που προκύπτουν από **μικρές μεταβολές της καμπύλης γ** . Αυτό το βήμα συνδέεται στενά και με την εισαγωγή μιας κατάλληλης έννοιας παραγώγου (κλίσεως, gradient) του συναρτησιακού $\tau(\gamma)$ ως προς γ . Αρχίζουμε με τον ορισμό των γειτονικών καμπυλών.

Ορισμός 3: Δύο καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Sectionally } C^1)$ θα λέγονται **γειτονικές** εάν παρουσιάζουν τον ίδιο αριθμό ασυνεχειών και εάν, ταυτόχρονα, μπορεί να ορισθεί μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων τους τέτοια ώστε: (i) οι αποστάσεις των αντιστοιχών σημείων να είναι μικρές, και (ii) τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα σε αντίστοιχα σημεία να είναι γειτονικά.

Ιδιαίτερος, εάν οι καμπύλες γ_1, γ_2 είναι (και οι δύο) λείες, δηλαδή όταν $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Strictly } C^1)$ και ισχύουν τα (i), (ii), ανωτέρω, θα λέμε ότι οι γ_1, γ_2 είναι **λείες γειτονικές**. \blacksquare

Στο Σχήμα 2 φαίνονται διάφορες διαδρομές που συνδέουν τα σημεία M_0 και M_1 . Εξ αυτών, οι γ_1, γ_2 είναι **γειτονικές** διαδρομές, οι γ_3, γ_4 είναι **λείες γειτονικές** διαδρομές, ενώ οι γ_5, γ_6 **δεν είναι γειτονικές** διαδρομές, διότι η γ_5 έχει δύο ασυνέχειες (διαθλάσεις), ενώ η γ_6 καμία.

Κάθε καμπύλη $\gamma \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Sectionally } C^1)$ μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά από μια εξίσωση της μορφής $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$ ή, ισοδυνάμως,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\sigma), \\ x_2 &= x_2(\sigma), \\ x_3 &= x_3(\sigma), \end{aligned} \quad (3)$$

όπου η παράμετρος $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$, $M_0 = \mathbf{x}(\sigma_0)$ και $M_1 = \mathbf{x}(\sigma_1)$. Το στοιχειώδες μήκος ds της καμπύλης δίδεται από τη σχέση

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} d\sigma, \quad (4)$$

όπου $\dot{x}_i = dx_i / d\sigma$, $i = 1, 2, 3$. Δεδομένου ότι $c(M) = c(x_1, x_2, x_3)$, το συναρτησιακό του χρόνου (1) γράφεται, με τη βοήθεια της (4), στη μορφή:

$$\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}}{c(x_1, x_2, x_3)} d\sigma, \quad (5\alpha)$$

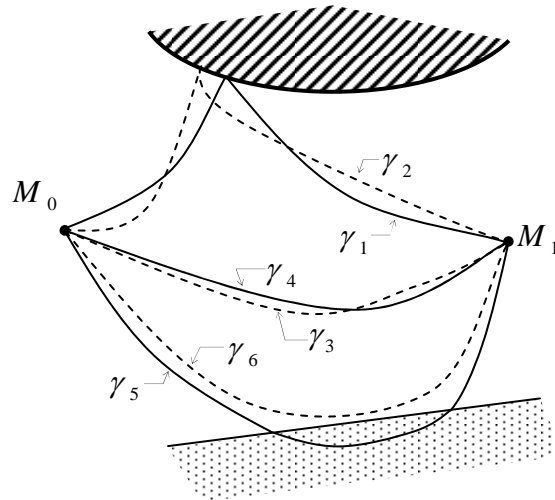
ή

$$\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) d\sigma. \quad (5\beta)$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στις ανωτέρω σχέσεις, δηλαδή η συνάρτηση

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} = \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}}{c(x_1, x_2, x_3)}, \quad (6)$$

ονομάζεται **Langrangian συνάρτηση** (ή, απλούστερα, Langrangian) του προβλήματος.



Σχήμα 2 (3.3.3): Γειτονικές και μη-γειτονικές διαδρομές που συνδέουν τα σημεία M_0, M_1 .

Με τη βοήθεια της αναλυτικής αναπαράστασης (3) της καμπύλης γ , μετατρέψαμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξιά μέλος της (1), σε ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα $[\sigma_0, \sigma_1]$, όπως φαίνεται στο δεξιά μέλος των σχέσεων (5). Αυτό διευκολύνει την ανάλυση που ακολουθεί, εισάγει όμως ένα πρόσθετο ερώτημα. Δεδομένου ότι μια καμπύλη μπορεί να παραμετροποιηθεί με πολλούς (άπειρους) τρόπους, μήπως η επιλογή μιας συγκεκριμένης παραμετροποίησης επηρεάζει την τιμή του συναρτησιακού του χρόνου $\tau(\gamma)$, όπως

αυτή εκφράζεται από τα ολοκληρώματα των σχέσεων (5)? Ευτυχώς, όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια, μια τέτοια, απαράδεκτη από φυσική άποψη, κατάσταση δεν συμβαίνει!

- Αναλλοιωτότητα του συναρτησιακού του χρόνου ως προς την παραμετροποίηση των ακτίνων

Η παραμετροποίηση (3) των εξισώσεων των ακτίνων είναι, κατ' αρχήν, αυθαίρετη. Μια οποιαδήποτε άλλη επιτρεπτή παράμετρος u θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αντί της παραμέτρου σ , η οποία θα οδηγούσε σε διαφορετικές παραμετρικές εξισώσεις της ίδιας καμπύλης:

$$\begin{aligned} x_i &= \tilde{x}_i(u), \quad i = 1, 2, 3, \\ M_0 &= \mathbf{x}(u_0), \quad M_1 = \mathbf{x}(u_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι δύο επιτρεπτές παραμετροποιήσεις μιας και της αυτής καμπύλης, μέσω των παραμέτρων σ και u , οφείλουν να ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

$$\begin{aligned} &\text{Υπάρχει } C^1 \text{ συνάρτηση } \sigma = \varphi(u), \text{ τέτοια ώστε} \\ \sigma_0 &= \varphi(u_0), \quad \sigma_1 = \varphi(u_1), \quad \text{και } \varphi'(u) > 0 \text{ για κάθε } u \in [u_0, u_1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Η συνθήκη αναλλοιωτότητας του συναρτησιακού του χρόνου κάτω από επιτρεπτές αλλαγές της παραμετροποίησης των εξισώσεων των ακτίνων διατυπώνεται λοιπόν ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{L} \left(x_1(\sigma), x_2(\sigma), x_3(\sigma), \frac{dx_1(\sigma)}{d\sigma}, \frac{dx_2(\sigma)}{d\sigma}, \frac{dx_3(\sigma)}{d\sigma} \right) d\sigma &= \\ &= \int_{u_0}^{u_1} \mathcal{L} \left(\tilde{x}_1(u), \tilde{x}_2(u), \tilde{x}_3(u), \frac{d\tilde{x}_1(u)}{du}, \frac{d\tilde{x}_2(u)}{du}, \frac{d\tilde{x}_3(u)}{du} \right) du, \end{aligned}$$

η οποία θα γράφεται συνοπτικότερα στη μορφή:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{L} \left(x_i(\sigma), \frac{dx_i(\sigma)}{d\sigma} \right) d\sigma = \int_{u_0}^{u_1} \mathcal{L} \left(\tilde{x}_i(u), \frac{d\tilde{x}_i(u)}{du} \right) du. \quad (9)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη αναλλοιωτότητας (9) ισχύει για κάθε επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρου, δηλαδή για κάθε αλλαγή παραμέτρου $\sigma \rightarrow u$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (8).

Είναι προφανές ότι η ισχύς της συνθήκης (9) εξαρτάται από τις ιδιότητες της Lagrangian συνάρτησης \mathcal{L} , και δεν αναμένεται να ισχύει πάντοτε. Η καθοριστική ιδιότητα της Lagrangian, η οποία εξασφαλίζει την ισχύ της (9) είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{L}(x_i, a\dot{x}_i) = a\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i), \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

δηλαδή ότι η συνάρτηση \mathcal{L} είναι *ομογενής πρώτης τάξεως ως προς \dot{x}_i* , $i=1,2,3$. Η ισχύς της συνθήκης (10) προκύπτει αμέσως, από τη μορφή (6) της Lagrangian του προβλήματος.

Το ακόλουθο Θεώρημα απαντά πλήρως στο ερώτημα αν και πότε ισχύει η συνθήκη αναλλοιωτότητας (9).

Θεώρημα [Weierstrass]: Η συνθήκη αναλλοιωτότητας (9) ισχύει αν και μόνον αν η Lagrangian $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i)$ είναι ομογενής συνάρτηση πρώτης τάξεως ως προς \dot{x}_i , $i=1,2,3$, δηλαδή αν και μόνον αν ισχύει η συνθήκη (10). ■

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο την κατεύθυνση (10) \Rightarrow (9) η οποία μας ενδιαφέρει εδώ. Έστω $\sigma = \varphi(u)$ μια επιτρεπτή αλλαγή παραμετροποίησης των εξισώσεων των ακτίνων $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (8). Στη νέα παραμετροποίηση οι εξισώσεις των ακτίνων παίρνουν τη μορφή

$$x_i = x_i(\varphi(u)) = \tilde{x}_i(u), \quad i=1,2,3,$$

και, άρα

$$\frac{dx_i(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d\tilde{x}_i(u)}{du} \cdot \frac{du}{d\sigma} = \frac{d\tilde{x}_i(u)}{du} \cdot (\varphi'(u))^{-1}. \quad (11)$$

Τότε, έχουμε

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{L}\left(x_i(\sigma), \frac{dx_i(\sigma)}{d\sigma}\right) d\sigma \stackrel{\substack{\text{λόγω} \\ \text{της (11)}}}{=} \int_{u_0}^{u_1} \mathcal{L}\left(\tilde{x}_i(u), \frac{d\tilde{x}_i(u)}{du} \cdot (\varphi'(u))^{-1}\right) \varphi'(u) du =$$

$$\stackrel{\substack{\text{λόγω} \\ \text{της (10)}}}{=} \int_{u_0}^{u_1} \mathcal{L}\left(\tilde{x}_i, \frac{d\tilde{x}_i}{du}\right) \cdot (\varphi'(u))^{-1} \cdot \varphi'(u) \cdot du = \int_{u_0}^{u_1} \mathcal{L}\left(\tilde{x}_i, \frac{d\tilde{x}_i}{du}\right) du,$$

η οποία αποδεικνύει το ζητούμενο.

- **Πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού του χρόνου όταν το πεδίο $c(x)$ είναι λείο. Συνθήκη στασιμότητας**

Προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό της μεταβολής του συναρτησιακού του χρόνου, $\tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma)$, που προκύπτει από τη μεταβολή $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$, όταν οι δύο καμπύλες $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$ και $\tilde{\gamma} : \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\sigma)$ είναι γειτονικές. Βλ. Σχήμα 3. Σε πρώτη φάση θα υποθέσουμε ότι οι καμπύλες αυτές είναι *λείες γειτονικές*, δηλαδή ότι οι παράγωγοι

$\dot{x}(\sigma)$ και $\dot{\tilde{x}}(\sigma)$ ορίζονται για κάθε $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$, και ισχύει $\|\dot{x}(\sigma)\| \cdot \|\dot{\tilde{x}}(\sigma)\| \neq 0$, οπότε το συναρτησιακό του Fermat θεωρείται ορισμένο στο σύνολο $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Strictly } C^1)$.

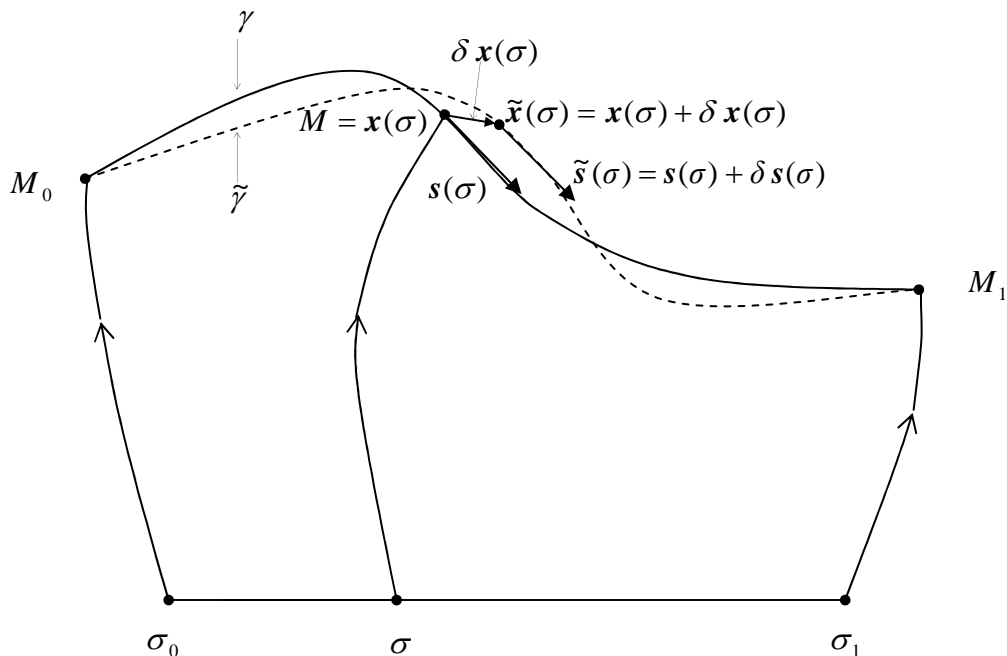
Επί προσθέτως, υποθέτουμε ότι και **το πεδίο** $c(\mathbf{x}) = c(x_1, x_2, x_3)$ **είναι λείο**, τουλάχιστον στην περιοχή του χώρου απ' όπου διέρχονται οι καμπύλες γ και $\tilde{\gamma}$, δηλαδή σε μια γειτονιά της καμπύλης γ .

Η παραμετροποίηση των δύο καμπυλών μπορεί να γίνει με την ίδια παράμετρο σ , στο ίδιο διάστημα $[\sigma_0, \sigma_1]$, εφ' όσον υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων τους. Τότε έχουμε (βλ. Σχήμα 3)

$$\tilde{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{x}(\sigma) + \delta \mathbf{x}(\sigma) \quad \text{και} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma) = \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma), \quad (12)$$

όπου οι ποσότητες $\delta \mathbf{x}(\sigma)$ και $\delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)$ μπορούν να θεωρηθούν ως απειροστά πρώτης τάξεως, εφ' όσον οι καμπύλες γ και $\tilde{\gamma}$ είναι γειτονικές. Ας δούμε κατ' αρχήν πως μεταβάλλεται η Langrangian \mathcal{L} του προβλήματος λόγω της μεταβολής $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$. Εάν $\tilde{\mathcal{L}}$ είναι η Langrangian που αντιστοιχεί στην καμπύλη $\tilde{\gamma}$, τότε

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{x}}(\sigma), \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\sigma)) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma) + \delta \mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)). \quad (13)$$



Σχήμα 3 (3.3.3): Λείες γειτονικές διαδρομές συνδέουσες τα σημεία M_0, M_1 .

Υποθέτοντας ότι η \mathcal{L} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς τις έξι μεταβλητές της $x_i(\sigma), \dot{x}_i(\sigma), i = 1, 2, 3$, (εδώ χρειάζονται οι απαιτήσεις λειότητας που θεωρήσαμε

ανωτέρω), και αναπτύσσοντας κατά Taylor την $\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma) + \delta\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma) + \delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma))$, γύρω από το σημείο $(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma)) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} \cdot \delta x_i(\sigma) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta \dot{x}_i(\sigma) \\ + O\left(\|\delta\mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Άρα, η μεταβολή του συναρτησιακού του χρόνου που αντιστοιχεί στη μεταβολή $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$:

$$\delta\tau(\gamma) = \tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L}) d\sigma,$$

εκφράζεται, με τη βοήθεια της (14), ως εξής:

$$\delta\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \cdot \delta x_i(\sigma) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i(\sigma) \right\} d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} O\left(\|\delta\mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right) d\sigma. \quad (15)$$

Ο δεύτερος όρος μέσα στην αγκύλη του πρώτου ολοκληρώματος, ανωτέρω, μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i(\sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \left(\frac{dx_i(\sigma)}{d\sigma} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \cdot \frac{d}{d\sigma} (\delta x_i).$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία, και κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο όρο του πρώτου ολοκληρώματος της (15), οδηγούμεθα στη σχέση

$$\begin{aligned} \delta\tau(\gamma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i(\sigma) \right]_{\sigma_0}^{\sigma_1} + \\ + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} O\left(\|\delta\mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2\right) d\sigma. \end{aligned} \quad (16)$$

Όμως, τα σημεία M_0 και M_1 της καμπύλης γ δεν μεταβάλλονται. Άρα

$$\delta x_i(\sigma_0) = \delta x_i(\sigma_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

οπότε η (16) γίνεται

$$\delta\tau(\gamma) = \tau(\tilde{\gamma}) - \tau(\gamma) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathcal{O}(\|\delta \mathbf{x}(\sigma)\|^2, \|\delta \dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|^2) d\sigma. \quad (17)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα στη σχέση (17) είναι απειροστό δευτέρας τάξεως ως προς τη μεταβολή $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$ της καμπύλης γ . (Πρβλ. Σχέση (2α)!)

Κατά συνέπεια, και κατ' αναλογία με την έννοια της στασιμότητας μιας συνάρτησης N μεταβλητών, **η συνθήκη στασιμότητας για το συναρτησιακό του χρόνου $\tau(\gamma)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:**

Ορισμός 4 και Θεώρημα: Το συναρτησιακό $\tau(\cdot)$, ορισμένο επί του $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Strictly } C^1)$ με $c(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{D})$, είναι **στάσιμο** στην καμπύλη (ακτίνα) γ , αν και μόνον αν

$$\tau(\tilde{\gamma}) = \tau(\gamma) + \left\{ \begin{array}{l} \text{όροι δευτέρας τάξεως} \\ \text{ως προς τη μεταβολή} \\ \gamma \rightarrow \tilde{\gamma} \end{array} \right\} \quad (17) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma = 0,$$

για κάθε λεία καμπύλη $\tilde{\gamma}$ που είναι γειτονική της γ και έχει με αυτήν τα ίδια άκρα.

■ Η συνθήκη στασιμότητας,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma = 0, \quad (18)$$

ισοδυναμεί με τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1] \quad i=1,2,3. \quad (19)$$

Η απόδειξη της ανωτέρω ισοδυναμίας είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη⁽¹⁷⁾. Οι εξισώσεις (19) ονομάζονται **εξισώσεις Euler-Lagrange** του συναρτησιακού (1), και αποτελούν την κατάλληλη γενίκευση της συνθήκης στασιμότητας (2β) στην περίπτωση του συναρτησιακού $\tau(\gamma)$, ορισμένου επί του συνόλου $\mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Strictly } C^1)$, με $c(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{D})$. Η γενίκευση της συνθήκης

⁽¹⁷⁾ Υποδείξεις: Η κατεύθυνση (19) \Rightarrow (18) είναι προφανώς τετριμμένη. Η κατεύθυνση (18) \Rightarrow (19) αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο, αξιοποιώντας τη συνέχεια της ολοκληρωτέας και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $\delta x_i(\sigma)$ είναι αυθαίρετες συνεχείς συναρτήσεις (υποκειμένες, βέβαια, στη συνθήκη $\delta x_i(\sigma_0) = \delta x_i(\sigma_1) = 0$, η οποία δεν έχει επίπτωση εδώ).

στασιμότητας του $\tau(\gamma)$ όταν $\gamma \in \mathcal{D}(D; M_0, M_1; \text{Sectionally}C^1)$ και $c(x)$ είναι κατά τμήματα C^1 στο \bar{D} , θα αναπτυχθεί σε επόμενο εδάφιο.

Οι διαφορικές εξισώσεις (19) προέκυψαν υπό την προϋπόθεση ότι

$$x(\sigma_0) = M_0 \quad \text{και} \quad x(\sigma_1) = M_1, \quad (20)$$

όπου M_0, M_1 είναι δύο προκαθορισμένα σημεία του χωρίου D . Το πρόβλημα (19), (20) είναι ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών** (two-point boundary-value problem), η λύση του οποίου ορίζει την ακτίνα που συνδέει το σημείο M_0 με σημείο M_1 (ιδιοακτίνα, eigenray). Στην περίπτωση που έχουμε πολλές λύσεις, αυτό σημαίνει ότι η κυματική διαταραχή οδεύει από το σημείο M_0 στο σημείο M_1 μέσω πολλαπλών διαδρομών. Αυτό πράγματι συμβαίνει σε πολλές περιπτώσεις στη φύση, και προβλέπεται θαυμάσια από την Αρχή του Στασίμου Χρόνου (ή θεωρία ακτίνων).

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (19), (20) είναι, κατά κανόνα, δύσκολο να λυθεί απ' ευθείας. Γι' αυτό το λόγο διατυπώνουμε και επιλύουμε ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών** για τις εξισώσεις ακτίνων (19), από το οποίο προσδιορίζουμε τις ακτίνες που ξεκινούν από το αρχικό σημείο M_0 , με προκαθορισμένη κατεύθυνση. Το πρόβλημα αρχικών τιμών θα διατυπωθεί και θα σχολιασθεί στη συνέχεια.

Παρατήρηση 5: Το γεγονός ότι η Langrangian $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ είναι ομογενής ως προς \dot{x} , έχει μια ακόμη συνέπεια: Οι τρεις εξισώσεις (19), ανωτέρω, **δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους**. Εάν ισχύουν οι δύο εξ αυτών, τότε ισχύει και η τρίτη. Το γεγονός αυτό δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα στις εφαρμογές, όπου δύο εξισώσεις αρκούν για τον προσδιορισμό των ακτίνων. Συνήθως, εξ άλλου, αναζητούμε τις ακτίνες με τη βοήθεια καρτεσιανών εξισώσεων της μορφής, π.χ., $x_1 = f(x_3)$, $x_2 = g(x_3)$, (δηλαδή, επιλέγουμε ως παράμετρο τη μια συντεταγ-μένη), οπότε η τρίτη εξίσωση καθίσταται περιττή. ■

3.3.4 Διαφορικές εξισώσεις ακτίνων

Όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, η Αρχή του Στασίμου Χρόνου οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange, εξισώσεις (19) του εδαφίου 3.3.3, ως προς τις παραμετρικές συναρτήσεις $x_i(\sigma)$, $i = 1, 2, 3$, που ορίζουν την καμπύλη γ . Είναι σαφές ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτών, μας δίνουν καμπύλες (ακτίνες), οι οποίες καθιστούν το χρόνο διάδοσης της κυματικής διαταραχής στάσιμο. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε περαιτέρω τις εξισώσεις (19) του προηγούμενου εδαφίου, και θα εξάγουμε ορισμένα πρώτα γενικά συμπεράσματα για τις λύσεις τους, δηλαδή για τις ακτίνες δια των οποίων διαδίδεται η κυματική διαταραχή.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συγκεκριμένη μορφή της Langrangian για το συναρτησιακό του χρόνου, οι εξισώσεις (19) του εδαφίου 3.3.3, οδηγούν στις

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\dot{x}_i(\sigma) / \|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\sigma)\|}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0, \quad i=1,2,3. \quad (1)$$

Εάν θεωρήσουμε τώρα ότι η παράμετρος σ ταυτίζεται με το μήκος της καμπύλης (δηλαδή, $\sigma = \text{μήκος τόξου } M_0M$), τότε $\dot{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{s}(\sigma)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης, οπότε οι ανωτέρω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s_i(\sigma)}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0, \quad i=1,2,3, \quad \left(\begin{array}{l} \sigma = \text{μήκος τόξου} \\ \text{επί της ακτίνας} \end{array} \right) \quad (2\alpha)$$

ή, σε διανυσματική γραφή,

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{s}(\sigma)}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}(\sigma))} \right) = 0, \quad \left(\begin{array}{l} \sigma = \text{μήκος τόξου} \\ \text{επί της ακτίνας} \end{array} \right). \quad (2\beta)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις ονομάζονται **(διαφορικές) εξισώσεις ακτίνων**, και συχνά γράφονται στην φαινομενικά απλούστερη μορφή

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s_i}{c} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{c} \right) = 0, \quad (3\alpha)$$

ή, διανυσματικά,

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{s}}{c} \right) - \nabla \left(\frac{1}{c} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{s}}{c} \right) + \frac{\nabla c}{c^2} = 0. \quad (3\beta,\gamma)$$

Οι εξισώσεις (3) πρέπει, πάντως, να νοούνται όπως οι (2), δηλαδή ως εξισώσεις που ισχύουν πάνω στις ακτίνες διάδοσης, οι οποίες δεν είναι κατ' αρχήν δεδομένες, αλλά θα προκύψουν από τη λύση αυτών ακριβώς των εξισώσεων.

Αναλύοντας την παράγωγο $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{s}}{c} \right)$ παίρνουμε μια ακόμη παραλλαγή των εξισώσεων των ακτίνων:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\mathbf{s}}{c} \right) = \frac{d\mathbf{s}}{d\sigma} \cdot \left(\frac{1}{c} \right) + \mathbf{s} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{c} \right).$$

Ομως $c = c(x_1(\sigma), x_2(\sigma), x_3(\sigma))$, άρα

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{c} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{c} \right) \cdot \frac{dx_i}{d\sigma} = \nabla \left(\frac{1}{c} \right) \cdot \mathbf{s} = -\frac{1}{c^2} \nabla c \cdot \mathbf{s}.$$

Βάσει των δύο τελευταίων ταυτοτήτων, η (3γ) παίρνει τη μορφή:

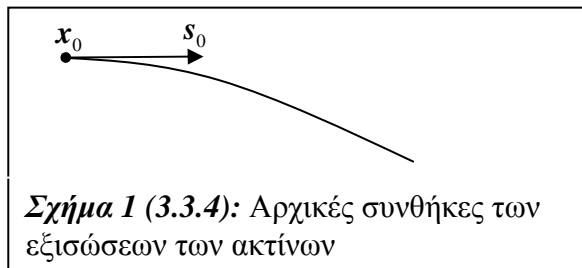
$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{(\nabla c \cdot s)s - \nabla c}{c}, \quad (3\delta)$$

η οποία εκφράζει απ' ευθείας το ρυθμό μεταβολής του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος σε κάθε σημείο, της ακτίνας, συναρτήσει της κατεύθυνσης s της ακτίνας και της κλίσης (gradient) ∇c της ταχύτητας διάδοσης στο ίδιο σημείο.

Θέτοντας $s/c = \xi$, οι εξισώσεις (3γ) γράφονται ως σύστημα δύο διανυσματικών εξισώσεων, οι οποίες ονομάζονται **κανονικές (διαφορικές) εξισώσεις ακτίνων**

$$\boxed{\frac{dx}{d\sigma} = c \cdot \xi, \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = -c^{-2} \cdot \nabla c}, \quad (4\alpha, \beta)$$

όπου $x = x(\sigma)$ είναι η παραμετρική μορφή των ακτίνων. Οι εξισώσεις (4) αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, το οποίο επιλύεται μονοσημάντως με τη βοήθεια αρχικών συνθηκών για τις άγνωστες συναρτήσεις $x(\sigma)$ και $\xi(\sigma)$. Οι κατάλληλες (από μαθηματική άποψη) αρχικές συνθήκες είναι οι τιμές $x(\sigma_0)$ και $\xi(\sigma_0)$ των αγνώστων συναρτήσεων στο σημείο αφετηρίας της ακτίνας. Από φυσική άποψη, εύλογα αρχικά δεδομένα είναι το σημείο αφετηρίας της ακτίνας, έστω x_0 , και η αρχική κατεύθυνση (αρχικό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα) της ακτίνας, έστω s_0 (βλ. και Σχήμα 1). Από τα x_0 και s_0 λαμβάνουμε αμέσως τις αρχικές τιμές $x(\sigma_0)$ και $\xi(\sigma_0)$:



$$x(\sigma_0) = x_0, \quad \xi(\sigma_0) = s_0 / c(x_0). \quad (5\alpha, \beta)$$

Οι εξισώσεις (4), (5) συνθέτουν το πρόβλημα αρχικών τιμών το οποίο συνήθως επιλύουμε για τον προσδιορισμό των ακτίνων διάδοσης

σε γενικό ανομοιογενές πεδίο $c = c(x)$.

Πορίσματα των διαφορικών εξισώσεων των ακτίνων

Πόρισμα 1: Εάν η ταχύτητα διάδοσης c είναι ανεξάρτητη μιας συντεταγμένης, έστω της x_2 , δηλαδή $c = c(x_1, x_3)$, τότε, κάθε ακτίνα που κείται επί του επιπέδου $[x_1, x_3]$ στην περιοχή ενός σημείου της, παραμένει διαρκώς επ' αυτού.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3α) για $i=2$, παίρνουμε

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s_2}{c} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{c} \right) = 0, \quad \text{εφ' όσον } c = c(x_1, x_3). \text{ Άρα, κατά μήκος της ακτίνας η}$$

συνιστώσα s_2 του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος s παραμένει σταθερή. Έτσι, εάν σε ένα σημείο της ακτίνας είναι $s_2 = 0$, θα είναι $s_2 = 0$ σε κάθε σημείο αυτής. Αρα, η τελευταία παραμένει διαρκώς επί του επιπέδου $[x_1 x_3]$.

Πόρισμα 2: Σε ομογενές μέσο οι ακτίνες είναι ευθείες.

Απόδειξη: Σε ομογενές μέσο έχουμε $c = \text{σταθερό}$. Αρα, η εξίσωση (3β) δίνει $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s}{c} \right) = 0$ και, περαιτέρω, $\frac{ds}{d\sigma} = 0$. Δηλαδή, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε ακτίνα είναι σταθερό σε κάθε σημείο της. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν οι ακτίνες είναι ευθείες.

Πόρισμα 3: Σε ανομοιογενές μέσο (χώρο) οι ακτίνες στρέφονται προς περιοχές μειούμενης ταχύτητας διάδοσης.

Απόδειξη: Το ερώτημα που εξετάζουμε (πώς στρέφεται η ακτίνα) είναι, προφανώς, τοπικό. Έτσι, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα σταθερό σημείο, έστω M , πάνω σε μια ακτίνα διάδοσης. Αναλύουμε το διάνυσμα $\mathbf{b} = \frac{ds}{d\sigma}$, που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του εφαπτομενικού διανύσματος s στο θεωρούμενο σημείο της ακτίνας, σε δύο συνιστώσες: την \mathbf{b}_{\parallel} , παράλληλη προς το διάνυσμα ∇c (υπολογιζόμενο στο ίδιο σημείο, επίσης) και την \mathbf{b}_{\perp} , κάθετη στο ∇c (βλ. και Σχήμα 2):

$$\mathbf{b} = \frac{ds}{d\sigma} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}.$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3δ), ανωτέρω, έχουμε

$$\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp} = \frac{(\nabla c \cdot s)s - \nabla c}{c}. \quad (\alpha)$$

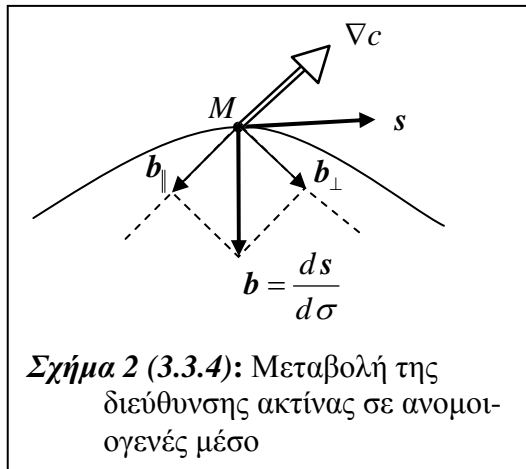
Εάν $\nabla c = 0$, τότε $\mathbf{b} = \frac{ds}{d\sigma} = 0$. Δηλαδή, η κατεύθυνση της ακτίνας δεν μεταβάλλεται στην περιοχή των σημείων στασιμότητας του πεδίου της ταχύτητας διάδοσης $c = c(x_1, x_2, x_3)$. Θεωρούμε τώρα $\nabla c \neq \mathbf{0}$, και πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τα δύο μέλη της σχέσεως (α) επί ∇c , οπότε παίρνουμε:

$$\mathbf{b}_{\parallel} \cdot \nabla c = \frac{(\nabla c \cdot s)^2 - (\nabla c)^2}{c}. \quad (\beta)$$

Όμως $(\nabla c \cdot s)^2 \leq (\nabla c)^2$, με την ισότητα να ισχύει μόνον όταν $\nabla c \parallel s$ (εφ' όσον $\nabla c \neq \mathbf{0}$). Εξ αυτού και της (β) συνάγεται αμέσως ότι

$$\mathbf{b}_{\parallel} \cdot \nabla c < 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}_{\parallel} = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)_{\parallel} \text{ αντίρροπο } \nabla c, \quad (\gamma)$$

εκτός εάν η διεύθυνση (ανεξαρτήτως φοράς) της ακτίνας είναι παράλληλη με την κλίση ∇c του πεδίου της ταχύτητας διάδοσης, οπότε



$$\mathbf{b}_{\parallel} \cdot \nabla c = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}_{\parallel} = \mathbf{0}. \quad (\delta)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη σχέση (γ), ανωτέρω, η συνιστώσα της μεταβολής του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{b} \cdot \Delta \sigma$, πάνω στον φορέα του διανύσματος ∇c είναι αντίρροπη προς ∇c , είναι δηλαδή όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Δεδομένου ότι το διάνυσμα ∇c κατευθύνεται προς περιοχές αυξανόμενης ταχύτητας c , συνάγουμε ότι οι ακτίνες κάμπτονται προς περιοχές μειούμενης ταχύτητας διάδοσης.

3.3.5 Συνθήκη στασιμότητας του συναρτησιακού χρόνου όταν το πεδίο $c(\mathbf{x})$ εμφανίζει ασυνέχειες. Διάθλαση και ανάκλαση

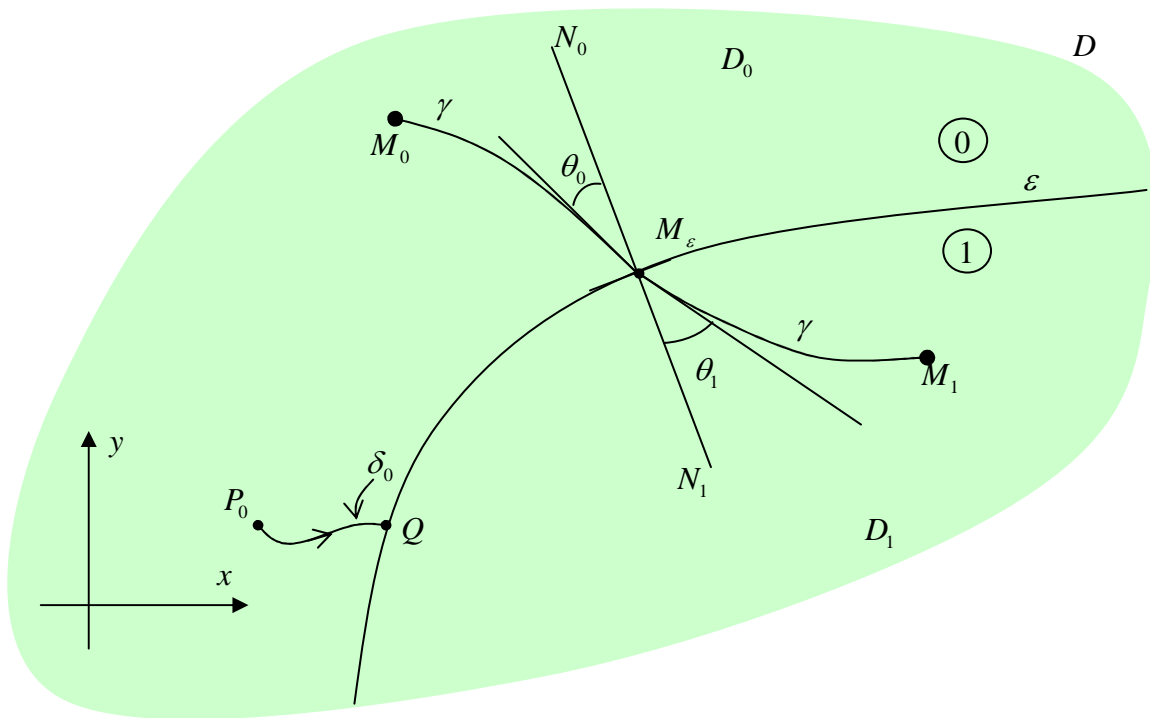
Θα μελετήσουμε τώρα τη συνθήκη στασιμότητας του συναρτησιακού του χρόνου

$$\tau(\gamma) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{ds}{c(M)}, \quad (1)$$

όταν το πεδίο $c(\mathbf{x}) \equiv c(M)$ της ταχύτητας διάδοσης της κυματικής διαταραχής παρουσιάζει **ασυνέχειες** κατά μήκος της διαδρομής (καμπύλης) γ . Στην περίπτωση αυτή η ακτίνα γ η οποία καθιστά στάσιμο το συναρτησιακό (1) χάνει τη λειότητά της (εμφανίζει **γωνιακό σημείο**) όταν συναντήσει την ασυνέχεια του πεδίου $c(\mathbf{x})$. Το γεγονός αυτό αντιστοιχεί στα φαινόμενα της **διάθλασης** και της **ανάκλασης** του κύματος σε διεπιφάνειες, τα οποία και ερμηνεύει κατά τον πρέποντα τρόπο, δηλαδή παράγοντας τους νόμους της διάθλασης (Snell) και της ανάκλασης.

Ας θεωρήσουμε κατ' αρχήν την κατάσταση που εμφανίζεται στο Σχήμα 1. Εντός του χώρου διάδοσης D υπάρχει μια επιφάνεια $\varepsilon = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = 0\}$ ⁽¹⁸⁾, επί της οποίας το πεδίο $c(\mathbf{x})$ παρουσιάζει ασυνέχεια.

⁽¹⁸⁾ Η επιφάνεια ε μπορεί βεβαίως να εκφραστεί και με τη βοήθεια παραμετρικής αναπαράστασης.



Σχήμα 1 (3.3.5): Διαδρομή διάδοσης $\gamma: M_0 \rightarrow M_\varepsilon \rightarrow M_1$, η οποία τέμνει την διεπιφάνεια ε επί της οποίας το πεδίο $c(\mathbf{x})$ παρουσιάζει ασυνέχεια

Με άλλα λόγια, ο χώρος διάδοσης D διαμερίζεται σε δύο υποχωρία D_0, D_1 ⁽¹⁹⁾, με κοινό σύνορο $\overline{D_0} \cap \overline{D_1} = \varepsilon$, έτσι ώστε το πεδίο $c(\mathbf{x})$ είναι **δυσφορές συνεχώς παραγωγίσιμο** (τύπου C^2) στα (ανοικτά) χωρία D_0 και D_1 , ενώ στην επιφάνεια ε είναι ασυνεχές. Παρά ταύτα, τα μονόπλευρα όρια του πεδίου $c(\mathbf{x})$ και της κλίσης του $\nabla c(\mathbf{x})$, όταν το σημείο \mathbf{x} τείνει στην επιφάνεια ε , θεωρούνται καλώς ορισμένα. Εάν $Q \in \varepsilon$ (βλ. Σχήμα 1), τα ανωτέρω μονόπλευρα όρια όταν το σημείο Q προσεγγίζεται από την πλευρά του χωρίου D_0 , θα συμβολίζονται ως

$$c(Q-) = \lim_{\substack{P_0 \rightarrow M \\ P_0 \in \delta_0 \subset D_0}} c(P_0) \quad \text{και} \quad \nabla c(Q-) = \lim_{\substack{P_0 \rightarrow M \\ P_0 \in \delta_0 \subset D_0}} \nabla c(P_0),$$

όπου δ_0 είναι (οποιαδήποτε) καμπύλη του χωρίου D_0 , η οποία περατούται στο $Q \in \varepsilon$, αλλά δεν εφάπτεται με την ε στο Q . Τα μονόπλευρα όρια των $c(\mathbf{x})$ και

⁽¹⁹⁾ Τα χωρία D_0, D_1 , νοούνται ως (τοπολογικώς) ανοικτά σύνολα, δηλαδή δεν περιέχουν τα συνοριακά τους σημεία. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι με $\overline{D_0}, \overline{D_1}$, συμβολίζουμε τα κλειστά περιβλήματα των D_0, D_1 , δηλαδή την ένωση των (ανοικτών) χωρίων με τα συνοριακά τους σημεία.

$\nabla c(\mathbf{x})$, όταν το σημείο Q προσεγγίζεται από την πλευρά του χωρίου D_1 , ορίζονται αντιστοίχως.

Από φυσική άποψη η επιφάνεια ε αποτελεί **διεπιφάνεια** μεταξύ δύο μέσων διάδοσης με διαφορετικές ιδιότητες. Αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1: Διάδοση ακουστικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

D_0 : Ατμόσφαιρα,

D_1 : Θάλασσα,

ε : Η διεπιφάνεια μεταξύ αέρα και θάλασσας (η οποία δεν είναι ευθύγραμμη στην περίπτωση κυματισμένης θάλασσας).

Παράδειγμα 2: Διάδοση ακουστικών κυμάτων

D_0 : Θάλασσα,

D_1 : Υλικό του πυθμένα,

ε : Η διεπιφάνεια μεταξύ θαλασσινού νερού και στερεού πυθμένα.

Μετά από αυτήν την εισαγωγική περιγραφή της γεωμετρίας και της φυσικής του προβλήματος της κυματικής διάδοσης σε χώρο με ασυνέχεια της ταχύτητας διάδοσης $c(\mathbf{x})$, επανερχόμεθα στη μελέτη του μαθηματικού προβλήματος, δηλαδή στη μελέτη της συνθήκης στασιμότητας του συναρτησιακού του χρόνου (1).

- Το πρόβλημα της διάθλασης

Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν την περίπτωση όπου το σημείο αφετηρίας M_0 (πομπός, πηγή της κυματικής διαταραχής) βρίσκεται στο χωρίο D_0 , και το καταληκτικό σημείο M_1 (δέκτης, σημείο μέτρησης της διαδεδομένης διαταραχής) βρίσκεται στο χωρίο D_1 . Αυτό είναι το πρόβλημα της διάθλασης διαδιδόμενης κυματικής διαταραχής (ήχου, φωτός, κ.λπ.), όταν αυτή διέρχεται από διεπιφάνεια όπου οι (σχετικές) φυσικές σταθερές παρουσιάζουν ασυνέχεια.

Έστω γ μια διαδρομή (καμπύλη) που συνδέει τα σημεία M_0 και M_1 , και τέμνει τη διεπιφάνεια ε . Η καμπύλη $\gamma: M_0 \rightarrow M_1$ αποτελεί το όρισμα του συναρτησιακού $\tau(\gamma)$, εξίσωση (1). Θα περιορίσουμε τις θεωρήσεις μας (ισοδυνάμως, το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού (1)!) σε καμπύλες οι οποίες τέμνουν τη διεπιφάνεια ε σε ένα και μόνο σημείο M_ε ⁽²⁰⁾. Κάθε τέτοια καμπύλη $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$ αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα $\gamma_0: M_0 \rightarrow M_\varepsilon$, το οποίο βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο $\overline{D_0}$, και το τμήμα $\gamma_1: M_\varepsilon \rightarrow M_1$, το οποίο βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο $\overline{D_1}$. Η γ υποτίθεται κατά τμήματα λεία, με πιθανό γωνιακό

⁽²⁰⁾ Ο περιορισμός αυτός δεν είναι ουσιώδης. Είναι απλώς ...βολικός. (Στη συνέχεια θα τον αναιρέσουμε). Η κατάσταση αυτή, δηλαδή να "μαγειρεύουμε" καταλλήλως το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού μας, προκειμένου να εστιασθούμε στη μια ή στην άλλη όψη του προβλήματος που εξετάζουμε, είναι τυπική στις μεταβολικές διατυπώσεις και αποτελεί στοιχείο της ομορφιάς και της γενικότητας των μεταβολικών αρχών.

σημείο το σημείο $M_\varepsilon = \gamma \cap \varepsilon$. Το σημείο M_ε , κοινό άκρο των γ_0, γ_1 , μεταβάλλεται, γενικώς, όταν μεταβάλλεται η γ . Το σύνολο των καμπυλών γ που ικανοποιούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις θα το συμβολίζουμε ως

$$\mathcal{D}(\overline{D} = \overline{D}_0 \cup \overline{D}_1; M_0, M_1; M_\varepsilon\text{-Sectionally } C^1).$$

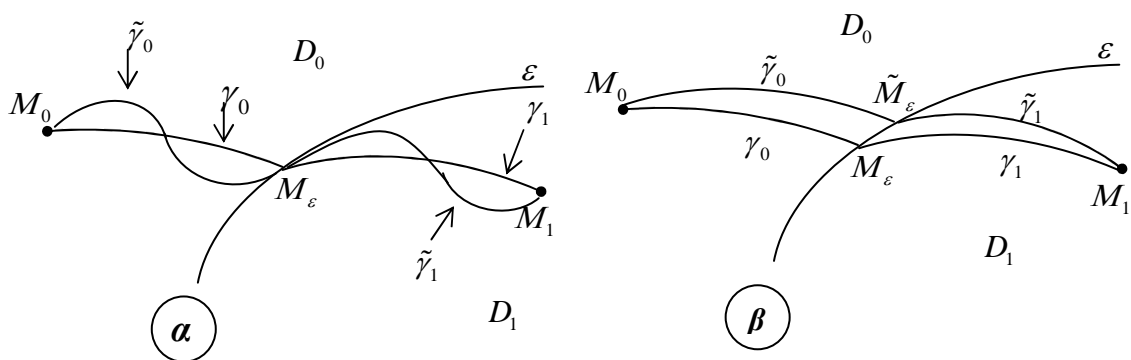
Το ανωτέρω σύνολο αποτελεί πλέον το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού του χρόνου $\tau(\gamma)$.

Θα αναζητήσουμε τώρα εκείνη τη διαδρομή $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$, η οποία **καθιστά στάσιμο** το συναρτησιακό του χρόνου **ως προς όλες τις γειτονικές** με αυτήν διαδρομές $\tilde{\gamma}: M_0 \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} \tilde{M}_\varepsilon \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1} M_1$. (Στο σημείο αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Ορισμό 3, του εδαφίου 3.3.3, όπου περιγράφεται με πληρότητα η έννοια των γειτονικών διαδρομών).

- Μεταβολές της γ με $M_\varepsilon = \text{σταθερό}$

Το σύνολο όλων των γειτονικών της γ διαδρομών περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, το σύνολο των διαδρομών

$$\mathcal{N}_1(\gamma; M_\varepsilon = \text{σταθ.}) = \{ \tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\overline{D}; M_0, M_1; M_\varepsilon\text{-Sectionally } C^1) : \tilde{\gamma} \text{ είναι γειτονική της } \gamma \text{ και τέμνει την διεπιφάνεια } \varepsilon \text{ στο ίδιο σημείο } M_\varepsilon \}.$$



Σχήμα 2 (3.3.5): Γειτονικές διαδρομές της $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$. Το γωνιακό σημείο M_ε μπορεί να κρατείται σταθερό (α), ή να κινείται επί της ε (β)

Βλ. Σχήμα 2α. Περιοριζόμενοι, προς στιγμήν, στο ανωτέρω σύνολο των γειτονικών διαδρομών (οι οποίες περνούν όλες από το ίδιο M_ε), παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό του χρόνου γράφεται ως

$$\tau(\gamma) = \int_{M_0}^{M_\varepsilon} \frac{ds}{c(M)} + \int_{M_\varepsilon}^{M_1} \frac{ds}{c(M)} \equiv \tau_{0\varepsilon}(\gamma_0) + \tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1), \quad (2)$$

και κάθε ένας από τους δύο όρους $\tau_{0\varepsilon}(\gamma_0)$, $\tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1)$, έχει σταθερά άκρα. Επί πλέον, το πεδίο $c(M)$ είναι λείο κατά μήκος των τμημάτων γ_0 και γ_1 της καμπύλης γ , τα οποία αποτελούν τα ορίσματα των επί μέρους συναρτησιακών $\tau_{0\varepsilon}(\gamma_0)$ και $\tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1)$, αντιστοίχως. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται η σχέση (16) του εδαφίου 3.3.3, ξεχωριστά στο κάθε ένα συναρτησιακό $\tau_{0\varepsilon}(\gamma_0)$, $\tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1)$, εκ της οποίας συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma = 0, \quad (3\alpha)$$

$$\int_{\sigma_\varepsilon}^{\sigma_1} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(\sigma) \right] d\sigma = 0, \quad (3\beta)$$

για αυθαίρετες μεταβολές

$$\delta \mathbf{x}(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_\varepsilon], \quad \delta \mathbf{x}(\sigma_0) = \delta \mathbf{x}(\sigma_\varepsilon) = 0, \quad (4\alpha)$$

και

$$\delta \mathbf{x}(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_\varepsilon, \sigma_1], \quad \delta \mathbf{x}(\sigma_\varepsilon) = \delta \mathbf{x}(\sigma_1) = 0, \quad (4\beta)$$

όπου σ_ε είναι η τιμή της παραμέτρου που αντιστοιχεί στο σημείο M_ε (δηλαδή $\mathbf{x}(\sigma_\varepsilon) = M_\varepsilon$). Άρα, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του λείου πεδίου $c(\mathbf{x})$, εδάφιο 3.3.3, σχέσεις (18), (19), συμπεραίνουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma \in [\sigma_0, \sigma_\varepsilon], \quad i = 1, 2, 3, \quad (5\alpha)$$

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\mathcal{L}(\mathbf{x}(\sigma), \dot{\mathbf{x}}(\sigma))}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma \in [\sigma_\varepsilon, \sigma_1], \quad i = 1, 2, 3, \quad (5\beta)$$

ισχύουν κατά μήκος της ακτίνας διάδοσης γ , **τώρα όμως ισχύουν κατά τμήματα**: Η εξίσωση (5α) ισχύει στο τμήμα $\gamma_0: M_0 \rightarrow M_\varepsilon$, ενώ η εξίσωση (5β) ισχύει στο τμήμα $\gamma_1: M_\varepsilon \rightarrow M_1$. Βέβαια, το σημείο M_ε δεν είναι γνωστό, πράγμα που σημαίνει ότι οι δύο εξισώσεις (5α) και (5β) δεν αρκούν για τον προσδιορισμό της ακτίνας $\gamma: M_0 \rightarrow M_\varepsilon \rightarrow M_1$. Οι ελλείψεις συνθήκες θα προσδιορισθούν στη συνέχεια, επεκτείνοντας τη συνθήκη στασιμότητας ούτως ώστε να καλύπτει και μεταβολές της διαδρομής γ , οι οποίες μεταβάλλουν και το σημείο $M_\varepsilon = \gamma \cap \varepsilon$. Βλ. Σχήμα 2β.

- Μεταβολές της γ με M_ε κινούμενο επί της διεπιφάνειας ε

Η σχέση (2) ισχύει και πάλι, δηλαδή και στην περίπτωση μεταβαλλόμενου M_ε έχουμε

$$\delta\tau(\gamma) = \delta\tau_{0\varepsilon}(\gamma_0) + \delta\tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1). \quad (6)$$

Κατά συνέπεια, ο προσδιορισμός της πρώτης μεταβολής $\delta\tau(\gamma)$ όταν μεταβάλλεται και το ενδιάμεσο (γωνιακό) σημείο $M_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, ανάγεται σε δύο απλούστερα προβλήματα, δηλαδή στον προσδιορισμό των μεταβολών $\delta\tau_{0\varepsilon}(\gamma_0)$ και $\delta\tau_{\varepsilon 1}(\gamma_1)$ των δύο επί μέρους συναρτησιακών, ορισμένων στα σύνολα $\mathcal{D}(D_1; M_0, M_\varepsilon; \text{Strictly}C^1)$ και $\mathcal{D}(D_2; M_\varepsilon, M_1; \text{Strictly}C^1)$, αντιστοίχως. Η αναγωγή στην προηγούμενη περίπτωση δεν είναι όμως πλήρης, διότι στα προβλήματα αυτά, έχουμε το ένα άκρο σταθερό, ενώ **το άλλο άκρο κινείται πάνω σε μία δοθείσα (γνωστή) επιφάνεια**. Το πρόβλημα αυτό μελετάται διεξοδικά στο Συμπλήρωμα 1 του εδαφίου 3.3.3, όπου και παραπέμπεται ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τους μαθηματικούς χειρισμούς.

Δεδομένου ότι κατά μήκος των τμημάτων γ_0 και γ_1 , των ακτίνων ισχύουν οι συνθήκες εξισώσεις ακτινών (βλ. ανωτέρω, σχέσεις (5)), η ουσιώδης επί πλέον πληροφορία που περιμένουμε να προσδιορίσουμε από τη συνθήκη στασιμοποίησης του συναρτησιακού (1), όταν μεταβάλλεται και το σημείο $M_\varepsilon = \gamma \cap \varepsilon$, είναι συνθήκες στο σημείο M_ε . Κατά συνέπεια, μπορούμε, χωρίς ουσιώδη βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε τα σημεία M_0 και M_1 αρκετά κοντά στη διεπιφάνεια, ώστε οι ακτίνες διάδοσης $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$ να είναι αναπαραστάσιμες κατά ρητό (όχι παραμετρικό) τρόπο⁽²¹⁾. Εισάγουμε λοιπόν την αναπαράσταση

$$\gamma = \{(x, y, z) \in D: y = y(x), z = z(x)\}, \quad (7)$$

όπου $y(x)$ και $z(x)$ είναι κατά τμήματα C^1 συναρτήσεις, με πιθανό γωνιακό σημείο στη θέση $x = x_\varepsilon$. Το συναρτησιακό (1) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\tau(\gamma; M_\varepsilon) = \int_{M_0}^{M_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}}{c(x, y(x), z(x))} dx = \left(\int_{M_0}^{M_\varepsilon} + \int_{M_\varepsilon}^{M_1} \right) \left(\frac{\sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}}{c(x, y(x), z(x))} dx \right). \quad (8)$$

Το σημείο M_ε εισάγεται τώρα ως όρισμα στο συναρτησιακό του χρόνου (8), διότι μεταβάλλεται, και αυτή η μεταβολή του συμβάλλει στη γενική μεταβολή του συναρτησιακού.

⁽²¹⁾ Η μικρή αυτή αλλαγή της τοποθέτησης του προβλήματος (η οποία δεν μειώνει την αξία των αποτελεσμάτων που θα βρούμε) απλοποιεί δραματικά τους μαθηματικούς χειρισμούς στην περίπτωση όπου το γωνιακό σημείο M_ε (ή ένα ακραίο σημείο M_i , $i = 0, 1$) κινείται σε μια δεδομένη επιφάνεια.

Το μεταβολικό πρόβλημα:

$$\delta \mathcal{F}(\gamma; M_\varepsilon) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \forall \gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1, \text{ με } \gamma_0 \text{ και } \gamma_1 \text{ } C^1 \text{ καμπύλες} \\ \text{με σταθερά ακραία σημεία } M_0 \text{ και } M_1, \text{ και με} \\ \text{πιθανό γωνιακό σημείο το } M_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon), \text{ και} \\ \forall \delta x_\varepsilon, \delta y_\varepsilon, \delta z_\varepsilon \in \mathbb{R}, \text{ υπό τον περιορισμό } M_\varepsilon \in \varepsilon \end{array} \right. \quad (9)$$

για το γενικότερο συναρτησιακό

$$\mathcal{F}(\gamma; M_\varepsilon) = \left(\int_{M_0}^{M_\varepsilon} + \int_{M_\varepsilon}^{M_1} \right) F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) dx, \quad (10)$$

μελετάται διεξοδικά στο Συμπλήρωμα 2 αυτού του εδαφίου. Όπως αποδεικνύεται εκεί, το μεταβολικό πρόβλημα (9) για το συναρτησιακό (10) (με σταθερά ακραία σημεία M_0 και M_1 , και γωνιακό σημείο $M_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ κινούμενο πάνω στη δεδομένη επιφάνεια $\varepsilon = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = 0\}$), ισοδυναμεί με τις ακόλουθες συνθήκες:

i) **Τις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_\varepsilon], \quad (11\alpha)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \quad \forall x \in [x_\varepsilon, x_1], \quad (11\beta)$$

και

ii) **Τις γωνιακές συνθήκες Weierstrass-Erdmann**

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} F - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \frac{\partial F}{\partial z'} \right]_{x=x_\varepsilon^-}^{x=x_\varepsilon^+} = 0, \quad P_\varepsilon \in \varepsilon, \quad (12\alpha)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} F - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_\varepsilon^-}^{x=x_\varepsilon^+} = 0, \quad P_\varepsilon \in \varepsilon. \quad (12\beta)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός $[\Pi]_{x=x_\varepsilon^-}^{x=x_\varepsilon^+}$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει την τιμή του άλματος της ασυνεχούς ποσότητας $\Pi = \Pi(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ στη θέση ασυνέχειας $x = x_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} & \left[\Pi(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) \right]_{x=x_\varepsilon^-}^{x=x_\varepsilon^+} = \\ & = \Pi(x_\varepsilon^+, y(x_\varepsilon^+), y'(x_\varepsilon^+), \dots) - \Pi(x_\varepsilon^-, y(x_\varepsilon^-), y'(x_\varepsilon^-), \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Οι **διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange** (11α,β) είναι κατ' ουσίαν ίδιες με τις διαφορικές εξισώσεις (5α,β), ανωτέρω, υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι η Lagrangian $\mathcal{L}(x(\sigma), \dot{x}(\sigma))$ των τελευταίων προκύπτει από την Lagrangian $F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ των (11), με αλλαγή παραμετροποίησης της καμπύλης γ . Κατά συνέπεια οι εξισώσεις (11α,β) δεν μας παρέχουν νέα πληροφορία σε σύγκριση με τις ήδη ευρεθείσες εξισώσεις (5).

Οι **συνθήκες Weierstrass-Erdmann** (12α,β), όμως, οι οποίες ισχύουν στο γωνιακό σημείο $M_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, και οι οποίες προκύπτουν ως αναγκαίες συνθήκες ώστε να μηδενίζεται η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού (10) ως προς μεταβολές του σημείου $M_\varepsilon \in \varepsilon$, **μας παρέχουν ουσιωδώς νέα πληροφορία**, σε σύγκριση με τις ήδη ευρεθείσες εξισώσεις των ακτίνων. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές, ορισμένες ποσότητες, εξαρτώμενες τόσο από τη συνάρτηση $F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ (Lagrangian του μεταβολικού προβλήματος), όσο και από την επιφάνεια $\varepsilon = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = 0\}$ επί της οποίας κινείται το γωνιακό σημείο M_ε , παραμένουν συνεχείς στο σημείο αυτό. Οι συνθήκες αυτές μας παρέχουν λοιπόν την πληροφορία η οποία μας επιτρέπει να “συναρμόσουμε” τα δύο τμήματα γ_0 και γ_1 , της καμπύλης $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$, στο σημείο M_ε . Γι' αυτό το λόγο ονομάζονται και **συνθήκες συναρμογής (matching conditions)**.

Παρά το περίπλοκο της μορφής τους, οι συνθήκες (12α, β) έχουν μια πολύ απλή και εξαιρετικά ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία, την οποία θα παρουσιάσουμε αμέσως.

- Γεωμετρική ερμηνεία των συνθηκών συναρμογής στην περίπτωση της διάθλασης

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να λάβουμε ως αρχή του συστήματος των αξόνων $[Oxyz]$ το σημείο M_ε . Λαμβάνουμε ως άξονα $M_\varepsilon z$ την κάθετη κατεύθυνση στη διεπιφάνεια ε (βλ. Σχήμα 3) και ως επίπεδο $[M_\varepsilon xy]$ το επίπεδο το εφαπτόμενο στην επιφάνεια ε στο σημείο M_ε . Τέλος, επιλέγουμε ως άξονα $M_\varepsilon x$ την τομή του εφαπτομένου (στην ε) επιπέδου με το επίπεδο $[n(M_\varepsilon), s(M_\varepsilon^-)]$, το οποίο ορίζεται από τα διανύσματα $n(M_\varepsilon)$ και $s(M_\varepsilon^-)$, όπου $n(M_\varepsilon) = k$ είναι το μοναδιαίο

κάθετο στη διεπιφάνεια ε (στο σημείο M_ε), και $s(M_\varepsilon^-)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο στην ακτίνα γ_0 (στο σημείο M_ε), λαμβανόμενο ως μονόπλευρο όριο του $s(M)$ όταν $M \rightarrow M_\varepsilon^-$. Με βάση τις ανωτέρω επιλογές έχουμε ότι

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{για } x = x_\varepsilon. \quad (14)$$

Επίσης, λόγω της ειδικής μορφής του συναρτησιακού του χρόνου, έχουμε ότι

$$F(x, y, y', z, z') = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{c(x, y, z)}, \quad (15\alpha)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{c(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{c(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}. \quad (15\beta)$$

Τα μονόπλευρα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα, $s(M_\varepsilon^\mp)$, στην ακτίνα γ , στο σημείο M_ε (λαμβανόμενα ως μονόπλευρα όρια του $s(M)$ όταν $M \rightarrow M_\varepsilon^\mp$), δίδονται από τις σχέσεις:

$$s(M_\varepsilon^-) = \left. \frac{(1, y', z')}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right|_{x=x_\varepsilon^-} = \left. \frac{(1, 0, z')}{\sqrt{1 + z'^2}} \right|_{x=x_\varepsilon^-}, \quad (16\alpha)$$

λόγω της τελευταίας των (14), και

$$s(M_\varepsilon^+) = \left. \frac{(1, y', z')}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right|_{x=x_\varepsilon^+}. \quad (16\beta)$$

Βάσει των σχέσεων (14), (15) και (16), η (12β) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left[0 \cdot F - \left(0 + 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \cdot 0 \right] \Big|_{x=x_\varepsilon^-} = \\ & = \left[0 \cdot F - \left(0 + 0 \cdot y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \frac{y'}{c(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right] \Big|_{x=x_\varepsilon^+} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 0 = y'(x_\varepsilon^+) \cdot z'(x_\varepsilon^+). \end{aligned} \quad (17\alpha)$$

Η συνθήκη (17α) είναι εξόχως ενδιαφέρουσα. Σύμφωνα με αυτήν, είτε $y'(x_\varepsilon^+) = 0$, είτε $z'(x_\varepsilon^+) = 0$, χωρίς – κατ' αρχήν – να απαγορεύεται οι δύο μηδενισμοί να ισχύουν ταυτόχρονα. Εάν η ακτίνα γ όντως εισέρχεται στο μέσον D_1 , τότε θα πρέπει

$z'(x_\varepsilon +) \neq 0$. Άρα, στην περίπτωση αυτή, υποχρεωτικά $y'(x_\varepsilon +) = 0$. Δηλαδή το $s(M_\varepsilon +)$ κείται στο επίπεδο των n και $s(M_\varepsilon -)$. Κατά συνέπεια ισχύει ο ακόλουθος

1^{ος} νόμος της διάθλασης: Η διαθλώμενη ακτίνα βρίσκεται (τοπικά, στην περιοχή του σημείου διάθλασης) στο επίπεδο της προσπίπτουσας και της καθέτου στη διεπιφάνεια.

Όπως, όμως, θα δούμε στη συνέχεια, διερευνώντας τη γεωμετρική σημασία της εξίσωσης (12α), υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι δυνατόν να υπάρξει διαθλώμενη ακτίνα. Τότε, δεν μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι $z'(x_\varepsilon +) \neq 0$, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να δεχθούμε το ενδεχόμενο $z'(x_\varepsilon +) = 0$, που σημαίνει ότι το τμήμα γ_1 της ακτίνας εφάπτεται στην διεπιφάνεια στο σημείο M_ε ! (Συγκρίνατε με το Πρόβλημα του εδαφίου 3.3.2). Στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη συναρμογής (17α) δεν συνεπάγεται ότι, κατ' ανάγκη, $y'(x_\varepsilon +) = 0$. Κάθε τιμή της παραγώγου $y'(x_\varepsilon +)$ –και άρα, κάθε αρχική κατεύθυνση της γ_1 επί του εφαπτομένου επιπέδου– είναι, κατ' αρχήν, δεκτή. Αυτή η παρατήρηση είναι το "κλειδί" για την κατανόηση των ακτίνων ορικής διάδοσης που βρίσκονται (κατά ένα τμήμα τους) πάνω στη διεπιφάνεια.

Κατόπιν των ανωτέρω, και υποθέτοντας ότι $z'(x_\varepsilon +) \neq 0 \Rightarrow y'(x_\varepsilon +) = 0$, η συνθήκη (12α) παίρνει τη μορφή

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c} - \left(0 + 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \frac{z'}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon -} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c} - \left(0 + 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' \right) \frac{z'}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon +} .$$

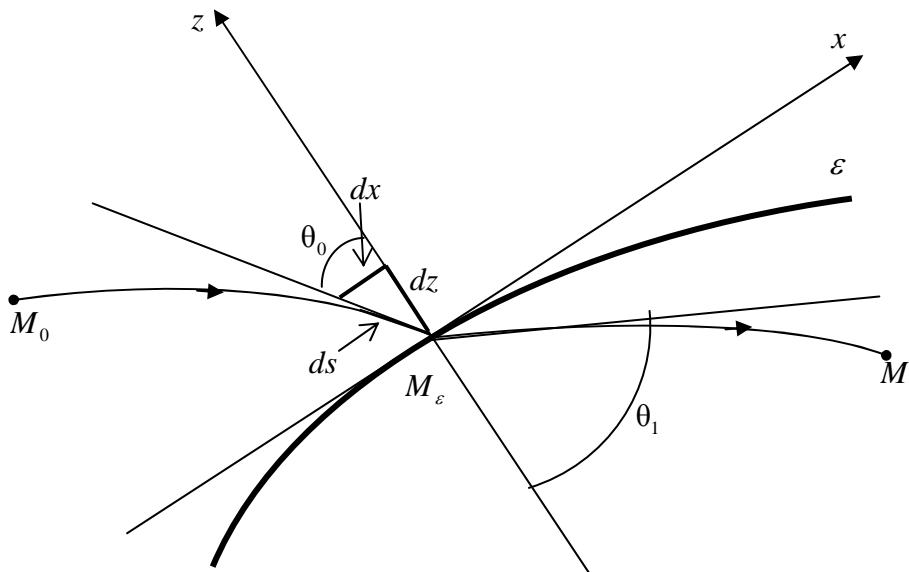
Η ποσότητα $\partial \varphi / \partial z$ είναι συνεχής στο M_ε και διάφορη του μηδενός, άρα μπορεί να απλοποιηθεί, οπότε η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\left[\frac{\sqrt{1+z'^2}}{c} - \frac{z'^2}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon -} = \left[\frac{\sqrt{1+z'^2}}{c} - \frac{z'^2}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon +} ,$$

ή, ισοδυνάμως,
$$\left[\frac{1}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon -} = \left[\frac{1}{c\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\varepsilon +} . \quad (*)$$

Όμως (βλ. και Σχήμα 3), όταν $x \rightarrow x_\varepsilon -$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds} = \sin \theta_0 ,$$



Σχήμα 3 (3.3.5): Γεωμετρία της διαθλώμενης ακτίνας στην περιοχή του σημείου διάθλασης

και, ομοίως
$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \right]_{x=x_\epsilon+} = \sin \theta_1.$$

Άρα, η σχέση (*), ανωτέρω, υπό την προϋπόθεση $z'(x_\epsilon+) \neq 0$, μας δίνει τον ακόλουθο νόμο της διάθλασης:

2^{ος} νόμος της διάθλασης (νόμος του Snell): Η γωνία πρόσπτωσης θ_0 και η γωνία διάθλασης θ_1 συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{\sin \theta_0}{c(M_\epsilon -)} = \frac{\sin \theta_1}{c(M_\epsilon +)}. \quad (17\beta)$$

Επιλύοντας την (17β) ως προς $\sin \theta_1$ λαμβάνουμε

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_0 \frac{c(M_\epsilon +)}{c(M_\epsilon -)}. \quad (18)$$

Εξ αυτής προκύπτει ότι, εάν

$$\sin \theta_0 \frac{c(M_\epsilon +)}{c(M_\epsilon -)} > 1, \quad (19)$$

τότε δεν υπάρχει γωνία θ_1 η οποία να ικανοποιεί την (17β). Δηλαδή, σύμφωνα με την αρχή του στασίμου χρόνου, δεν υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα η οποία να εισέρχεται στο μέσον D_1 . Τότε, όμως, η υπόθεση $z'(x_\epsilon+) \neq 0$, στην οποία βασίζεται η σχέση

(*), δεν είναι βάσιμη. Άρα, στην περίπτωση αυτή πρέπει να υποθέσουμε ότι $z'(x_\varepsilon +) = 0$. Τότε, η συνθήκη (12α) παίρνει τη μορφή

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{c} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{z'}{c\sqrt{1+z'^2}} \right] \Big|_{x=x_\varepsilon^-} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{1}{c} \right] \Big|_{x=x_\varepsilon^+},$$

η οποία ισοδυναμεί με την

$$\frac{\sin \theta_0}{c(M_\varepsilon^-)} = \frac{1}{c(M_\varepsilon^+)}. \quad (20)$$

Προφανώς, η σχέση (20) βρίσκεται σε συμφωνία με την εφαπτομενική εκφυγή της διαθλώμενης ακτίνας, στην περίπτωση αυτή. Η σημασία της σχέσεως (20) θα συζητηθεί και στη συνέχεια, σε σχέση με το φαινόμενο της ορικής διάδοσης πάνω σε διεπιφάνεια..

- Το πρόβλημα της ανάκλασης

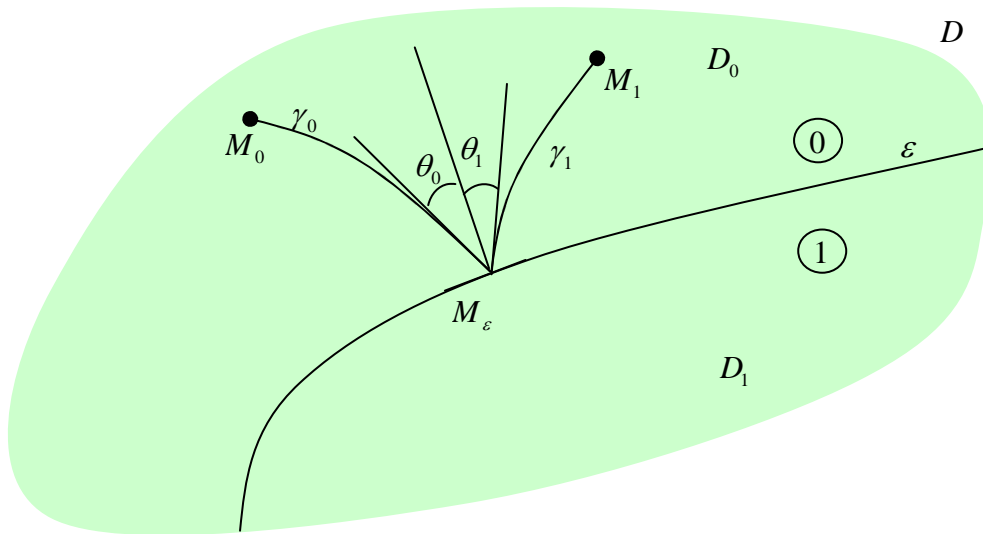
Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου τόσο τα σημεία αφετηρίας M_0 (πομπός, πηγή της κυματικής διαταραχής) και M_1 (δέκτης, σημείο μέτρησης της διαδόμενης διαταραχής), όσο και η ακτίνα $\gamma: M_0 \rightarrow M_1$ που τα συνδέει, βρίσκονται στο ίδιο χωρίο D_0 , αλλά η ακτίνα γ τέμνει τη διεπιφάνεια ε , σε ένα σημείο M_ε όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Αυτό είναι το πρόβλημα της (απλής) ανάκλασης κυματικής διαταραχής (ήχου, φωτός, κ.λπ.) από διεπιφάνεια, επί της οποίας οι (σχετικές) φυσικές σταθερές παρουσιάζουν ασυνέχεια.

Το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού του χρόνου $\tau(\gamma)$, σχέση (1), περιλαμβάνει, στην περίπτωση αυτή, όλες τις κατά τμήματα λείες καμπύλες

$$\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1,$$

με $\gamma_0: M_0 \rightarrow M_\varepsilon \in D_0$ και $\gamma_1: M_\varepsilon \rightarrow M_1 \in D_0$ να είναι τύπου C^1 , και το σημείο $M_\varepsilon \in \gamma \cap \varepsilon$ να είναι το μοναδικό γωνιακό σημείο της γ . Σε συμφωνία με τους μέχρι τώρα συμβολισμούς μας, το σύνολο των καμπυλών γ που ικανοποιούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις θα παρίσταται ως

$$\mathcal{D} \left(\overline{D_0} ; M_0, M_1 ; M_\varepsilon\text{-Sectionally } C^1 \right). \quad (21)$$



Σχήμα 4 (3.3.5): Διαδρομή διάδοσης $\gamma: M_0 \rightarrow M_\varepsilon \rightarrow M_1$, η οποία ανακλάται στη διεπιφάνεια ε

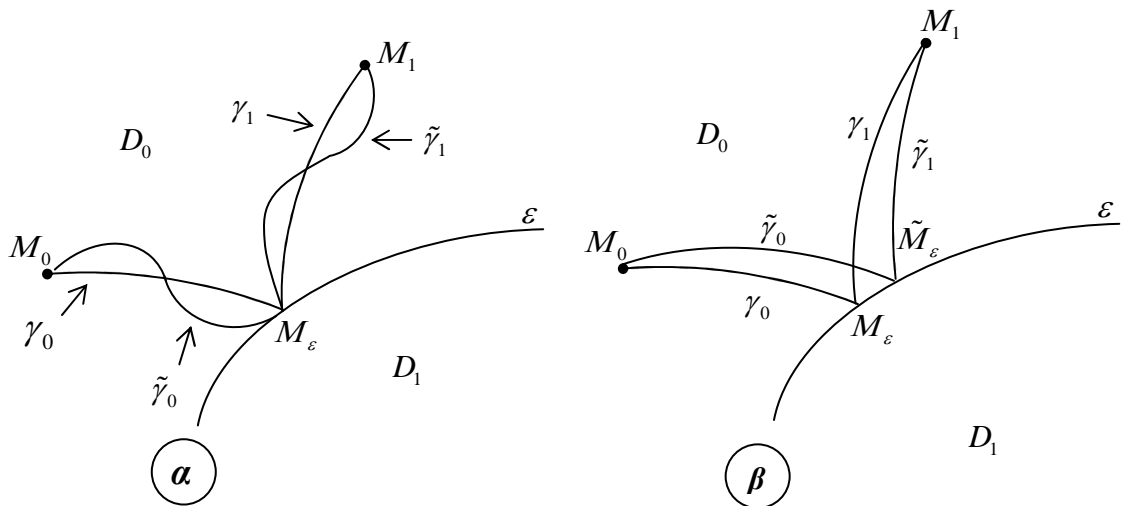
Το πρόβλημά μας τώρα συνίσταται στο να προσδιορίσουμε εκείνη τη διαδρομή (καμπύλη) $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$, η οποία **καθιστά στάσιμο το συναρτησιακό του χρόνου** (8) **ως προς όλες τις γειτονικές** με αυτήν διαδρομές $\tilde{\gamma}: M_0 \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} \tilde{M}_\varepsilon \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1} M_1 \in D_0$, οι οποίες ανήκουν στο πεδίο ορισμού (21) του συναρτησιακού αυτού⁽²²⁾. (Στο σημείο αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται και πάλι στον Ορισμό 3, του εδαφίου 3.3.3, όπου περιγράφεται με πληρότητα η έννοια των γειτονικών διαδρομών).

Η μεθοδολογία αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος στασιμοποίησης είναι τελείως παρόμοια με τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στη μελέτη του αντιστοίχου προβλήματος της διάθλασης και, ως εκ τούτου, δεν θα παρουσιασθεί αναλυτικά εδώ.

Στασιμοποιώντας το συναρτησιακό (8) (πρβλ., μορφή (10)) ως προς μεταβολές της γ οι οποίες δεν μεταβάλλουν το σημείο M_ε (βλ. Σχήμα 5α), λαμβάνουμε ως εξισώσεις Euler-Lagrange τις εξισώσεις (11α,β). Στασιμοποιώντας, στη συνέχεια, το ίδιο συναρτησιακό επί των καμπυλών που ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange, αλλά έχουν μεταβλητό σημείο M_ε (βλ. Σχήμα 5β), λαμβάνουμε, ακριβώς όπως και πρίν, τις γωνιακές συνθήκες Weierstrass-Erdmann (12α,β).

Επαναλαμβάνοντας τη γεωμετρική μελέτη που κάναμε στο πρόβλημα της διάθλασης, βρίσκουμε και πάλι τις σχέσεις (17α,β), τις οποίες ξαναγράφουμε εδώ χάριν ευκολίας του αναγνώστη:

⁽²²⁾ Ας σημειωθεί ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία καμπύλες γ , ανήκουσες στο πεδίο ορισμού (21) του συναρτησιακού του χρόνου, οι οποίες στασιμοποιούν το συναρτησιακό αυτό.



Σχήμα 5 (3.3.5): Γειτονικές διαδρομές της $\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_\varepsilon \xrightarrow{\gamma_1} M_1$. Το γωνιακό σημείο M_ε μπορεί να κρατείται σταθερό (α), ή να κινείται επί της ε (β)

$$y'(x_\varepsilon+) \cdot z'(x_\varepsilon+) = 0, \quad (17\alpha)$$

και

$$z'(x_\varepsilon+) \neq 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta_0}{c(M_\varepsilon-)} = \frac{\sin\theta_1}{c(M_\varepsilon+)}. \quad (17\beta)$$

Βέβαια, στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι

$$c(M_\varepsilon-) = c(M_\varepsilon+) = c(M_\varepsilon|_{D_0}), \quad (22)$$

εφ' όσον οι καμπύλες γ_0 και γ_1 βρίσκονται και οι δύο στο ίδιο χωρίο D_0 , και άρα το σημείο M_ε προσεγγίζεται πάντοτε από την πλευρά του χωρίου αυτού. Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τη σχέση (22) και υποθέτοντας $z'(x_\varepsilon+) \neq 0$, βρίσκουμε

$$y'(x_\varepsilon+) = 0, \quad (23\alpha)$$

και

$$\sin\theta_0 = \sin\theta_1. \quad (23\beta)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις εκφράζουν τους νόμους της ανάκλασης στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση:

1^{ος} νόμος της ανάκλασης: Η ανακλώμενη ακτίνα βρίσκεται (τοπικά, στην περιοχή του σημείο ανάκλασης) στο επίπεδο της προσπίπτουσας και της καθέτου στη διεπιφάνεια.

2^{ος} νόμος της ανάκλασης: Η γωνία πρόσπτωσης θ_0 και η γωνία ανάκλασης θ_1 είναι ίσες.

Άσκηση: Να μελετήσετε τα προβλήματα

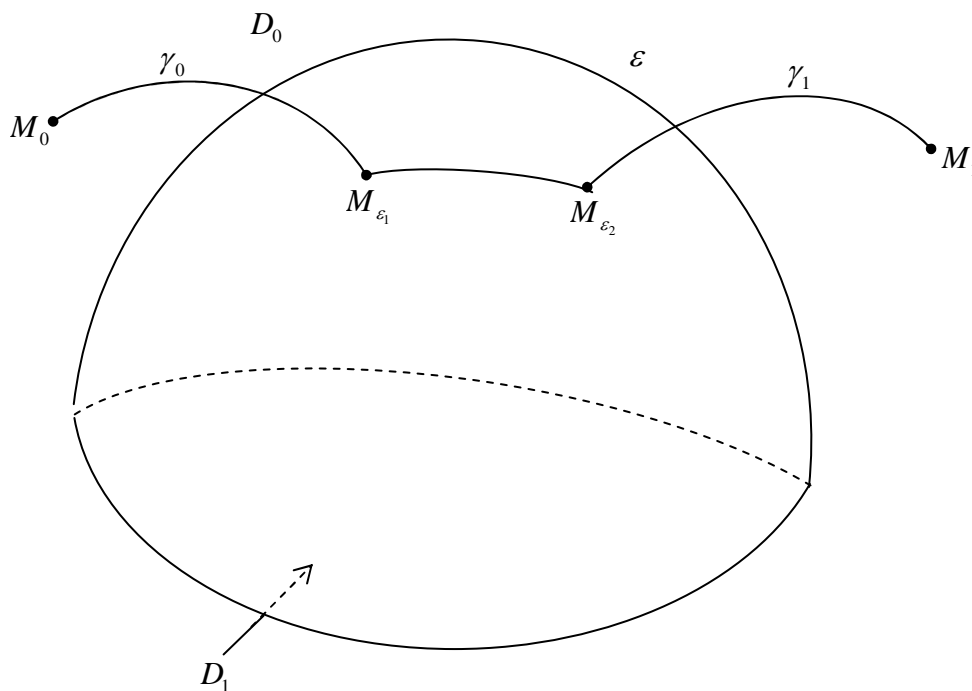
- i) Πολλαπλών ανακλάσεων,
- ii) Πολλαπλών διαθλάσεων,
- iii) Πολλαπλών διαθλάσεων και ανακλάσεων,

στις τρεις διαστάσεις, στην περίπτωση ανομοιογενούς μέσου με περισσότερες από μια διεπιφάνειες, με τη βοήθεια της μεταβολικής αρχής του στασίμου χρόνου.

- Ορική κυματική διάδοση μέσω διεπιφάνειας

Στο εδάφιο 3.3.2 μελετήσαμε το πρόβλημα της διάδοσης κυματικής διαταραχής από σημείο M_0 σε σημείο M_1 του ίδιου μέσου (π.χ. διάδοση του ήχου από M_0 σε M_1 , όπου τα σημεία M_0 και M_1 βρίσκονται στην ατμόσφαιρα, πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας), μέσω διαδρομών (ακτίνων) οι οποίες, διαθλώμενες, "εισέρχονται" σε άλλο μέσον (θάλασσα), οδεύουν "πάνω" στη διεπιφάνεια και, διαθλώμενες εκ νέου, "εξέρχονται" στο πρώτο μέσον (αέρας) και καταλήγουν στο σημείο M_1 . (Βλ. και Σχήμα 4, εδαφίου 3.3.2). Θα ονομάσουμε το φαινόμενο αυτό ορική κυματική διάδοση μέσω διεπιφάνειας.

Στο πρόβλημα που μελετήσαμε στο εδάφιο 3.3.2 κάναμε αρκετές απλοποιήσεις: Τα δύο μέσα θεωρήθηκαν ομογενή, και η διεπιφάνεια επίπεδη. Βάσει αυτών των απλοποιήσεων, το πρόβλημα στασιμοποίησης διατυπώθηκε με τη βοήθεια δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, και επιλύθηκε εύκολα με τα συνήθη εργαλεία του διαφορικού λογισμού. Στο παρόν εδάφιο, έχοντας αναπτύξει τα μαθηματικά εργαλεία με τα οποία χειριζόμαστε το γενικό πρόβλημα στασιμοποίησης συναρτησιακών της μορφής (8) ή (10), είμεθα πλέον σε θέση να μελετήσουμε το ανωτέρω πρόβλημα σε γενικό περιβάλλον, αποτελούμενο από ανομοιογενές μέσον με διεπιφάνεια γενικής μορφής.



Σχήμα 6 (3.3.5): Το πρόβλημα της ορικής κυματικής διάδοσης. Το τμήμα γ_ϵ της ακτίνας $\gamma: M_0 \rightarrow M_{\epsilon_1} \rightarrow M_{\epsilon_2} \rightarrow M_1$ βρίσκεται πάνω στη διεπιφάνεια ϵ .

Οι καμπύλες που πρέπει να θεωρήσουμε για τη μελέτη του παρόντος προβλήματος είναι της μορφής

$$\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0} M_{\varepsilon_1} \xrightarrow{\gamma_\varepsilon} M_{\varepsilon_2} \xrightarrow{\gamma_1} M_1,$$

όπου τα τμήματα

$$\gamma_0: M_0 \rightarrow M_{\varepsilon_1} \in D_0, \quad \gamma_\varepsilon: M_{\varepsilon_1} \rightarrow M_{\varepsilon_2} \in \varepsilon \quad \text{και} \quad \gamma_1: M_{\varepsilon_2} \rightarrow M_1 \in D_0$$

είναι λεία (τύπου C^1), ενώ η καμπύλη γ , στο σύνολό της, παρουσιάζει δύο γωνιακά σημεία, τα M_{ε_1} και M_{ε_2} , τα οποία κείνται (όπως και ολόκληρο το τμήμα γ_ε) επί της διεπιφάνειας ε . Η υπόθεση της C^1 -λειότητας των τμημάτων $\gamma_0, \gamma_\varepsilon, \gamma_1$ είναι συνυφασμένη με την υπόθεση της C^2 -λειότητας του πεδίου της ταχύτητας διάδοσης $c(x)$ στο χωρίο D_0 , καθώς και στη διεπιφάνεια ε .

Το συναρτησιακό του χρόνου (ή καλύτερα, το γενικότερο συναρτησιακό, της μορφής (10)) έχει, στην περίπτωση αυτή, τη μορφή

$$\mathcal{F}(\gamma; M_{\varepsilon_1}, M_{\varepsilon_2}) = \left(\int_{M_0}^{M_{\varepsilon_1}} + \int_{M_{\varepsilon_1}}^{M_{\varepsilon_2}} + \int_{M_{\varepsilon_2}}^{M_1} \right) F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) dx. \quad (24)$$

Η εξάρτηση από τα γωνιακά σημεία M_{ε_1} , M_{ε_2} , εμφανίζεται κατά ρητό τρόπο (explicitly) στο όρισμα του συναρτησιακού, εφ' όσον οι μεταβολές των σημείων αυτών συμβάλλουν στη γενική μεταβολή του συναρτησιακού μας.

Η μεθοδολογία αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος στασιμοποίησης είναι και πάλι παρόμοια με τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε στη μελέτη του αντιστοίχου προβλήματος της διάθλασης και, ως εκ τούτου, δεν θα παρουσιασθεί αναλυτικά εδώ.

Στασιμοποιώντας το συναρτησιακό (24) ως προς μεταβολές της γ οι οποίες δεν μεταβάλλουν τα σημεία M_{ε_1} και M_{ε_2} , ούτε το τμήμα γ_ε της καμπύλης γ (βλ. Σχήμα 6), λαμβάνουμε ως εξισώσεις Euler-Lagrange τις εξισώσεις (11α,β) για τα τμήματα γ_0 και γ_1 . Εργαζόμενοι ομοίως, κρατώντας τώρα τα $\gamma_0, \gamma_1, M_{\varepsilon_1}$ και M_{ε_2} σταθερά, και μεταβάλλοντας την καμπύλη γ_ε έτσι ώστε να βρίσκεται πάντοτε πάνω στη διεπιφάνεια ε , βρίσκουμε εξισώσεις Euler-Lagrange για το τμήμα γ_ε . Το πρόβλημα τώρα είναι **πρόβλημα στασιμοποίησης του συναρτησιακού** (24) **υπό τη συνθήκη**

$$\varphi(x, y(x), z(x)) = 0, \quad (25)$$

και απαιτεί για τη λύση του τη χρήση κατάλληλου **πολλαπλασιαστή Lagrange**. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα πρέπει εδώ να μελετήσει τη σχετική βιβλιογραφία (π.χ., το βιβλίο Calculus of Variations των I. M. Gelfand και S.V. Fomin), προκει-

μένου να υπολογίσει σωστά τις συνθήκες στασιμοποίησης του συναρτησιακού (24) υπό τον περιορισμό (25).

Στασιμοποιώντας, στη συνέχεια, το ίδιο συναρτησιακό επί των καμπυλών που ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange στα τμήματα $\gamma_0, \gamma_\varepsilon, \gamma_1$, αλλά έχουν μεταβλητό σημείο M_{ε_1} λαμβάνουμε, ακριβώς όπως στην περίπτωση της διάθλασης, τις γωνιακές συνθήκες Weierstrass-Erdmann (12α,β), για το σημείο αυτό. Ίδιες συνθήκες προκύπτουν, με παρόμοιο τρόπο, και για το δεύτερο γωνιακό σημείο M_{ε_2} .

Εισάγοντας τοπικά συστήματα αξόνων, με αρχή τα σημεία M_{ε_1} και M_{ε_2} , και επαναλαμβάνοντας τη γεωμετρική μελέτη που κάναμε στο πρόβλημα της διάθλασης, οδηγούμεθα σε αντίστοιχες γεωμετρικές ερμηνείες. Επί παραδείγματι, για το σημείο M_{ε_1} , η συνθήκη (12β) οδηγεί και πάλι στη σχέση (17α), την οποία ξαναγράφουμε εδώ χάριν ευκολίας του αναγνώστη:

$$y'(x_{\varepsilon_1+}) \cdot z'(x_{\varepsilon_1+}) = 0. \quad (17\alpha)$$

Στην περίπτωση όμως του παρόντος προβλήματος υποθέτουμε εφαπτομενική εκφυγή της διαθλώμενης ακτίνας, οπότε $z'(x_{\varepsilon_1+}) = 0$. Κατά συνέπεια, η συνθήκη (17α) γίνεται

$$z'(x_{\varepsilon_1+}) = 0 \quad \text{και} \quad y'(x_{\varepsilon_1+}) \text{ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή.} \quad (26\alpha)$$

Τότε η συνθήκη (12α) οδηγεί στη σχέση (20):

$$\frac{\sin \theta_0}{c(M_{\varepsilon_1-})} = \frac{1}{c(M_{\varepsilon_1+})}, \quad (26\beta)$$

όπου θ_0 είναι η γωνία πρόσπτωσης (του τμήματος) της ακτίνας γ_0 . Προφανώς, η συνθήκη (26β) μπορεί να ισχύει μόνον όταν

$$c(M_{\varepsilon_1-}) \leq c(M_{\varepsilon_1+}). \quad (27\alpha)$$

Εργαζόμενοι ομοίως λαμβάνουμε αντίστοιχες συνθήκες για το γωνιακό σημείο M_{ε_2} . Οι συνθήκες αυτές, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Euler-Lagrange που ισχύουν κατά τμήματα, μας επιτρέπουν να λύσουμε πλήρως το πρόβλημα στασιμοποίησης του συναρτησιακού (24), υπό τους τιθέντες περιορισμούς.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η ύπαρξη διαδρομών διάδοσης της κυματικής διαταραχής της μορφής

$$\gamma: M_0 \xrightarrow{\gamma_0 \in D_0} M_{\varepsilon_1} \xrightarrow{\gamma_\varepsilon \in \varepsilon} M_{\varepsilon_2} \xrightarrow{\gamma_1 \in D_0} M_1,$$

βρίσκεται σε συμφωνία με (προβλέπεται από) την αρχή του στασίμου χρόνου, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση

$$c(M_{\varepsilon}|_{D_0}) \leq c(M_{\varepsilon}|_{D_1}). \quad (27\beta)$$

3.4 Επίλυση των εξισώσεων των ακτίνων. Εφαρμογές στην περιβαλλοντική ακουστική

Στην ειδική περίπτωση όπου η κατανομή της ταχύτητας διάδοσης παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 1. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι σχέσεις

$$c = c(r, z), \quad \nabla c = \left(\frac{\partial c}{\partial r}, \frac{\partial c}{\partial z} \right), \quad (1\alpha, \beta)$$

οπότε οι διαφορικές εξισώσεις των ακτίνων, εξισώσεις (4α,β) του εδαφίου 3.3.4, γράφονται στη μορφή:

$$\frac{dx(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \xi(\sigma), \quad \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \nabla c, \quad (2\alpha, \beta)$$

όπου σ είναι το μήκος τόξου. Θέτοντας

$$x(\sigma) = (R(\sigma), Z(\sigma)) \quad \text{και} \quad \xi(\sigma) = (\xi(\sigma), \zeta(\sigma)), \quad (3\alpha, \beta)$$

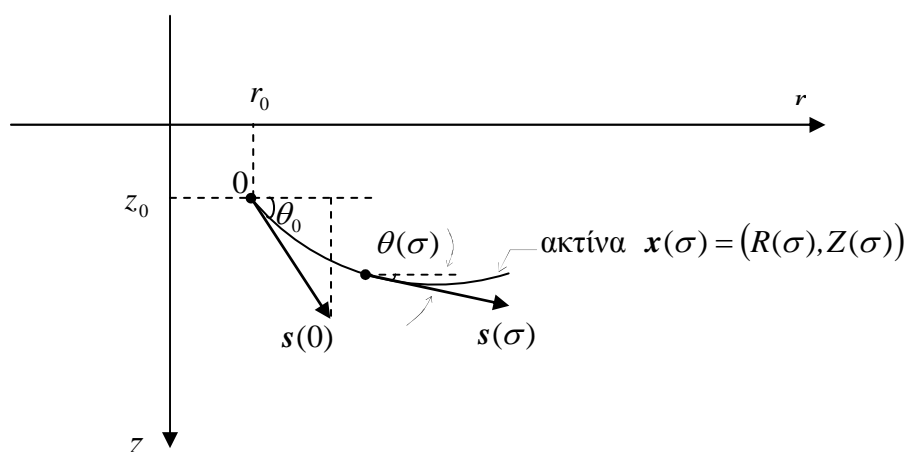
το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2) γράφεται στη μορφή

$$\frac{dR(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \xi(\sigma), \quad \frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} = c(r, z) \cdot \zeta(\sigma), \quad (4\alpha, \beta)$$

$$\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \frac{\partial c(r, z)}{\partial r}, \quad \frac{d\zeta(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{1}{c^2(r, z)} \cdot \frac{\partial c(r, z)}{\partial z}. \quad (4\gamma, \delta)$$

Όλα τα ορίσματα (r, z) της συνάρτησης $c(r, z)$ και των μερικών παραγώγων αυτής $\partial c(r, z)/\partial r$ και $\partial c(r, z)/\partial z$, που εμφανίζονται στις ανωτέρω σχέσεις (4α,β) και (4γ,δ), νοούνται ως

$$r = R(\sigma), \quad z = Z(\sigma).$$



Σχήμα 1 : Εξισώσεις ακτίνων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις (4) ορίζουν ένα μη-γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$dX_i(\sigma) = F_i(X_1(\sigma), X_2(\sigma), X_3(\sigma), X_4(\sigma)), \quad i = 1, 2, 3, 4]$$

όπου

$$\begin{aligned} X_1(\sigma) &= R(\sigma), & X_2(\sigma) &= Z(\sigma), \\ X_3(\sigma) &= \xi(\sigma), & X_4(\sigma) &= \zeta(\sigma). \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το σύστημα των πρωτοταξίων διαφορικών εξισώσεων (4α)-(4δ) επιλύεται ως πρόβλημα αρχικών τιμών, με αρχικά δεδομένα τη θέση εκκίνησης (r_0, z_0) και τη γωνία εκκίνησης (αρχικά κλίση) θ_0 της ακτίνας $x(\sigma)$:

$$R(\sigma=0) = r_0, \quad Z(\sigma=0) = z_0, \quad (5\alpha, \beta)$$

$$\frac{dR(\sigma=0)}{d\sigma} = \cos \theta_0, \quad \frac{dZ(\sigma=0)}{d\sigma} = \sin \theta_0. \quad (5\gamma, \delta)$$

(Βλ. και Σχήμα 1). Κάνοντας χρήση των εξισώσεων (4α) και (4β), οι αρχικές συνθήκες για την κλίση της ακτίνας, εξισώσεις (5γ) και (5δ), γράφονται ισοδυνάμως στην ακόλουθη μορφή:

$$\xi(\sigma=0) = \frac{\cos \theta_0}{c(r_0, z_0)}, \quad \zeta(\sigma=0) = \frac{\sin \theta_0}{c(r_0, z_0)}. \quad (5\gamma', \delta')$$

Τέλος, εάν με $\theta(\sigma)$ συμβολίσουμε την γωνία κλίσεως της ακτίνας $x(\sigma)$ στη γενική θέση σ , ισχύουν προφανώς οι ακόλουθες γεωμετρικές σχέσεις (βλ. Σχήμα 1):

$$\frac{dR}{d\sigma} = \cos \theta(\sigma), \quad \frac{dZ}{d\sigma} = \sin \theta(\sigma). \quad (6\alpha, \beta)$$

Στη συνέχεια αυτού του εδαφίου το πρόβλημα αρχικών τιμών (4), (5) θα λυθεί για περιπτώσεις όπου $c = c(z)$, δηλαδή $\partial c / \partial r = 0$. Στις περιπτώσεις αυτές η εξίσωση (4γ) μας δίδει

$$\frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = 0 \Rightarrow \xi(\sigma) = \text{σταθερά} = \xi(\sigma=0).$$

Τότε, η (4α) σε συνδυασμό με την (6α), δίδουν

$$\frac{\cos \theta(\sigma)}{c(z)} = \text{σταθερά} = \frac{\cos \theta_0}{c(z_0)} = q. \quad (7)$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση (7) εκφράζει το νόμο του Snell για στρωματοποιημένο (stratified) ανομοιογενές μέσο. ■

Με τη βοήθεια της (7) οι εξισώσεις (6α,β) γράφονται στη μορφή

$$\frac{1}{c(z)} \cdot \frac{dR}{d\sigma} = \frac{\cos\theta(\sigma)}{c(z)} = q, \quad (8\alpha)$$

$$\frac{1}{c(z)} \cdot \frac{dZ}{d\sigma} = \frac{\sin\theta(\sigma)c(z)}{c(z)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta(\sigma)}}{c(z)} = \frac{1}{c(z)}\sqrt{1-q^2 \cdot c^2(z)}. \quad (8\beta)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι οι δύο μεταβλητές $Z = Z(\sigma)$ και z , που χρησιμοποιούνται στις ανωτέρω εξισώσεις, κατ' ουσίαν ταυτίζονται. Και τούτο διότι, οι τιμές της ταχύτητας διάδοσης $c = c(z)$, η οποία υπεισέρχεται στις εξισώσεις αυτές, δεν είναι γενικές πεδιακές τιμές, αλλά είναι ακριβώς οι τιμές επί της ακτίνας $\mathbf{x}(\sigma) = (R(\sigma), Z(\sigma))$. Άρα, εν προκειμένω (δηλαδή στις εξισώσεις (8α,β)) ισχύει ότι $z \equiv Z(\sigma)$. Διαιρώντας κατά μέλη τις (8α) και (8β), και θέτοντας $z = Z$, λαμβάνουμε

$$\frac{dR}{dZ} = \frac{q \cdot c(Z)}{\sqrt{1-q^2 \cdot c^2(Z)}}. \quad (9)$$

Η διαφορική εξίσωση (9), η οποία προσδιορίζει την ακτίνα με αρχικά δεδομένα z_0, θ_0 (βλ. εξίσωση (7)), είναι τύπου χωριζομένων μεταβλητών, και άρα επιλύεται με απ' ευθείας ολοκλήρωση:

$$\int_{r_0}^R dr = \int_{z_0}^Z \frac{q \cdot c(z)}{\sqrt{1-q^2 \cdot c^2(z)}} \cdot dz \quad \text{ή}$$

$$R(Z) - r_0 = \int_{z_0}^Z \frac{q \cdot c(z)}{\sqrt{1-q^2 \cdot c^2(z)}} \cdot dz. \quad (10)$$

Η εξίσωση (10) επιλύεται αναλυτικά αν και μόνον αν το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της μπορεί να εκφρασθεί μέσω γνωστών συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε δύο τέτοια παραδείγματα.

- **Γραμμική κατανομή της ταχύτητας διάδοσης**, $c(z) = az + c_0$

Θα εξετάσουμε κατ' αρχήν την ειδική περίπτωση όπου η ταχύτητα διάδοσης c μεταβάλλεται γραμμικά κατά την κατακόρυφη διεύθυνση z ⁽²³⁾, δηλαδή

$$c = c(z) = a \cdot z + c_0, \quad c_0, a = \text{σταθερές}, \quad (11)$$

⁽²³⁾ Περίπτωση η οποία, όπως έχουμε ήδη συζητήσει, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε προβλήματα θαλάσσιας ακουστικής.

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα μπορεί να λυθεί εύκολα, με χρήση της εξίσωσης (7). Πράγματι, αν γράψουμε την (7) ως

$$\cos \theta(\sigma) = q \cdot c(z),$$

και διαφορίσουμε ως προς z , λαμβάνουμε

$$-\sin \theta(\sigma) \cdot \frac{d\theta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dz} = q \cdot \frac{dc}{dz} = q \cdot a.$$

Συνδυάζοντας την ανωτέρω εξίσωση με την (6β), σύμφωνα με την οποία $\frac{dZ}{d\sigma} = \sin \theta(\sigma)$, λαμβάνουμε τελικώς

$$\frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} = -qa = \text{σταθερά}.$$

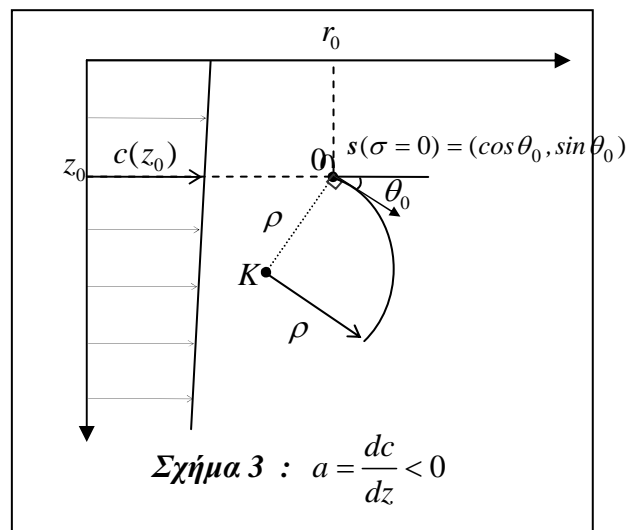
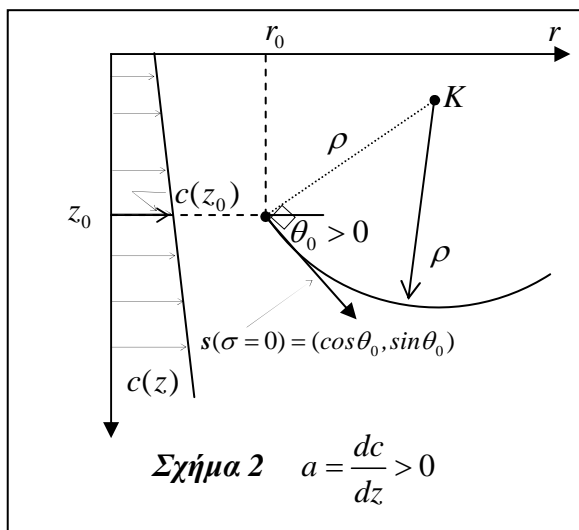
Όμως, είναι γνωστό ότι η ποσότητα $\kappa(\sigma) = \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma}$ παριστάνει την καμπυλότητα της ακτίνας $\mathbf{x}(\sigma) = (R(\sigma), Z(\sigma))$. Επομένως, στην εξεταζόμενη περίπτωση,

$$\kappa(\sigma) = \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} = -qa = \text{σταθερά}, \quad (12\alpha)$$

και άρα, η ακτίνα διάδοσης (ray) $\mathbf{x}(\sigma)$ είναι τόξο κύκλου, ακτίνας

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{c(z_0)}{|c_z \cdot \cos \theta_0|} = \text{σταθερά}. \quad (12\beta)$$

Οι ανωτέρω παρατηρήσεις επιτρέπουν την εύκολη γεωμετρική κατασκευή της πλήρους λύσεως του προβλήματος, αποφεύγοντας την επίπονη επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (4), με αρχικές συνθήκες (5).



Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την ακτίνα με αρχή το σημείο 0 και αρχική γωνία κλίσεως θ_0 , Σχήμα 2, σε περιβάλλον όπου η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται με το βάθος z . Από την εξίσωση (12α) υπολογίζουμε αμέσως την προσημασμένη τιμή της καμπυλότητας της ακτίνας αυτής

$$\kappa = -qa = -\frac{\cos\theta_0 \cdot a}{c(z_0)} < 0.$$

Λόγω της αρνητικής καμπυλότητας, η ακτίνα θα στρέφει τα *κοίλα* προς τα *άνω* όπως εικονίζεται στο Σχήμα 2, ανεξάρτητα από το πρόσημο της αρχικής γωνίας κλίσεως θ_0 . (Στο Σχήμα 2 έχει ληφθεί $\theta_0 > 0$).

Γνωρίζοντας την τιμή της καμπυλότητας κ υπολογίζουμε την ακτίνα $\rho = |\kappa|^{-1}$ και προσδιορίζουμε το κέντρο K του κύκλου ακτίνας ρ , ο οποίος διέρχεται από το σημείο 0 και έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο αυτό $s(\sigma = 0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

Στην περίπτωση περιβάλλοντος με μειούμενη προς τα κάτω ταχύτητα διάδοσης,

$a = \frac{dc}{dz} < 0$, η τιμή της καμπυλότητας θα είναι θετική, και η ακτίνα θα στρέφει τα

κοίλα προς τα *κάτω*, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 3. Με την βοήθεια του ανωτέρω παραδείγματος επαληθεύουμε την γενική αρχή που έχει ήδη διατυπωθεί, ότι δηλαδή *οι κοματικές ακτίνες καμπυλώνονται στρεφόμενες προς την περιοχή στην οποία η ταχύτητα διάδοσης ελαττώνεται*.

- Γενικό προφίλ ταχύτητας διάδοσης $c = c(z)$. Προσεγγιστική λύση

Με συστηματική χρήση των ανωτέρω αποτελεσμάτων μπορούμε να διατυπώσουμε έναν εύχρηστο αλγόριθμο προσεγγιστικής κατασκευής των ακτίνων⁽²⁴⁾, για περιβάλλοντα με *συνεχή κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας διάδοσης*, $c = c(z)$ (βλ. Σχήμα 4). Αυτό επιτυγχάνεται σε δύο βήματα ως ακολούθως:

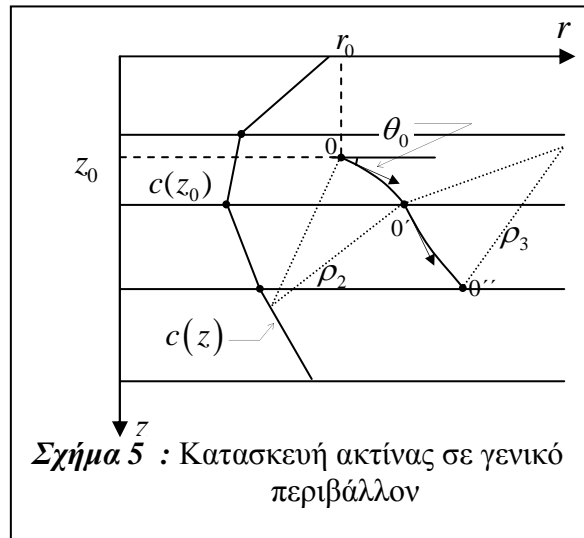
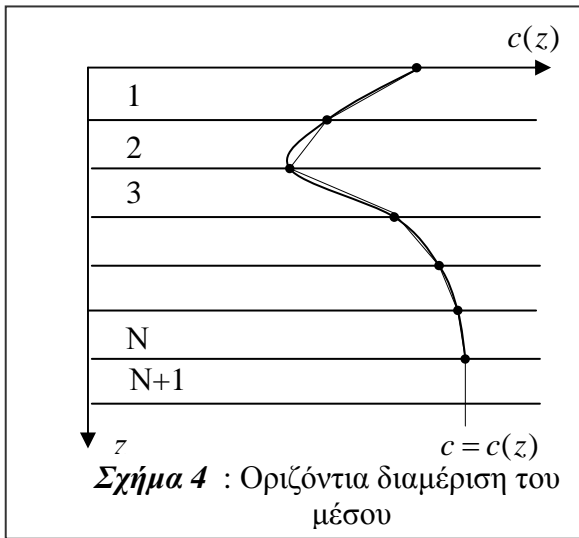
i) Κατ' αρχήν, διαμερίζουμε την περιοχή ενδιαφέροντος σε οριζόντια στρώματα αρκετά μικρού εύρους, έτσι ώστε σε καθένα από αυτά η ταχύτητα διάδοσης να μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση γραμμική (βλ. Σχήμα 4). Η συνεχής συνάρτηση $c(z)$ προσεγγίζεται, τότε, από τμηματικώς γραμμικά στοιχεία, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 4 (συνεχής και πολυγωνική γραμμή, αντιστοίχως).

ii) Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε γεωμετρικά την ακτίνα με δεδομένο σημείο εκκίνησης 0, και δεδομένη κλίση εκκίνησης θ_0 . Βλ. Σχήμα 5. Η κατασκευή γίνεται όπως ακριβώς περιγράψαμε ανωτέρω, αλλά το τόξο κύκλου περιορίζεται στο εσωτερικό του (κάθε) στρώματος. Όταν το τόξο κύκλου τμήσει το όριο του στρώματος (σημείο 0'), η διαδικασία επαναλαμβάνεται στο επόμενο στρώμα, θεωρώντας ως αρχικό σημείο το 0' και ως αρχική κλίση την κλίση του προηγούμενου τμήματος της ακτίνας στο 0'. Στο νέο στρώμα, όπου και πάλι η κατανομή της ταχύτητας διάδοσης είναι γραμμική (αν και με διαφορετική κλίση a), η ακτίνα θα είναι και πάλι τόξο κύκλου, διαφορετικού όμως κέντρου και διαφορετικής καμπυλότητας. Άρα, η κάθε ακτίνα θα αποτελείται από συνένωση τόξων κύκλων, το

⁽²⁴⁾ Και άρα, προσεγγιστικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων των ακτίνων, παρά το ότι οι τελευταίες δεν χρησιμοποιούνται ευθέως.

κάθε ένα από τα οποία περατούται στα όρια των στρωμάτων. Προφανώς, η ανωτέρω διαδικασία κατασκευής των ακτίνων προγραμματίζεται εύκολα και είναι εξαιρετικά γρήγορη. Επί πλέον, επειδή μπορούμε να επιτύχουμε πολύ καλή προσέγγιση της συνεχούς συναρτήσεως $c(z)$ από τμηματικώς γραμμικά στοιχεία (αυξάνοντας καταλλή-λως το πλήθος των χρησιμοποιουμένων στρωμάτων), η ανωτέρω ημιαναλυτική (ή γεωμε-τρική, αν προτιμάτε!) μέθοδος είναι και εξαιρετικά ακριβής.

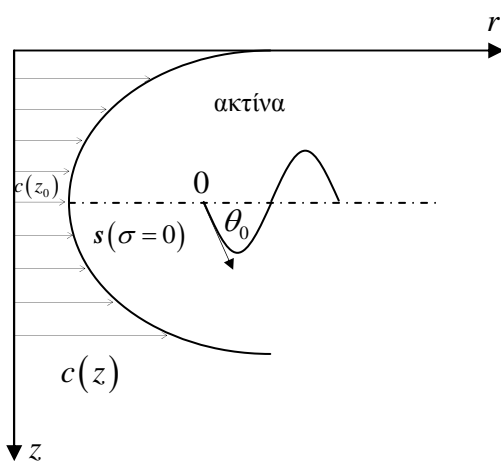
Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι η ανωτέρω μέθοδος γενικεύεται και στις περιπτώσεις όπου η ταχύτητα διάδοσης μεταβάλλεται και ως προς την οριζόντια διεύθυνση $c=c(r,z)$, καθώς επίσης και σε περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται τοπικές ασυνέχειες από περιοχή σε περιοχή (όπως, π.χ., συμβαίνει σε σύνθετα μέσα). Κατά συνέπεια, μπορεί να αποτελέσει τη βάση ενός τελείως γενικού αλγορίθμου κατασκευής των ακτίνων σε οποιοδήποτε ανομοιογενές μέσο.



- Η περίπτωση $c(z) = A \cosh[B(z - z_0)]$

Θα μελετήσουμε τώρα το πρόβλημα της

διάδοσης του ήχου σε περιβάλλον με κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας διάδοσης της μορφής υπερβολικού συνημιτόνου (βλ. Σχήμα 6), δηλαδή



$$c(z) = A \cosh[B(z - z_0)],$$

$$A, B = \text{σταθερές.} \quad (13)$$

Η μελέτη του προβλήματος αυτού είναι εξαιρετικά χρήσιμη, διότι μας επιτρέπει να αντιληφθούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου η αρχή (το σημείο “εκπομπής”) των ακτίνων βρίσκεται στη θέση (ή κοντά στη θέση) ενός τοπικού ελαχίστου της ταχύτητας διάδοσης. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε εφαρμογές θαλάσσιας ακουστικής, διότι συχνά το προφίλ της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο σε κάποιο (σχετικά μικρό) βάθος.

Και στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις των ακτίνων (ουσιαστικά η εξίσωση (9)), επιλύονται αναλυτικά, οπότε έχουμε "πλήρη έλεγχο" των λύσεων.

Στην περίπτωση του προφίλ ταχύτητας (13), η σταθερά q (βλ. εξίσωση (7)) παίρνει την τιμή

$$q = \frac{\cos \theta_0}{c(z_0)} = \frac{\cos \theta_0}{A},$$

και η εξίσωση (10) γίνεται

$$R - r_0 = \int_{z_0}^Z \frac{\cos \theta_0 \cdot \cosh[B(z - z_0)]}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0 \cdot \cosh^2[B(z - z_0)]}} \cdot dz. \quad (14)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα, αν και αρκετά περίπλοκο, υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσεως (βλ. Gradshteyn and Ryzhik 1965, σελ. 114):

$$\int \frac{a \cosh x}{\sqrt{1 - a^2 \cosh^2 x}} dx = \arcsin\left(\frac{a \sinh x}{\sqrt{1 - a^2}}\right), \quad a^2 \cosh^2 x < 1. \quad (15)$$

Με τη βοήθεια της (15), για $a = \cos \theta_0$, η (14) παίρνει τη μορφή

$$R - r_0 = \arcsin\left\{\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \cdot \sinh[B(Z - z_0)]\right\},$$

ή

$$\sin[B(R - r_0)] = \tan \theta_0 \cdot \sinh[B(Z - z_0)]. \quad (16\alpha)$$

Η τελευταία μπορεί να λυθεί μονοσημάντως ως προς Z , δεδομένου ότι η συνάρτηση \sinh είναι αμφιμονοσήμαντη στο \mathcal{R} , και άρα έχει μονότιμη αντίστροφη:

$$Z - z_0 = \frac{1}{B} \sinh^{-1}\left\{\tan \theta_0 \cdot \sin[B(R - r_0)]\right\}. \quad (16\beta)$$

Με τη βοήθεια της γενικής λύσεως (16) μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

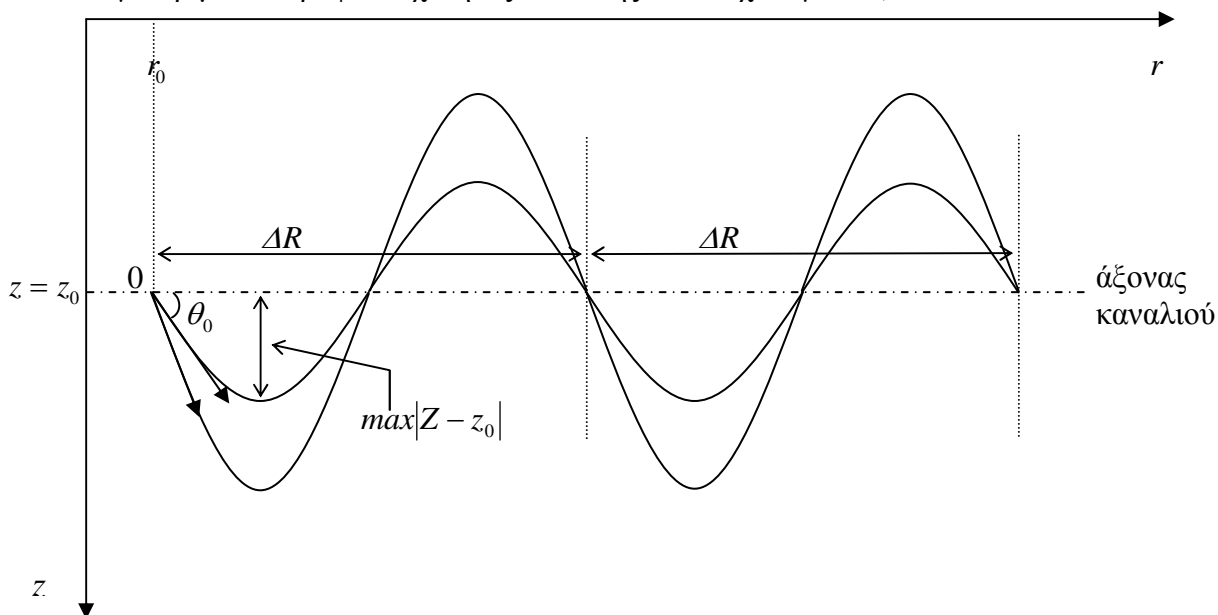
- i) Ο όρος μέσα στην αγκύλη του δεξιά μέλους της εξισώσεως (16β) είναι περιοδικός ως προς R με περίοδο $\Delta R = 2\pi / B$. Έτσι, οι ακτίνες που ξεκινούν από το αρχικό σημείο 0 (στην θέση $z = z_0$), θα επιστρέφουν διαρκώς στο ύψος $z = z_0$, σε διαστήματα που απέχουν μεταξύ τους $2\pi / B$, Βλ. Σχήμα 7.

Ορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο ο άξονας $z = z_0$, γύρω από τον οποίο θα καμπυλώνονται (ταλαντεύονται) οι ακτίνες. (Αυτό είναι φυσικά αναμενόμενο διότι το σημείο 0 έχει ληφθεί στη θέση όπου η ταχύτητα $c(z_0)$ είναι ελάχιστη. Γιατί:).

- ii) Η μέγιστη απομάκρυνση, $\max|Z - z_0|$, κάθε ακτίνας από τον άξονα $z = z_0$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται η αρχική γωνία κλίσεως της ακτίνας θ_0 , και μειούται καθώς αυξάνεται η καμπυλότητα του προφίλ ταχύτητας διάδοσης, η οποία καθορίζεται από την παράμετρο B , βλ. σχέση (13). Πράγματι, από τη σχέση (16β), για $B(r - r_0) = \pi / 2$, βρίσκουμε

$$\max|Z - z_0| = \frac{1}{B} \sinh^{-1}(\tan \theta_0).$$

Όλες όμως οι ακτίνες, ανεξαρτήτως από την αρχική τους κλίση, έχουν την ίδια οριζόντια περίοδο ΔR . (Το τελευταίο είναι μια ενδιαφέρουσα ειδική ιδιότητα του συγκεκριμένου προφίλ ταχύτητας διάδοσης. Δεν ισχύει γενικά).



Σχήμα 7: Η γεωμετρία των ακτίνων σε περιβάλλον με ταχύτητα διάδοσης τύπου υπερβολικού συνημιτόνου

Από το παράδειγμα αυτό συνάγουμε το γενικότερο συμπέρασμα ότι ένα περιβάλλον με κατακόρυφη κατανομή $c(z)$ που παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάποια θέση $z = z_0$ έχει την ιδιότητα να “παγιδεύει” τις ακτίνες γύρω από έναν άξονα στη θέση του ελαχίστου, δημιουργώντας έτσι ένα “**κανάλι διάδοσης**” γύρω από αυτόν. Στην περίπτωση της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα μιλάμε για “**ηχητικό κανάλι**” (submarine sound channel) είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε εδώ ότι η ύπαρξη ηχητικού καναλιού στη θάλασσα δεν είναι καθόλου προφανής, ούτε ήταν γνωστή πριν από το δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο. Ανακαλύφθηκε στα πλαίσια ερευνών κατά τη διάρκεια του πολέμου από Ρώσους και Αμερικανούς επιστήμονες, ανεξαρτήτως, και κρατήθηκε μυστική για αρκετά χρόνια (για προφανείς λόγους!). Οι πρώτες δημοσιεύσεις (Ρώσων και Αμερικανών) έγιναν το 1948. Το ιστορικό της ανακάλυψης του ηχητικού καναλιού από τους Ρώσους επιστήμονες περιγράφεται γλαφυρά από τον L. Brekhovskikh (ο οποίος συμμετείχε στις σχετικές προσπάθειες), στο βιβλίο του *Ocean and Man, Present and Future*, Nauka Publ., Moscow 1990.

Για να αντιληφθούμε ποσοτικά τη σημασία των μεταβολών της ταχύτητας του ήχου $c(z)$ στην δημιουργία ηχητικού καναλιού στο θαλάσσιο περιβάλλον, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι το προφίλ της ταχύτητας του ήχου δίδεται από τη σχέση:

$$c(z) = 1510 \cosh(6 \times 10^{-4}(z - 300)).$$

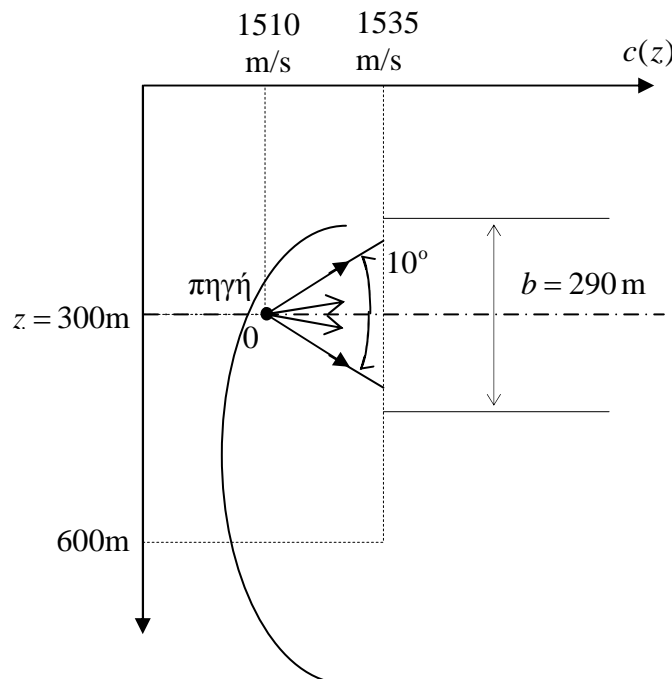
Βλ. Σχήμα 8. Στην περίπτωση αυτή, και για διάστημα βάθους 600m από την επιφάνεια της θάλασσας, η ταχύτητα του ήχου κυμαίνεται από 1535m/s (στην επιφάνεια της θάλασσας και σε βάθος 600m), ως 1510m/s, στην θέση του άξονα $z = z_0 = 300\text{m}$. Οι τιμές αυτές μπορούν να θεωρηθούν τυπικές τιμές της ταχύτητας του ήχου στη θάλασσα κατά την θερινή περίοδο.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω αποτελέσματα, όλες οι ηχητικές ακτίνες που εκπέμπονται από την πηγή 0 στο γωνιακό άνοιγμα (δέσμη) $\pm 5^\circ$ ⁽²⁵⁾, θα παγιδευτούν στο δημιουργούμενο ηχητικό κανάλι πλάτους

$$b = \frac{2}{0.0006} \sinh^{-1}(\tan 5^\circ) = 292\text{m},$$

δηλαδή στην οριζόντια ζώνη μεταξύ των ορίων $z = 154\text{m}$ και $z = 446\text{m}$, βλ. Σχήμα 8. Το μήκος επαναφοράς ΔR στην περίπτωση αυτή είναι

$$\Delta R = \frac{2\pi}{0.0006} = 10472\text{m} \cong 10\text{km}.$$



Σχήμα 8: Δημιουργία υποθαλάσσιου ηχητικού καναλιού

⁽²⁵⁾ Αξίζει να σημειωθεί ότι οι χρησιμοποιούμενες στην πράξη ενεργές τυχοβολιστικές συσκευές (Active SONARs) εκπέμουν σε ένα γωνιακό άνοιγμα της τάξεως των 60° , όμως η κύρια ενέργεια της δέσμης περιορίζεται σε ένα γωνιακό άνοιγμα $10^\circ - 20^\circ$ γύρω από τον άξονα της δέσμης.

3.5 Εφαρμογές των εξισώσεων των ακτίνων στη μελέτη της διάδοσης επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας σε ρηχή θάλασσα

Το φαινόμενο των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας εξελίσσεται κυρίως στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, και η διάδοση των κυματισμών λαμβάνει χώρα στο οριζόντιο επίπεδο. Η θεωρία των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας θα παρουσιασθεί διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5. Εδώ θα περιορισθούμε να δώσουμε την έκφραση της ταχύτητας διάδοσης $c = c(x, y)$, η οποία αποτελεί το μοναδικό προαπαιτούμενο για να εφαρμόσουμε τη θεωρία ακτίνων.

Με τη βοήθεια της γραμμικής θεωρίας των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα διάδοσης τους δίδεται από τη σχέση:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}, \quad \text{ή, σε αδιάστατη μορφή,} \quad \frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}}, \quad (1\alpha, \beta)$$

όπου $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, h είναι το βάθος του νερού, $k = 2\pi / \lambda$ είναι ο αριθμός κύματος, και λ είναι το μήκος κύματος.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η σχέση (1α) εξάγεται υπό την προϋπόθεση ότι το βάθος h είναι σταθερό. Παρ' όλα ταύτα, εάν το βάθος μεταβάλλεται αργά ως προς το μήκος κύματος ⁽²⁶⁾, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση (1α) (ή (1β)) ισχύει τοπικά, για $h = h(x, y)$. Στην περίπτωση όμως αυτή μεταβάλλεται και ο αριθμός κύματος k , σύμφωνα με τη σχέση διασποράς των επιφανειακών κυμάτων βαρύτητας:

$$\frac{\omega^2 h}{g} = kh \cdot \tanh(kh). \quad (27) \quad (2)$$

Επιλύοντας προσεγγιστικά (αριθμητικά ή γραφικά) την εξίσωση (2) ως προς k , δεδομένου του τοπικού βάθους $h(x, y)$, βρίσκουμε τη συνάρτηση $k = k(x, y)$. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη σχέση (1α) για $h = h(x, y)$ και $k = k(x, y)$, λαμβάνουμε το πεδίο της ταχύτητας διάδοσης:

$$c(x, y) = \sqrt{\frac{g}{k(x, y)} \tanh[k(x, y)h(x, y)]}. \quad (3)$$

Σημειώνεται ότι, στη σχέση (2), η κυκλική συχνότητα ω είναι σταθερή, εφ' όσον το πρόβλημα είναι γραμμικό (ακριβέστερα, έχει γραμμικοποιηθεί). Υπενθυμίζεται επίσης ότι η περίοδος T του κύματος συνδέεται άμεσα με την κυκλική συχνότητα ω , μέσω της σχέσεως:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4)$$

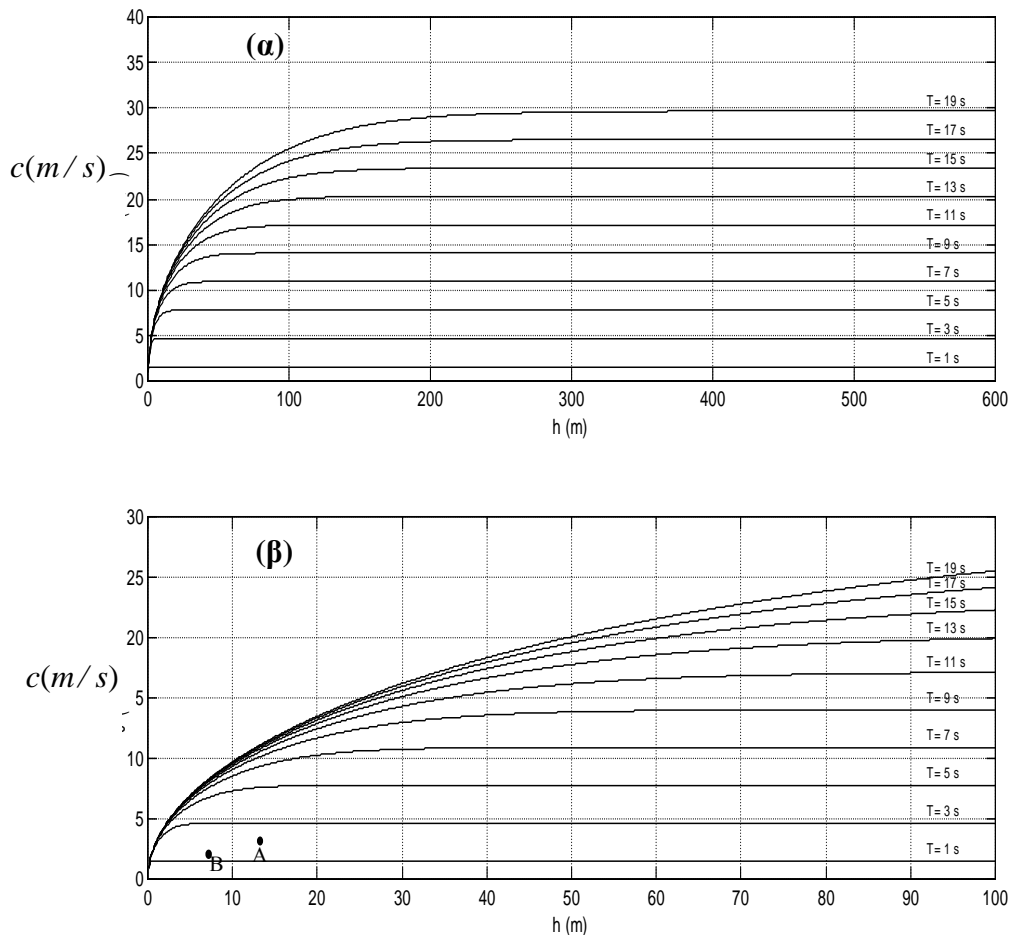
Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας εξαρτάται από το βάθος του νερού και την περίοδο του κύματος. Η

⁽²⁶⁾ Δηλαδή εάν σε οριζόντια μήκη της τάξεως μεγέθους του λ , το βάθος h μεταβάλλεται λίγο, π.χ. 10-15%.

⁽²⁷⁾ Και η σχέση διασποράς (2) εξάγεται υπό την προϋπόθεση ότι το βάθος είναι σταθερό. Και πάλι όμως αν το βάθος μεταβάλλεται αργά (βλ. προηγούμενη υποσημείωση), τότε η σχέση (2) ισχύει κατά προσέγγιση και τοπικά, δηλαδή για $h = h(x, y)$.

εξάρτηση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Η περίοδος του κύματος έχει ληφθεί να μεταβάλλεται παραμετρικά από $T=1s$ έως $T=19s$, ανά $2s$, έτσι ώστε να καλύπτεται όλο το εύρος τιμών των περιόδων των θαλασσιών κυματισμών βαρύτητας. Κάθε καμπύλη του Σχήματος 1 αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή της περιόδου. Παρατηρούμε ότι **η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται με την περίοδο του κύματος και το βάθος του νερού**. Για σταθερή περίοδο, η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται μονότονα με το βάθος. Η μεταβολή της είναι απότομη στην αρχή (για μικρά βάθη), όπου η ταχύτητα διάδοσης λαμβάνει μικρές, αλλά γρήγορα αυξανόμενες, τιμές. Από ένα ορισμένο βάθος και άνω⁽²⁸⁾ η ταχύτητα διάδοσης ανεξαρτητοποιείται από το βάθος, και εξαρτάται μόνον από την περίοδο του κύματος και μάλιστα γραμμικά. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η απλή σχέση:

$$c(x, y) = c = \frac{gT}{2\pi} . \quad (5)$$



Σχήμα 1: Ταχύτητα διάδοσης c των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας συναρτήσει του βάθους h του νερού και της περιόδου T του κύματος. **(α):** Οι τιμές της ταχύτητας διάδοσης για βάθος από $h=0m$ έως $h=600m$. **(β):** Λεπτομέρεια του σχήματος (α) για βάθος από $h=0m$ έως $h=100m$.

⁽²⁸⁾ Το οποίο αντιστοιχεί περίπου στο μισό του μήκους κύματος.

Με βάση την ανωτέρω παρουσίαση, μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις:

- (i) Σε αντίθεση με άλλα κυματικά φαινόμενα, η ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας εξαρτάται από την περίοδο (ισοδυνάμως, τη συχνότητα) του κύματος. Επομένως, και η μορφολογία των ακτίνων (και άρα και του κυματικού πεδίου) θα εξαρτάται από την περίοδο (συχνότητα) του κύματος.
- (ii) Σε ρηχό θαλάσσιο περιβάλλον⁽²⁹⁾, όπου το βάθος του νερού μεταβάλλεται γεωγραφικά, η ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας μεταβάλλεται από θέση σε θέση. Επομένως, σε ρηχή θάλασσα, οι ακτίνες διάδοσης δεν θα παραμένουν ευθείες, αλλά θα καμπυλώνονται προς περιοχές όπου το βάθος μειώνεται, δηλαδή προς την ακτή.

Ως πρώτη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ανωτέρω θεωρούμε την περίπτωση της απλούστερης δυνατής ακτής, δηλαδή ακτής με πυθμένα κεκλιμένο επίπεδο, με μικρή σχετικά κλίση ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Συνάγουμε τότε ότι οι ακτίνες που διαδίδονται από τα βαθιά προς τα ρηχά θα καταλήγουν πάντα περίπου κάθετα προς την ακτογραμμή, ανεξάρτητα από την αρχική κατεύθυνση του κύματος στα βαθιά (γιατί;). Αυτό ερμηνεύει την παρατήρηση ότι τα μέτωπα του κύματος, τα οποία αποτελούν γραμμές κάθετες στο σύστημα των ακτίνων, φθάνουν πάντοτε σχεδόν παράλληλα προς την ακτογραμμή.

Προχωρούμε τώρα στη μελέτη δύο χαρακτηριστικών παραδειγμάτων διάδοσης επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας σε ρηχή θάλασσα. Τα παρουσιαζόμενα αποτελέσματα έχουν εξαχθεί με αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των ακτίνων (εξισώσεις (24) και (25) του εδαφίου 2.4.3-3), με πεδίο ταχύτητας διάδοσης οριζόμενο μέσω της βαθυμετρίας, από την εξίσωση (3).

- Εστίαση κυματισμών (*wave focusing*)

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η περίπτωση νερού σταθερού βάθους, $h = 12.5 \text{ m}$, όπου υπάρχει τοπική ρήγωση εξ αιτίας ενός υφάλου ελλειπτικού σχήματος. Στο Σχήμα 2α παρουσιάζονται οι ισοβαθείς της περιοχής και οι ακτίνες, στο οριζόντιο (x, y) επίπεδο. Στο Σχήμα 2β παρουσιάζεται η γεωμετρία του πυθμένα κατά μήκος της τομής με το κατακόρυφο (x, z) επίπεδο, το οποίο είναι και επίπεδο συμμετρίας του υφάλου. Ο ύφαλος έχει οριζόντιες διαστάσεις $160 \text{ m} \times 210 \text{ m}$ (κατά μήκος των αξόνων x και y , αντιστοίχως), και συνολικό ύψος 5.5 m . Κατά συνέπεια, το βάθος της λωρίδας του ρευστού μεταβάλλεται από μέγιστη (σταθερά) τιμή $h = 12.5 \text{ m}$, εκτός της περιοχής του υφάλου, έως την ελάχιστη τιμή $h = 7 \text{ m}$, ακριβώς στο κέντρο του υφάλου. Εξετάζουμε την περίπτωση διάδοσης κυματισμών περιόδου $T = 5 \text{ sec}$, ή $\omega = 1.25 \text{ rad/s}$, στη συγκεκριμένη περιοχή.

Με την βοήθεια του Σχήματος 1β παρατηρούμε ότι, εξ αιτίας της μεταβολής του βάθους λόγω της ρήγωσης, η ταχύτητα διάδοσης ελαττώνεται ομαλά από την τιμή

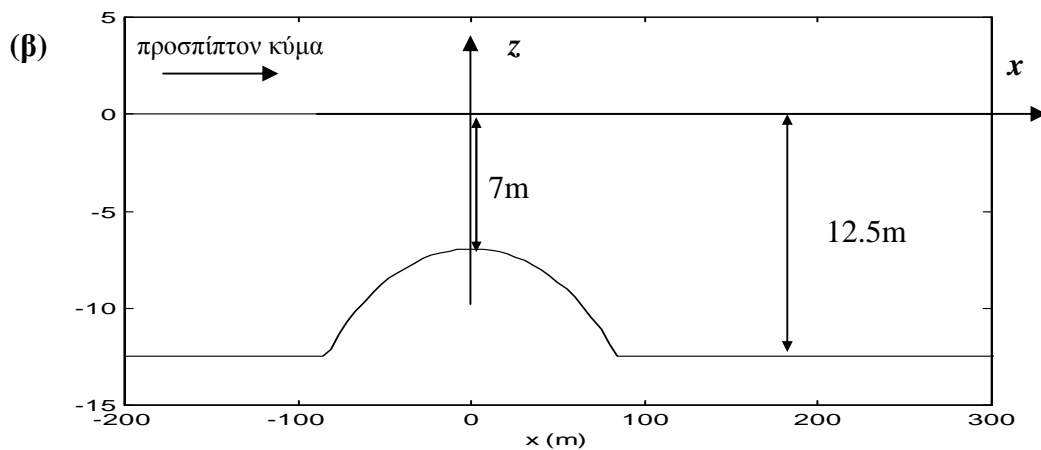
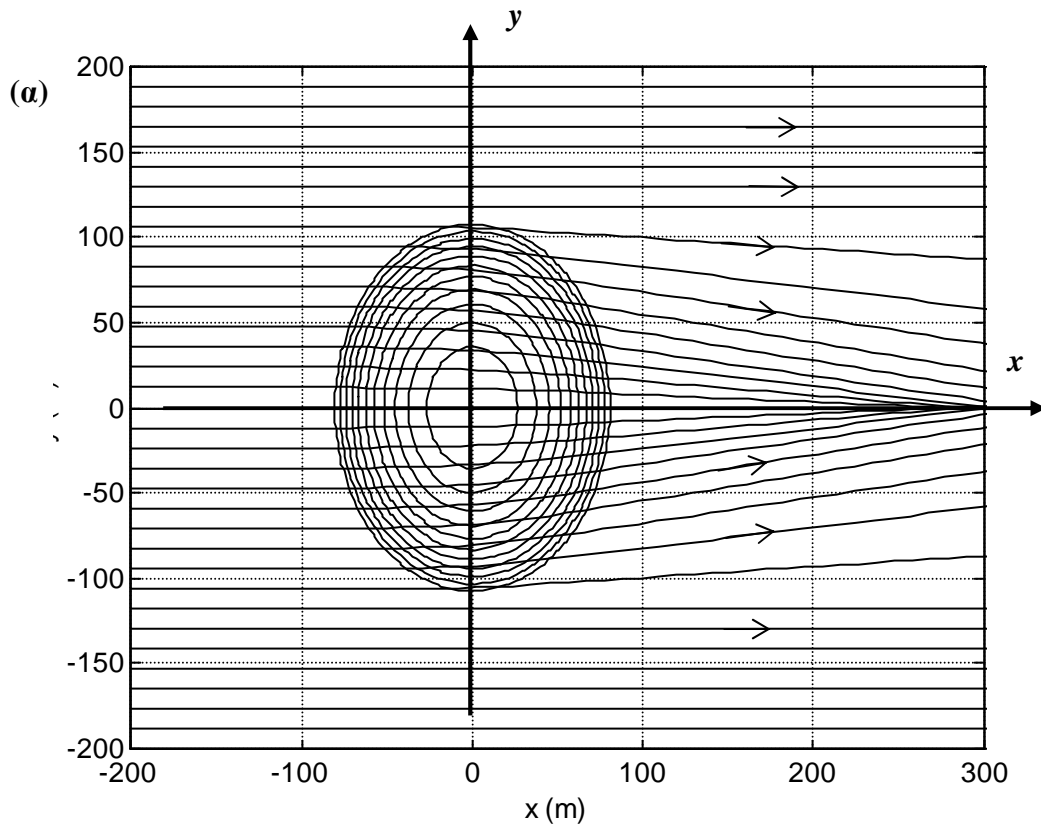
⁽²⁹⁾ Υπενθυμίζουμε ότι, όσον αφορά τους επιφανειακούς κυματισμούς βαρύτητας, το κριτήριο της "ρηχότητας" είναι σχετικό, ως προς το μήκος κύματος: νερό βάθους h είναι ρηχό για κύματα μήκους $\lambda > 2h$.

$c_{max} = 7.54 \text{ m/s}$, εκτός της περιοχής του υφάλου, έως την τιμή $c_{min} = 6.72 \text{ m/s}$, ακριβώς πάνω από την κορυφή του (βλ. σημεία *A* και *B*, στο Σχήμα 1β). Αντιστοίχως, το μήκος κύματος ελαττώνεται ομαλά από $\lambda_{max} = 37.7 \text{ m}$, στην περιοχή σταθερού βάθους, σε $\lambda_{min} = 33.6 \text{ m}$, ακριβώς πάνω στην κορυφή υφάλου. Λόγω της ελάττωσης της ταχύτητας διάδοσης στην περιοχή της ρήχωσης, μια ακτίνα παράλληλη αρχικά προς τον *x*-άξονα, και σε κάποια μικρή απόσταση από αυτόν, αναγκαστικά θα καμπυλωθεί καθώς διέρχεται πάνω από τον ύφαλο, στρεφόμενη προς την κατεύθυνση του ρηχότερου νερού. Η ακτίνα αυτή, αφού διέλθει από την περιοχή της ρήχωσης, θα παραμένει ευθεία (γιατί;), με διαφορετική, βέβαια, κλίση από αυτήν που είχε πριν να εισέλθει στην περιοχή της ρήχωσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το σύστημα των ακτίνων που εικονίζεται στο Σχήμα 2α. Παρατηρούμε ότι, πίσω από τον ύφαλο, δημιουργείται **περιοχή εστίασης, των ακτίνων**. Είναι φυσικά αναμενόμενο ότι στην περιοχή εστίασης το κυματικό φαινόμενο θα είναι περισσότερο έντονο, εφ' όσον κάθε ακτίνα αποτελεί "δρόμο διάδοσης" της κυματικής ενέργειας. Το φαινόμενο αυτό είναι πλήρως ανάλογο με το φαινόμενο της σύγκλισης των φωτεινών ακτίνων, όταν αυτές διέρχονται από κυρτό φακό. Μπορούμε λοιπόν να ισχυρισθούμε ότι **οι τοπικές ρηχώσεις στη θάλασσα αποτελούν συγκλίνοντες φακούς των ακτίνων των θαλάσσιων κυματισμών** (στην περίπτωση ρηχής θάλασσας). Για τον λόγο αυτό, διατάξεις τέτοιου τύπου, σε συνδυασμό με κατάλληλους μηχανισμούς μετατροπής ενέργειας, έχουν προταθεί για την κατασκευή σταθμών εκμετάλλευσης της θαλάσσιας κυματικής ενέργειας.

- **Διάδοση επιφανειακών κυματισμών από την ανοικτή θάλασσα προς την ακτή, σε πραγματική βαθυμετρία**

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται η περίπτωση ενός πραγματικού παράκτιου περιβάλλοντος, για μια περιοχή έκτασης περίπου $2\text{ km} \times 2\text{ km}$. Στην περίπτωση αυτή το βάθος ελαττώνεται από $h_{max} \approx 30 \text{ m}$, μακριά από την ακτή, σε $h_{min} = 0 \text{ m}$, στο όριο της ακτογραμμής. Εξετάζουμε την περίπτωση επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας περιόδου $T = 10 \text{ sec}$ ($\omega = 0.628 \text{ rad/s}$), τα οποία διαδίδονται με κατεύθυνση από ΒΔ προς ΝΑ, και από τα βαθιά προς τα ρηχά. Η ταχύτητα διάδοσης ελαττώνεται από $c_{max} = 13.47 \text{ m/s}$, σε $c_{min} = 0$. Σε βάθος $h = 2 \text{ m}$, πολύ κοντά στη ακτογραμμή, η ταχύτητα διάδοσης είναι $c = 4.36 \text{ m/s}$. Αντιστοίχως, το μήκος κύματος μεταβάλλεται από $\lambda_{max} = 134.7 \text{ m}$, σε βάθος $h \approx 30 \text{ m}$, έως $\lambda = 43.6 \text{ m}$, σε βάθος $h = 2 \text{ m}$. Στο Σχήμα 3β απεικονίζονται οι ακτίνες διάδοσης (συνεχείς γραμμές) μαζί με τις βαθυμετρικές της περιοχής (διακεκομμένες γραμμές). Παρατηρούμε και πάλι την καμπύλωση των ακτίνων προς την πλευρά της ακτογραμμής (περιοχή μικροτέρου βάθους). Με βάση τα όσα ήδη έχουμε αναφέρει είναι προφανές ότι, στην ίδια πάντα γεωγραφική περιοχή, η γεωμετρία των ακτίνων θα είναι διαφορετική για κυματισμούς διαφορετικής περιόδου που διαδίδονται με την ίδια αρχική διεύθυνση από τα βαθιά προς τα ρηχά⁽³⁰⁾. Επίσης, οι ακτίνες διάδοσης εξαρτώνται και από την αρχική κατεύθυνση του κύματος στα βαθιά.

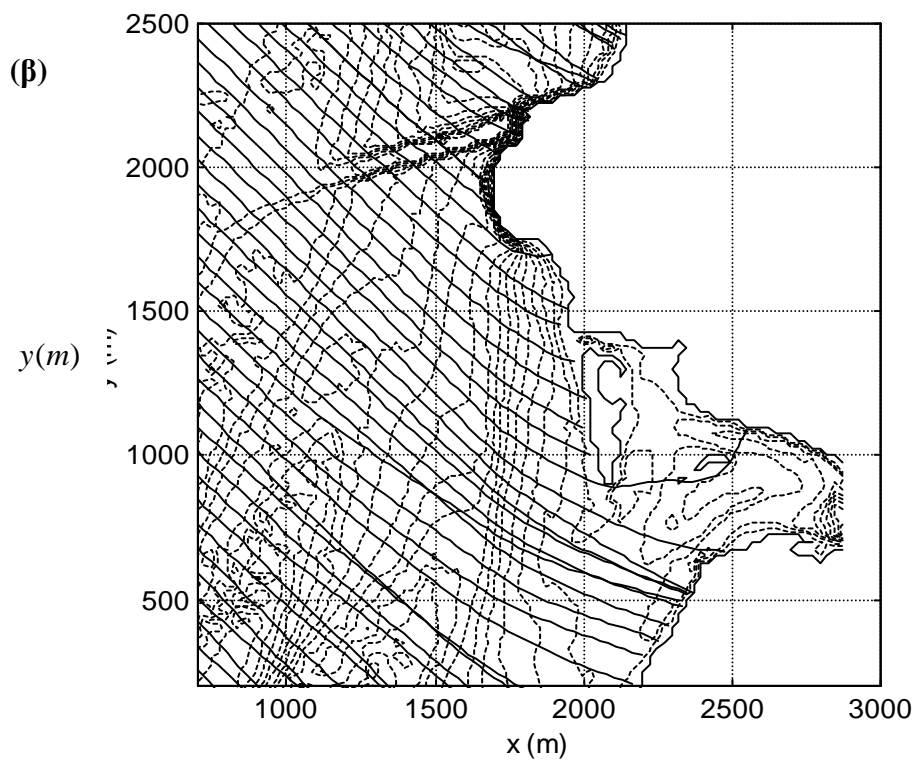
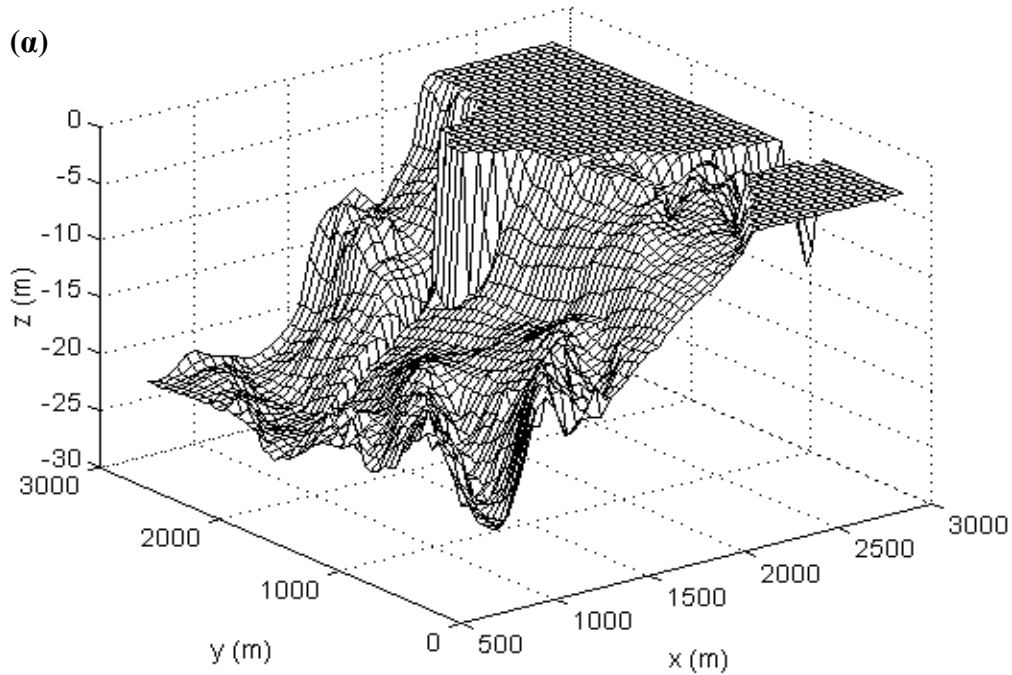
⁽³⁰⁾ Χωρίς, όμως οι διαφορές να είναι δραματικές, στις περιοχές παραμέτρων που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον.



Σχήμα 2 : Γεωμετρία τοπικής ρήγωσης ελλειπτικού σχήματος (ελλειπτικού ύφαλου) σε νερό σταθερού βάθους $h=12.5$ m, και μορφολογία των ακτίνων του αναπτυσσόμενου κυματικού πεδίου, όταν το προσπίπτον κύμα έχει περίοδο $T = 5$ sec ($\lambda = 37.7$ m).

(α) Ισοβαθείς της περιοχής, και ακτίνες διάδοσης στο οριζόντιο (x,y) επίπεδο.

(β) Βαθυμετρία κατά μήκος κεντρικής τομής με το κατακόρυφο επίπεδο (x,z) .



Σχήμα 3 : Πραγματική παράκτια βαθυμετρία και μορφολογία των ακτίνων του κυματικού πεδίου, όταν το προσπίπτον κύμα έχει περίοδο $T=10\text{sec}$ ($\lambda = 134.7\text{m}$) και κατεύθυνση $BA \rightarrow NA$ (α): Τριδιάστατη απεικόνιση της βαθυμετρίας, σε έκταση περίπου $2\text{km} \times 2\text{km}$. (β): Ισοβαθείς της περιοχής και ακτίνες διάδοσης.

3.6 Κώδικες επιλύσεως των διαφορικών εξισώσεων των ακτίνων

- Κώδικες Υδροακουστικών Εφαρμογών

Σήμερα πλέον έχουν αναπτυχθεί σε υψηλό βαθμό, και διατίθενται σε ελεύθερη χρήση, μια πληθώρα από κώδικες που βασίζονται στην θεωρία (ηχητικών) ακτίνων και προορίζονται τόσο για γενικές όσο και για ειδικές υδροακουστικές εφαρμογές. Σε ότι αφορά την πρώτη κατηγορία παραπέμπουμε στην ιστοσελίδα του Ocean Acoustics Library (<http://oalib.saic.com>) που συντηρείται από το Αμερικανικό Ναυτικό (US Office of Naval Research). Μάλιστα από την ανωτέρω διεύθυνση προσφέρονται εκτός από κώδικες που βασίζονται στην θεωρία ακτίνων (BELLHOP, HARPO, RAY, TRIMAIN κλπ) καί άλλοι κώδικες οι οποίοι βασίζονται στην θεωρία των κανονικών ιδιομορφών (Normal Modes), στην Παραβολική προσέγγιση (Parabolic Eq.), και στην μέθοδο ολοκλήρωσης στο πεδίο του κυματαριθμού (Wavenumber Integration), οι οποίοι παρέχουν ακριβέστερες προσεγγιστικές λύσεις της ακουστικής εξίσωσης στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων.

Σε ότι αφορά τις ειδικές υδροακουστικές εφαρμογές αξίζει να αναφέρουμε εδώ, ως παράδειγμα εφαρμογής, την εκτίμηση της απόδοσης κυρίως των ενεργητικών συστημάτων (SONARS), αλλά και των παθητικών ηχοεντοπιστικών συσκευών (σε σχετικά υψηλές συχνότητες λειτουργίας) σε κάποια θαλάσσια περιοχή. Για τον σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί και εξελιχθεί εξειδικευμένοι αλγόριθμοι και κώδικες Η/Υ που βασίζονται στην θεωρία ακτίνων, για την αριθμητική επίλυση των σχετικών προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται οι κώδικες MOCASSIN⁽³¹⁾ (που έχει αναπτυχθεί από το Γερμανικό Ναυτικό, FBWG), και HYDRA⁽³²⁾ (που έχει βασισθεί στην γενική φιλοσοφία του MOCASSIN και έχει αναπτυχθεί στο ΕΜΠ). Ο κώδικας MOCASSIN έχει την δυνατότητα να χειρισθεί θαλάσσια περιβάλλοντα οριζοντίως σταθερών παραμέτρων (range independent environments, δηλ. $c=c(z)$) με γενική βαθυμετρία. Ο κώδικας HYDRA έχει την δυνατότητα να χειρισθεί θαλάσσια περιβάλλοντα οριζοντίως μεταβαλλομένων παραμέτρων (range dependent, δηλ. $c=c(R, z)$) με γενική βαθυμετρία. Και οι δύο κώδικες αυτοί είναι διαθέσιμοι προς χρήση από το Τμήμα Ναυπηγών Μηχ/γων Μηχ ΕΜΠ.

Για την συστηματική αξιοποίηση των αναπτυγμένων υδροακουστικών κωδίκων και των διαθέσιμων γεωγραφικών και υδρακουστικών πληροφοριών, για επιχειρησιακή εφαρμογή στην περιοχή των Ελληνικών Θαλασσών, αναπτύχθηκε από το Τμήμα Ναυπηγών Μηχ/γων Μηχ ΕΜΠ, με χρηματοδότηση από το Πολεμικό Ναυτικό, το ολοκληρωμένο σύστημα ΑΜΦΙΤΡΙΤΗ, στα πλαίσια του ομώνυμου ερευνητικού προγράμματος.⁽³³⁾ Με χρήση του περιβάλλοντος ΑΜΦΙΤΡΙΤΗ καθίσταται δυνατή, τόσο η απόκτηση αποτελεσμάτων υδροακουστικών υπολογισμών κατά βέλτιστο τρόπο στην περίπτωση μιας μεμονωμένης εφαρμογής (π.χ. σε μια συγκεκριμένη

³¹ Schneider, H.G., 1990, MOCASSIN: Sound propagation and sonar range prediction model for shallow water environments (User's Guide), Tech. Rpt. 1990-9.

³² Athanassoulis, G.A., Belibassakis K.A., 1996, HYDRA: Sound propagation and active SONAR's ranges prediction code for range-dependent sea-water environments, NTUA Report. Dept. of Naval Architecture and Marine Engineering, 1996.

³³ Πρόγραμμα ΑΜΦΙΤΡΙΤΗ: Συστηματική μελέτη των υδροακουστικών χαρακτηριστικών του Αιγαίου Πελάγους και των Ελληνικών Θαλασσών, Τελική Έκθεση Ερευνητικού Προγράμματος που χρηματοδοτήθηκε από το Πολεμικό Ναυτικό, Επιστ. Υπεύθυνος: Γ.Α. Αθανασούλης, ΕΜΠ, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχ., 1997.

θαλάσσια περιοχή), όσο και η συστηματική εκμετάλλευση των αποτελεσμάτων υπολογισμών στην φάση του σχεδιασμού επιχειρήσεων, όπου απαιτείται μεγαλύτερη ποσότητα πληροφοριών για μιά ευρύτερη θαλάσσια περιοχή.

- Κώδικες Υδροδυναμικών Εφαρμογών

Διάφοροι κώδικες έχουν αναπτυχθεί στην βάση της θεωρίας ακτίνων για εφαρμογές που σχετίζονται με την διάδοση κυματισμών βαρύτητας στο θαλάσσιο και παράκτιο περιβάλλον. Για μιά εκτενέστερη περιγραφή παραπέμπουμε στο σχετικό άρθρο των Townend & Savell.⁽³⁴⁾ Ειδικότερα αναφέρουμε εδώ τον κώδικα VENICE⁽³⁵⁾, ο οποίος έχει αναπτυχθεί από το Ιταλικό Ερευνητικό Κέντρο ISDGM, τον κώδικα RAYTR⁽³⁶⁾, ο οποίος έχει αναπτυχθεί από την εταιρεία SINTEF του Νορβηγικού Τεχνολογικού Ινστιτούτου, καθώς και τον κώδικα COAST-RAY⁽³⁷⁾ που έχει αναπτυχθεί στο ΕΜΠ. Όλοι οι ανωτέρω κώδικες έχουν την δυνατότητα να χειρισθούν τον μετασχηματισμό φάσματος θαλασσίων κυματισμών από την ανοικτή θάλασσα προς την ακτή, και είναι διαθέσιμοι προς χρήση από το Τμήμα Ναυπηγών Μηχ/γων Μηχ ΕΜΠ.

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε επίσης τις ακόλουθες πολύ ενδιαφέρουσες ιστοσελίδες: <http://www.coastal.udel.edu/faculty/rad/> και <http://otrc93.ce.utexas.edu/~waveroom/>, στις οποίες περιέχονται προγράμματα Java για τον υπολογισμό διαφόρων κινηματικών και δυναμικών χαρακτηριστικών των κυματισμών βαρύτητας. Μεταξύ αυτών περιέχονται εφαρμογές που αφορούν κινηματικά χαρακτηριστικά (ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας, τροχιές υλικών στοιχείων κλπ) από την γραμμική και την δευτεροτάξια μη γραμμική θεωρία κυματισμών, την διέγερση πεδίου από κυματιστήρα, την υπέρθεση κυματισμών βαρύτητας κλπ.

- Αριθμητική ολοκλήρωση του διαφορικού συστήματος των ακτίνων

Παρουσιάζεται εδώ η αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος των εξισώσεων των ακτίνων ως πρόβλημα αρχικών τιμών στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta, που υλοποιείται από την συνάρτηση ode23.m του MATLAB

Ορίζοντας τη γενικευμένη μεταβλητή

$$\mathbf{X}(s) = [r(s), z(s), \xi(s), \zeta(s)]^T, \quad (1)$$

όπου s η παράμετρος (π.χ. το φυσικό μήκος), το σύστημα των εξισώσεων των ακτίνων γράφεται στη μορφή

³⁴ Townend, I.M., & I.A. Savell, 1985, The application of ray methods to wave refraction studies, Chapter 7 in *Offshore and Coastal Modelling*, Lecture Notes on Coastal and Estuarine Studies, Eds. P.P.G. Dyke, A.O. Moscardini and E.H. Robson, Vol. 12, Springer Verlag.

³⁵ Cavaleri, L., & Malanotte-Rizzoli, P., 1981, Wind-wave prediction in shallow water. Theory and applications, *Journal of Geophysical Research*, **86**(C11), 10961-10973.

³⁶ Simonsen, H.H., 1991, RAYTR: A program for Ocean Wave Ray tracing. Program Documentation, SINTEF Report 1991-12-31.

³⁷ G.A. Athanassoulis and K.A. Belibassakis, 1998, COAST-RAY A ray-tracing MATLAB code with application to the transformation of the wave conditions from offshore to nearshore at a coastal site, NTUA Report. Dept. of Naval Architecture and Marine Engineering, 1996.

$$\frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{X}; s), \quad (2)$$

όπου το δεξί μέλος του ανωτέρω συστήματος είναι

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}; t) = [c\xi, c\zeta, -c^{-2}dc/dr, -c^{-2}dc/dz]^T, \quad (3)$$

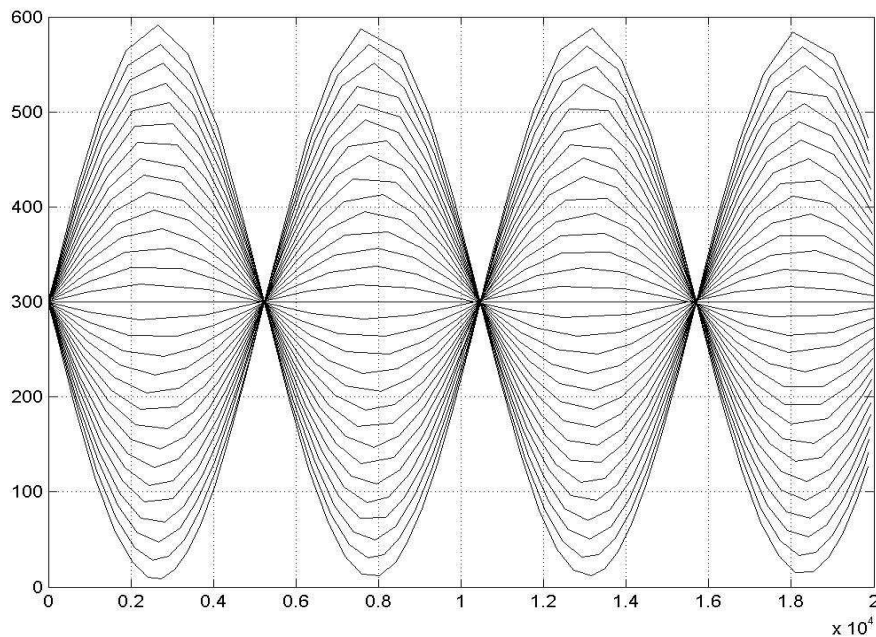
και $c(r, z)$ η κατανομή της φασικής ταχύτητας διάδοσης. Το ανωτέρω σύστημα ολοκληρώνεται γνωρίζοντας την κατανομή $c(r, z)$ και των χωρικών παραγώγων αυτής $\nabla c(r, z)$, χρησιμοποιώντας αρχικά δεδομένα, όπως την γνωστή θέση της πηγής $(r_0, z_0) = (r(s_0), z(s_0))$, καθώς και την αρχική κλίση κάθε ακτίνας $(r'(s_0), z'(s_0)) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$. Εξ'αυτών παράγονται αρχικά δεδομένα για τη γενικευμένη μεταβλητή

$$\mathbf{X}(s=0) = \mathbf{X}(s_0) = [r(s_0), z(s_0), \xi(s_0), \zeta(s_0)]^T, \quad (4)$$

όπου

$$\xi(s_0) = \cos(\theta_0)/c_0, \quad \zeta(s_0) = \sin(\theta_0)/c_0, \quad c_0 = c(r_0, z_0). \quad (5)$$

Στο ακόλουθο Σχήμα παρουσιάζεται η λύση για τις ακτίνες στο θαλάσσιο περιβάλλον που χαρακτηρίζεται από κατακόρυφο προφίλ $c(z)$ τύπου $c(z) = A \cosh(B(z - z_0))$, για το οποίο διατίθεται η αναλυτική λύση (βλ. Κεφ.3 σελ. 3.3.50-53) και μπορεί να γίνει σύγκριση. Στη συγκεκριμένο παράδειγμα έχει ληφθεί $A=1510\text{m/s}$, $B=B = 6 \cdot 10^{-4} \text{m}^{-1}$ και στο Σχήμα 4 εικονίζονται οι ακτίνες από σημειακή πηγή στη θέση $(r_0, z_0) = (0, -300)$ με αρχική κλίση από -10deg έως 10deg .



Σχήμα 4. Υπολογιζόμενες ακτίνες από σημειακή πηγή σε κατακόρυφα στρωματοποιημένο μέσο με $c(z) = A \cosh(B(z - z_0))$,

- Πρόγραμμα Matlab

```
% rays emitted from point source
r0=0; z0=300; c0=cspeed(r0,z0);
for i=1:31
    thdeg=-10+(i-1)*20/30;
    th0=thdeg*pi/180;
p0=cos(th0)/c0;
q0=sin(th0)/c0;
[t,la]=ode23('ray',[0 20000],[r0 z0 p0 q0]);
plot(la(:,1),la(:,2),'w'); hold on
end
grid on;
%
function f=ray(t,x)
c=cspeed(x(1),x(2));
dcdr=0; dcdz=cspd(x(1),x(2));
fi(1)=c*x(3);
fi(2)=c*x(4);
fi(3)=(-1/(c^2))*dcdr;
fi(4)=(-1/(c^2))*dcdz;
f=fi';
%
function f=cspeed(r,z)
z0=300; A=1510; B=6*10^(-4);
f=A*cosh(B*(z-z0));
%
function f=cspd(r,z)
z0=300; A=1510; B=6*10^(-4);
f=A*B*sinh(B*(z-z0));
```

Ειδική βιβλιογραφία επί της Αρχής του Fermat και της θεωρίας ακτίνων

- Babic, V.M., V.S. Buldyrev, 1991, *Short-Wavelength Diffraction Theory*, (Translated by E.F. Kuester), Springer-Verlag, Berlin.
- Born, M., E. Wolf, 1975, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, England.
- Brekhovskikh, L.M., 1980 (2nd edition), *Waves in Layered Media*, Academic Press, Inc. Orlando, Florida.
- Brekhovskikh, L.M., O.A. Godin, 1992, *Acoustics of Layered Media II*, Springer Series on Wave Phenomena, Springer-Verlag, Berlin.
- Ghatak, A., 1992 (2nd edition), *Optics*, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi.
- Gelfand, I.M., S.V. Fomin, 1963, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jensen, F.B., W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt, 1994, *Computational Ocean Acoustics*, AIP Press, New York.
- Kratsov, Yu.A., Yu.I. Orlov, 1990, *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*, Springer-Verlag, Berlin.
- Newcomb, W.A., 1983, "Generalized Fermat's principle", *Amer. J. Phys.*, 51, 338.
- Pierce, A.D., 1981, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Sagan, H., 1992, *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York (1969, McGraw-Hill Book Company).
- Shaw, J.H., 1965, "Fermat's principle and geometrical optics", *Amer. J. Phys.*, Vol. 33, pp. 40.

Βασικές εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών

1. Γεωμετρικό και υλικό πεδίο ροής
2. Θεμελιώδη πεδιακά μεγέθη. Βασικές παραδοχές
3. Γραμμές ροής του πεδίου ροής και τροχιές των υλικών στοιχείων του υγρού
4. Χρονικός ρυθμός μεταβολής φυσικών χαρακτηριστικών του πεδίου ροής. Υλική παράγωγος
5. Εξισώσεις κίνησης ασυμπίεστου μη-συνεκτικού υγρού
 - Εξισώσεις Euler
 - Εξίσωση συνέχειας
6. Συνέπειες των εξισώσεων κίνησης: Θεώρημα Kelvin, αστρόβιλη ροή, Θεώρημα Bernoulli
 - Θεώρημα Kelvin
 - Αστρόβιλη ροή, εξίσωση Laplace
 - Θεώρημα Bernoulli
7. Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας
 - Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας
 - Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας
8. Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αλληλεπίδρασης στερεού σώματος και υγρού με ελεύθερη επιφάνεια (κύματος)

Η υδροδυναμική ελεύθερης επιφάνειας εξετάζει ροές στις οποίες το πεδίο ροής¹ περατούται, εν μέρει, σε μια ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή σε μια επιφάνεια ισχυρής ασυνέχειας της πυκνότητας, της οποίας το σχήμα δεν καθορίζεται από άλλα υλικά σώματα (π.χ. στερεά σύνορα), αλλά μπορεί να διαμορφώνεται “ελεύθερα” καθώς εξελίσσεται η ροή. (“Ελεύθερα” σημαίνει σε συμφωνία με τους φυσικούς νόμους που διέπουν το φαινόμενο).

Βάση της υδροδυναμικής ελεύθερης επιφάνειας είναι, φυσικά, οι γενικοί νόμοι της μηχανικής, όπως αυτοί διαμορφώνονται στην περίπτωση της μηχανικής των ρευστών. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τους νόμους της μηχανικής των ρευστών και τις βασικές καταστατικές υποθέσεις που χρησιμοποιούνται στην υδροδυναμική ελεύθερης επιφάνειας. Το πρώτο μας βήμα θα είναι να εισάγουμε ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν τόσο να διατυπώσουμε, όσο και να εφαρμόσουμε σωστά τους νόμους της μηχανικής στα ρευστά. Όλα αυτά χρησιμοποιούνται στο τέλος του κεφαλαίου για την αναλυτική παραγωγή των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας, οι οποίες αποτελούν το κεντρικό αντικείμενο μελέτης της υδροδυναμικής ελεύθερης επιφάνειας.

1. Γεωμετρικό και υλικό πεδίο ροής

Όπως αναφέραμε ήδη, το πεδίο ροής μοντελοποιείται ως ένα (τοπολογικά ανοικτό) υποσύνολο D του γεωμετρικού χώρου \mathbb{R}^3 ή \mathbb{R}^2 . Το γεωμετρικό σύνολο D θα λέγεται και **γεωμετρικό πεδίο ροής**. Το σύνορο του χωρίου D θα συμβολίζεται συνήθως με ∂D και μπορεί να αποτελείται από διάφορα τμήματα με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες. (Βλ. Σχήμα 1.1).

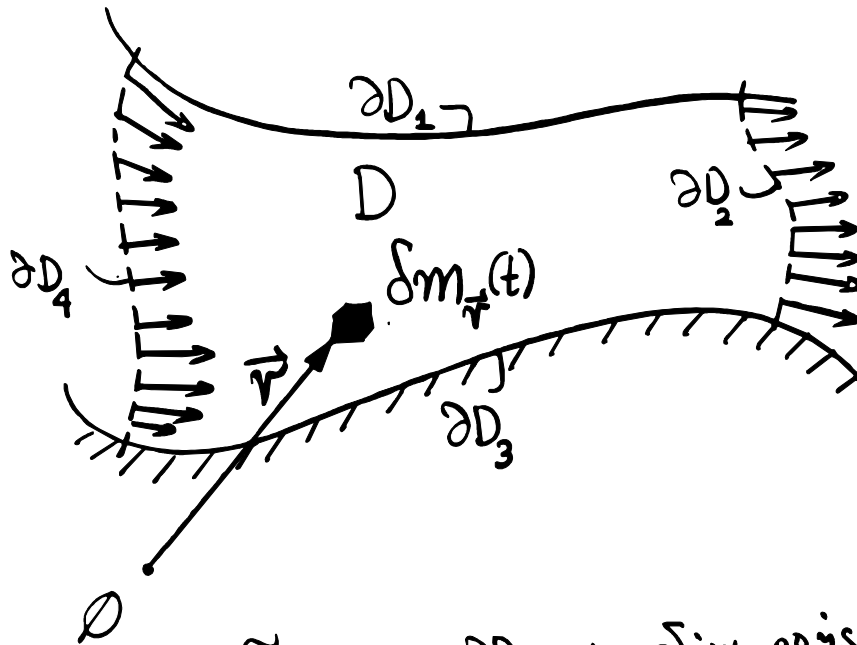
Σε κάθε χρονική στιγμή t , τα υλικά στοιχεία του ρευστού κατέχουν ορισμένες θέσεις μέσα στο γεωμετρικό πεδίο ροής $D = D(t)$. Δηλαδή, σε κάθε σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ του $D(t)$, μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχει ένα υλικό στοιχείο του ρευστού, σε συμφωνία με την υπόθεση της συνεχούς κατανομής της μάζας του ρευστού στο χώρο.

Ας φανταστούμε τα υλικά στοιχεία του ρευστού ως απειροστούς κύβους με πλευρές $\delta x, \delta y, \delta z$, και μάζα δm . Το σύνολο όλων των υλικών στοιχείων $\{\delta m\}$ ορίζει, σε κάθε χρονική στιγμή, το **υλικό πεδίο ροής**, το οποίο βρίσκεται μέσα στο γεωμετρικό πεδίο ροής $D(t)$. Σε κάθε χρονική στιγμή, το σύνολο των υλικών στοιχείων $\{\delta m\}$ και το σύνολο των γεωμετρικών σημείων $\{\mathbf{r}\} = D(t)$ βρίσκονται σε **αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία**, πράγμα το οποίο μας επιτρέπει να “προσδιορίσουμε” (να “ονομάσουμε”), το υλικό στοιχείο δm με τη βοήθεια του γεωμετρικού σημείου \mathbf{r} , με το οποίο συμβαίνει να συμπίπτει τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 (Θεώρηση κατά Euler. Βλ., π.χ., Αθανασιάδης 1989, εδάφιο 1.2). Μπορούμε έτσι να γράψουμε $\delta m_{\mathbf{r}}$ (κατ’ αναλογία με το συμβολισμό m_1, m_2, \dots , της μηχανικής των διακριτών σωματιδίων) ή, το συνηθέστερο στη μηχανική των ρευστών, $\delta m(\mathbf{r})$. Δεδομένου όμως ότι η αντιστοιχία $\delta m \leftrightarrow \mathbf{r}$ αλλάζει από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ο ανωτέρω συμβολισμός είναι ελλιπής. Μία ικανοποιητική βελτίωση είναι να γράψουμε $\delta m_{\mathbf{r}}(t)$ ή $\delta m(\mathbf{r}; t)$, εισάγοντας και το χρόνο t στο συμβολισμό μας. Ο συμβολισμός $\delta m_{\mathbf{r}}(t)$ αναδεικνύει και μια άλλη δυσκολία, η οποία

¹ Πεδίο ροής είναι η περιοχή του φυσικού χώρου εντός της οποίας κινείται το εξεταζόμενο ρευστό. Το πεδίο ροής μοντελοποιείται ως ένα τοπολογικά ανοικτό υποσύνολο του ευκλείδειου γεωμετρικού χώρου \mathbb{R}^3 (στα τρισδιάστατα προβλήματα) ή \mathbb{R}^2 (στα διδιάστατα προβλήματα). Γενικά, το πεδίο ροής μεταβάλλεται με το χρόνο.

είναι συνυφασμένη αφ' ενός με την υπόθεση της συνεχούς κατανομής της ύλης (μάζας) του ρευστού, και αφ' ετέρου με τον χρησιμοποιούμενο φορμαλισμό. Σε αντίθεση λοιπόν με τα διακριτά μηχανικά συστήματα, όπου η διατήρηση της μάζας κάθε στοιχείου είναι συμφυής στο χρησιμοποιούμενο συμβολισμό, m_1, m_2, \dots , στα συνεχή συστήματα η διατήρηση της μάζας κάθε στοιχείου του ρευστού δεν εξασφαλίζεται a priori, αλλά πρέπει να εισαχθεί υπό τη μορφή ρητού συνδέσμου, δηλαδή ως μία πρόσθετη εξίσωση η οποία συμπληρώνει τις δυναμικές εξισώσεις κίνησης του ρευστού. (Οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού παράγονται στο εδάφιο 5).

Η τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου μας δείχνει με σαφήνεια ότι, παρά το γεγονός ότι τα δύο σύνολα $\{\delta m\}$ και $\{\mathbf{r}\} = D(t)$ βρίσκονται, κάθε χρονική στιγμή t , σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, πρέπει να τα αντι-διαστέλλουμε συνεχώς στο μυαλό μας, προκειμένου να διατυπώσουμε και να εφαρμόζουμε σωστά τους φυσικούς νόμους που διέπουν τη ροή του ρευστού. Και τούτο διότι *οι φυσικοί νόμοι δεν εφαρμόζονται σε γεωμετρικά σημεία αλλά σε υλικά στοιχεία*. Έτσι, ενώ η αναλυτική περιγραφή που χρησιμοποιούμε ορίζεται με τη βοήθεια των γεωμετρικών σημείων $\mathbf{r} = (x, y, z)$, οι φυσικές ποσότητες (π.χ. ρυθμός μεταβολής ταχύτητας, θερμοκρασίας κ.λπ.) θα πρέπει να αναφέρονται πάντοτε στα υλικά στοιχεία του ρευστού. Το βασικό αναλυτικό εργαλείο γι' αυτή την αναγωγή είναι η *υλική παράγωγος*, η οποία ορίζεται στη συνέχεια (εδάφιο 4).



Το σύνορο ∂D του πεδίου ροής αποτελείται από τέσσερα τμήματα:

$$\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3 \cup \partial D_4$$

Σχήμα 1.1

2. Θεμελιώδη πεδιακά μεγέθη. Βασικές παραδοχές

Το υλικό πεδίο ροής

$$\{\delta m\} = \{\delta m_r(t), \mathbf{r} \in D(t)\},$$

ως σύνολο υλικών στοιχείων, είναι ένα μηχανικό σύστημα και άρα διέπεται από τους γενικούς νόμους της μηχανικής. Η υπόθεση της συνεχούς κατανομής της μάζας του ρευστού εισάγει ιδιομορφίες και περιπλοκές, τόσο από αναλυτική, όσο και από φυσική άποψη, οι οποίες πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν. Από αναλυτική άποψη αυτό σημαίνει ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το λογισμό των συναρτήσεων πολλών ανεξαρτήτων μεταβλητών (θεωρία βαθμωτών και

διανυσματικών πεδίων²). Από φυσική άποψη, έχουμε, μεταξύ άλλων, τη συνέπεια ότι το υλικό πεδίο ροής είναι επίσης ένα θερμοδυναμικό σύστημα, και άρα απαιτούνται και θερμοδυναμικά μεγέθη για τον πλήρη χαρακτηρισμό του.

Κάθε υλικό στοιχείο $\delta m = \delta m_r(t)$, $\mathbf{r} \in D(t)$, χαρακτηρίζεται από

- Την ταχύτητα του $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r};t) = \mathbf{U}(x, y, z; t)$,
- Την πυκνότητά του $\rho = \rho(\mathbf{r};t) = \rho(x, y, z; t)$,
- Τη θερμοκρασία του $T = T(\mathbf{r};t) = T(x, y, z; t)$,

και άλλες ιδιότητες, οι οποίες (όπως και η θερμοκρασία που αναφέρεται ανωτέρω) δεν θα μας απασχολήσουν εδώ. Πρέπει να τονισθεί ότι η ταχύτητα $\mathbf{U}(\mathbf{r};t)$, η πυκνότητα $\rho(\mathbf{r};t)$ κ.λπ. αναφέρονται (από φυσική άποψη) στο υλικό σημείο $\delta m_r(t)$, και όχι στο γεωμετρικό σημείο \mathbf{r} . Με αυτή την έννοια μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\delta m_r(t))$, κ.λπ., το οποίο όμως δεν συνηθίζεται στη μηχανική των ρευστών, λόγω της περιπλοκότητάς του.

Γενικώς, πάνω στα υλικά στοιχεία $\delta m_r(t)$, αναπτύσσονται δυνάμεις με ένταση (ανά μονάδα μάζας)

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = \mathbf{F}_{\text{ολ}}(\mathbf{r};t) = \mathbf{F}_{\text{ολ}}(x, y, z; t).$$

Οι δυνάμεις αυτές αποτελούνται τόσο από εξωτερικές δυνάμεις (ασκούμενες από διάφορα αίτια ανεξάρτητα του ρευστού), όσο και από εσωτερικές δυνάμεις, οφειλόμενες στην αλληλεπίδραση των υλικών στοιχείων του ρευστού:

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}}(\mathbf{r};t) = \mathbf{F}_{\text{εξ}}(\mathbf{r};t) + \mathbf{F}_{\text{εσ}}(\mathbf{r};t).$$

Συνήθως στη ρευστομηχανική λαμβάνουμε υπ' όψιν μόνο την επιφανειακή αλληλεπίδραση των υλικών στοιχείων, οπότε οι εσωτερικές δυνάμεις εκφράζονται με τη βοήθεια του τανυστή των τάσεων

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{r};t) = \sigma_{ij}(x, y, z; t), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ο οποίος ορίζεται σε κάθε σημείο του γεωμετρικού πεδίου ροής $D = D(t)$.

Οι γενικές εξισώσεις κίνησης οποιουδήποτε ρευστού διατυπώνονται με τη βοήθεια των ανωτέρω (και, σε ορισμένες περιπτώσεις, και άλλων) πεδιακών μεγεθών, και εκφράζουν τους ακόλουθους γενικούς φυσικούς νόμους:

- Ισολογισμό της ορμής
- Ισολογισμό της στροφορμής
- Ισολογισμό της μάζας

² Βλ., π.χ., Budak & Fomin 1973, Παντελίδης 1994, τόμος III.

- Ισολογισμό της ενέργειας
- Ισολογισμό (ή ρυθμό αύξησης) της εντροπίας

του κάθε υλικού στοιχείου $\delta m_r(t)$. Πέραν των ανωτέρω, απαιτούνται επίσης και

- Καταστατικές εξισώσεις,

οι οποίες συνδέουν τις παραμορφώσεις (ή/και τους ρυθμούς των παραμορφώσεων) των υλικών στοιχείων με τις αναπτυσσόμενες εσωτερικές δυνάμεις, δηλαδή με τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} . Σε τέτοια γενικότητα οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών μελετώνται από τη γενική ρευστομηχανική. Βλ. σχετικά Landau & Lifshitz 1959, Trusdell & Toupin 1960, Batchelor 1967, Sedov 1975.

Στα δύο επόμενα κεφάλαια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις δυσκολίες που αναφέρονται λόγω της ύπαρξης της *ελεύθερης επιφάνειας*, εξειδικεύοντας και απλουστεύοντας τις γενικές εξισώσεις κίνησης του ρευστού. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι οι απλουστευτικές παραδοχές που θα εισαχθούν είναι αρκετά ρεαλιστικές, έτσι ώστε τα αποτελέσματα της μελέτης μας να είναι εφαρμόσιμα σε μια σημαντική ομάδα πραγματικών προβλημάτων ναυτικής και θαλάσσιας υδροδυναμικής.

Οι βασικές παραδοχές, οι οποίες θα καθορίσουν τη μορφή των εξισώσεων κίνησης του ρευστού που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, είναι οι ακόλουθες:

Το ρευστό θεωρείται

- **Υγρό**, και άρα μπορεί να έχει *ελεύθερη επιφάνεια*³,
- **Ασυμπίεστο**, και μάλιστα έχει σταθερή πυκνότητα,
- **Μη-συνεκτικό**, οπότε οι εσωτερικές δυνάμεις οφείλονται μόνο σε ορθές τάσεις, δηλαδή $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι ο μοναδιαίος τανυστής (δέλτα του Kronecker).

Οι κυριότερες συνέπειες των ανωτέρω παραδοχών είναι οι εξής:

- Οι θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού (θερμοκρασία, εντροπία) αποσυνδέονται από τις μηχανικές ιδιότητές του, και δεν χρειάζεται πλέον να ληφθούν υπ' όψιν.

Κατά συνέπεια

- Ο ισολογισμός της ενέργειας αναφέρεται μόνο στη μηχανική ενέργεια, και είναι συνέπεια των εξισώσεων της ορμής (και όχι ανεξάρτητη εξίσωση).
- Ο ισολογισμός της στροφορμής ισχύει ταυτοτικά.

³ Τα αέρια έχουν την τάση να καταλαμβάνουν όλο το χώρο που τους προσφέρεται, και έτσι δεν δημιουργούν ελεύθερη επιφάνεια.

- Οι παραδοχές του *ασυμπίεστου* και του *μη-συνεκτικού* αποτελούν *καταστατικές παραδοχές*, οι οποίες υποκαθιστούν τις καταστατικές εξισώσεις.

Κατά συνέπεια, οι φυσικές εξισώσεις που απομένουν (και πρέπει) να χρησιμοποιηθούν εν προκειμένω είναι μόνο οι εξής δύο:

- Ισολογισμός της ορμής, και
- Ισολογισμός της μάζας,

των υλικών στοιχείων του ρευστού. Αντιστοίχως, τα πεδιακά μεγέθη τα οποία ενδιαφέρουν και εμπλέκονται στις εξισώσεις αυτές είναι επίσης δύο:

- Η ταχύτητα $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}; t) = (u(\mathbf{r}; t), v(\mathbf{r}; t), w(\mathbf{r}; t))$, και
- Η πίεση $p = p(\mathbf{r}; t)$.

Τέλος, όσον αφορά τις εσωτερικές δυνάμεις (ανά μονάδα όγκου του ρευστού) έχουμε πλέον

$$\mathbf{F}_{\varepsilon\sigma}(\mathbf{r}; t) = -\nabla p(\mathbf{r}; t).$$

Στη συνέχεια θα απλουστεύσουμε το συμβολισμό γράφοντας $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; t)$ για τις εξωτερικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου του ρευστού (αντί για $\mathbf{F}_{\varepsilon\xi}(\mathbf{r}; t)$). Δηλαδή

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}}(\mathbf{r}; t) = -\nabla p(\mathbf{r}; t) + \mathbf{F}(\mathbf{r}; t).$$

3. Γραμμές ροής του πεδίου ροής και τροχιές των υλικών στοιχείων του υγρού.

Μία γραμμή γ , κειμένη εντός του πεδίου ροής $D = D(t_o)$ σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t_o , θα λέγεται **γραμμή ροής** αν, σε κάθε σημείο \mathbf{r} αυτής ($\mathbf{r} \in \gamma$), το διάνυσμα της πεδιακής ταχύτητας $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}; t)$ εφάπτεται στη γ .

Ο ανωτέρω ορισμός οδηγεί στη σχέση

$$d\gamma \parallel \mathbf{U}(\mathbf{r}; t), \tag{1}$$

όπου $d\gamma$ είναι το στοιχειώδες τόξο επί της γ . Η σχέση (1) γράφεται αναλυτικότερα στη μορφή

$$\frac{dx}{u(x, y, z; t = t_o)} = \frac{dy}{v(x, y, z; t = t_o)} = \frac{dz}{w(x, y, z; t = t_o)}. \tag{1'}$$

Οι εξισώσεις (1') αποτελούν ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε δύο από τις τρεις πεδιακές μεταβλητές x, y, z , ως συναρτήσεις της τρίτης. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $y = y(x)$ και

$z = z(x)$, οπότε οι εξισώσεις (1') παίρνουν τη μορφή του ακόλουθου μη-γραμμικού συστήματος πρώτης τάξης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y(x), z(x); t_o)}{u(x, y(x), z(x); t_o)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{w(x, y(x), z(x); t_o)}{u(x, y(x), z(x); t_o)}. \quad (2)$$

Το σύστημα αυτό μας επιτρέπει (κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις για το πεδίο ταχύτητας $U(x, y, z; t)$, φυσικά) να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τις συναρτήσεις $y = y(x)$ και $z = z(x)$ με δεδομένες αρχικές τιμές $y_o = y(x_o)$ και $z_o = z(x_o)$. Με αυτό τον τρόπο υπολογίζουμε τη γραμμή ροής που περνάει από το σημείο (x_o, y_o, z_o) . Μεταβάλλοντας την αρχική συνθήκη (x_o, y_o, z_o) , πάντοτε εντός του πεδίου ροής $D = D(t_o)$, βρίσκουμε το σύνολο όλων των γραμμών ροής του πεδίου, για τη δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_o$.

Εάν το πεδίο είναι μόνιμο, δηλαδή εάν $U = U(\mathbf{r})$ για κάθε t , τότε προφανώς οι γραμμές ροής είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Εάν το πεδίο είναι μη-μόνιμο, τότε οι γραμμές ροής αλλάζουν από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (1') ή (2) επιλύονται για κάθε χρονική στιγμή t , δηλαδή ο χρόνος θεωρείται ως μια παράμετρος από την οποία εξαρτώνται τόσο οι εξισώσεις, όσο και οι λύσεις τους:

$$y = y(x; t), z = z(x; t).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι γραμμές ροής δίδουν μια συνολική εικόνα του πεδίου ροής, σε κάθε χρονική στιγμή.

Σε αντίθεση με τα ανωτέρω, η τροχιά ενός υλικού στοιχείου δm_r του υγρού, αναφέρεται σε συγκεκριμένο υλικό στοιχείο (και όχι στο πεδίο ροής γενικά), και ορίζεται, όπως και στην κλασική μηχανική, ως το σύνολο των διαδοχικών θέσεων του υλικού στοιχείου δm_r στο χώρο, καθώς εξελίσσεται η ροή.

Ο ανωτέρω ορισμός οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση της τροχιάς του υλικού στοιχείου δm_r :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r}; t), \quad (3)$$

όπου $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ είναι η αναλυτική αναπαράσταση της τροχιάς. Η εξίσωση (3) γράφεται αναλυτικότερα ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t); t) \quad (3')$$

ή

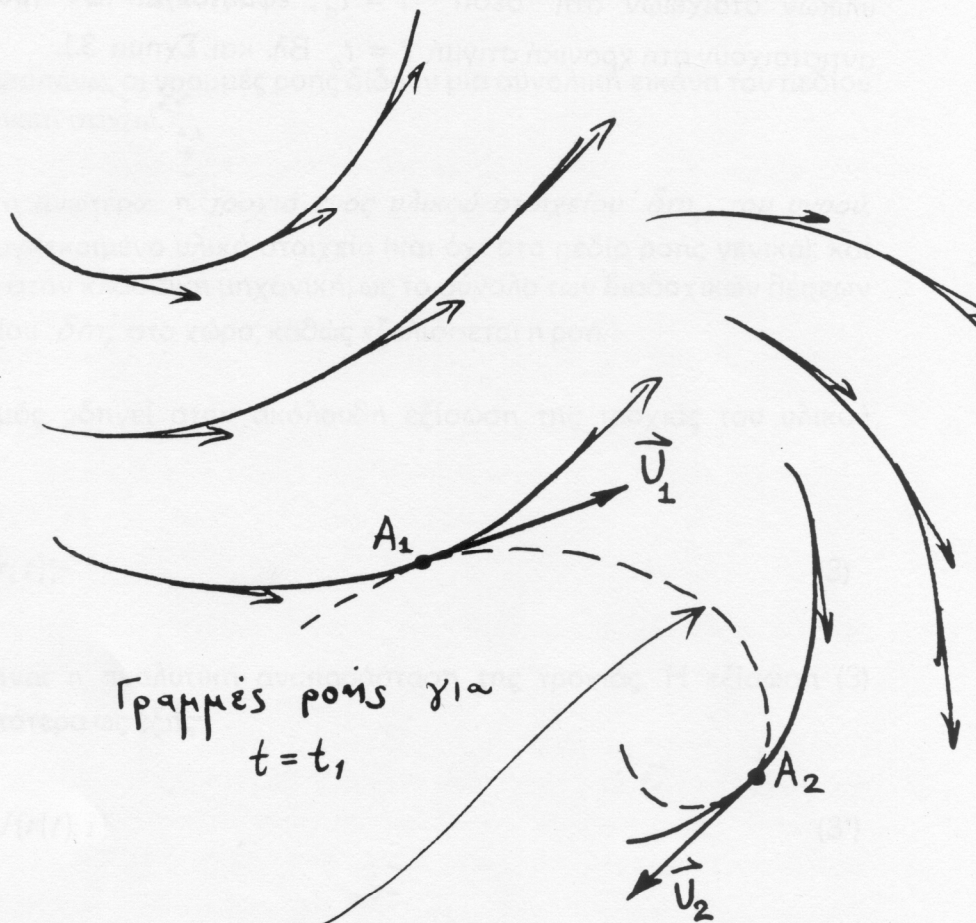
$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= u(x(t), y(t), z(t); t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= v(x(t), y(t), z(t); t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= w(x(t), y(t), z(t); t).\end{aligned}\tag{3''}$$

Το μη-γραμμικό σύστημα των τριών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3'') μας επιτρέπει (κάτω από κατάλληλες συνθήκες για τις συναρτήσεις $u(x, y, z; t)$, $v(x, y, z; t)$, $w(x, y, z; t)$) να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα την τροχιά $r(t)$ του υλικού στοιχείου δm_r , το οποίο τη χρονική στιγμή $t = t_o$ κατέχει τη θέση

$$x_o = x(t_o), \quad y_o = y(t_o), \quad z_o = z(t_o)$$

Μεταβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες (x_o, y_o, z_o) , βρίσκουμε τις τροχιές όλων των υλικών στοιχείων του υγρού.

Όταν η ροή είναι μόνιμη, οι τροχιές των υλικών στοιχείων του υγρού ταυτίζονται με τις γραμμές ροής. Όταν η ροή είναι μη-μόνιμη, τότε οι τροχιές είναι διαφορετικές από τις γραμμές ροής του πεδίου. Πάντοτε όμως οι τροχιές των υλικών στοιχείων στη "θέση" $t = t_o$, εφάπτονται των γραμμών ροής που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή $t = t_o$. Βλ. και Σχήμα 3.1.



Γραμμές ροής για $t=t_1$

Γραμμές ροής για $t=t_2$

Τροχιά υλικού στοιχείου το οποίο βρίσκεται στη θέση A_1 κατά τη χρονική στιγμή t_1 και στη θέση A_2 κατά τη χρονική στιγμή t_2 . Οι ταχύτητες $\vec{U}_1(t_1)$ και $\vec{U}_2(t_2)$ του υλικού στοιχείου είναι κοινές εφαπτόμενες με τροχιάς και των αντίστοιχων γραμμών ροής.

Σχήμα 3.1

**4. Χρονικός ρυθμός μεταβολής φυσικών χαρακτηριστικών του πεδίου ροής.
Υλική παράγωγος**

Έστω $a = a(\mathbf{r}; t) = a(x, y, z; t)$ ένα οποιοδήποτε βαθμωτό φυσικό μέγεθος (π.χ. θερμοκρασία), το οποίο αναφέρεται στο υλικό στοιχείο $\delta m_r(t)$, δηλαδή στο υλικό στοιχείο που κατέχει τη θέση $\mathbf{r} = (x, y, z)$, τη χρονική στιγμή t . Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο 3, μπορούμε να γράψουμε $a = a(\delta m_r(t))$. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το χρονικό ρυθμό μεταβολής του μεγέθους $a(\delta m_r(t))$.

Μετά πάροδο χρόνου δt , το υλικό στοιχείο δm θα βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$. (Βλ. και Σχήμα 4.1). Δηλαδή

$$\delta m_r(t) \xrightarrow{\delta t} \delta m_{\mathbf{r}+\delta \mathbf{r}}(t + \delta t).$$

Κατά συνέπεια, ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους $a(\delta m_r(t))$ (αναφερόμενου στο συγκεκριμένο υλικό στοιχείο δm) θα δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{Da(\mathbf{r}; t)}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{a(\delta m_{\mathbf{r}+\delta \mathbf{r}}(t + \delta t)) - a(\delta m_r(t))}{\delta t} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{a(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}; t + \delta t) - a(\mathbf{r}; t)}{\delta t} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left(a(\mathbf{r}; t) + \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial t} \delta t + \dots - a(\mathbf{r}; t) \right), \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla.$$

(Οι τρεις τελείες στην παραπάνω σχέση συμβολίζουν όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης ως προς $\delta \mathbf{r}$ και δt). Παίρνοντας το όριο για $\delta t \rightarrow 0$, η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\frac{Da(\mathbf{r}; t)}{Dt} = \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1)$$

Όμως, δεδομένου ότι $d\mathbf{r}$ είναι η μετακίνηση του υλικού στοιχείου $\delta m_r(t)$ στο χρόνο δt , $d\mathbf{r}/dt$ είναι η ταχύτητα $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}; t)$. Έτσι, η σχέση (1) γράφεται και στη μορφή

$$\frac{Da(\mathbf{r}; t)}{Dt} = \frac{\partial a(\mathbf{r}; t)}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}; t) \cdot \nabla a(\mathbf{r}; t). \quad (1')$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι ο χρονικός ρυθμός μεταβολής βαθμωτών πεδιακών μεγεθών, αναφερόμενων στα υλικά στοιχεία του υγρού, προκύπτει με εφαρμογή στο πεδιακό μέγεθος του διαφορικού τελεστή

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + (\mathbf{U}(\mathbf{r};t) \cdot \nabla)(\bullet). \quad (2)$$

Ο διαφορικός τελεστής (2) λέγεται *υλική παράγωγος* (*material derivative*). Χρησιμοποιούνται ακόμη τα ονόματα ολική παράγωγος (total derivative) και ουσιώδης παράγωγος (essential derivative). Εδώ θα χρησιμοποιούμε μόνο την πρώτη ονομασία (υλική παράγωγος), η οποία και θυμίζει τη χαρακτηριστική ιδιότητα του τελεστή (2).

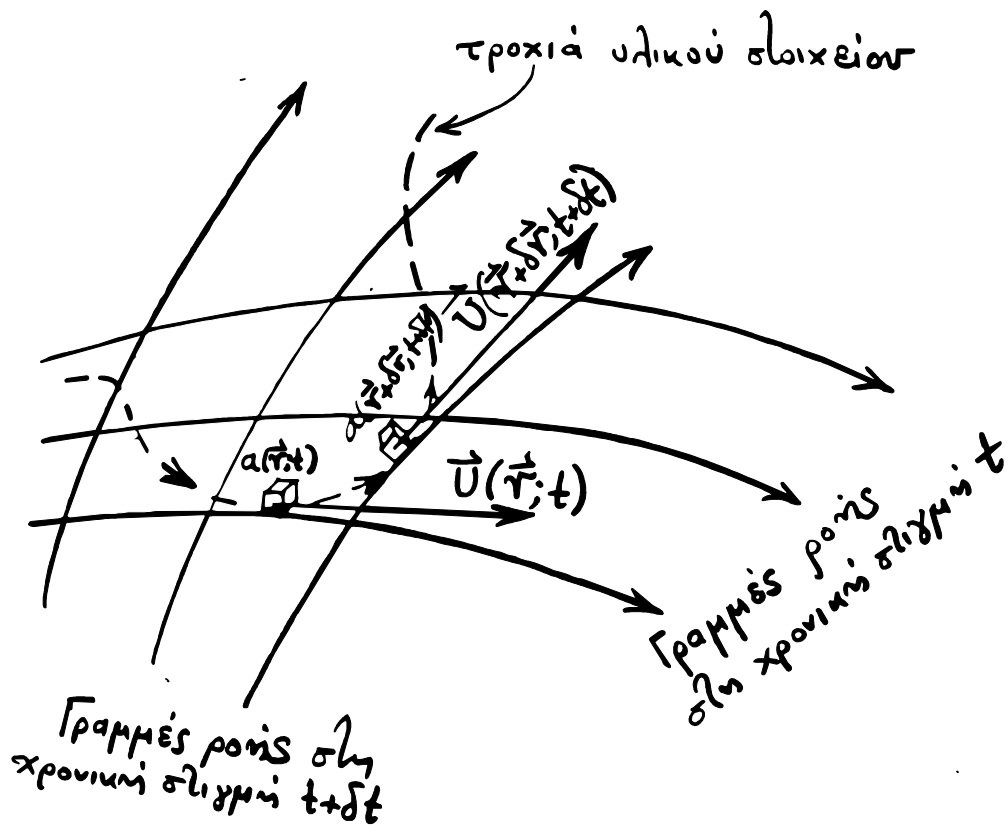
Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής διανυσματικού μεγέθους $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r};t)$, αναφερόμενου στα υλικά στοιχεία του υγρού, βρίσκεται εύκολα, είτε εφαρμόζοντας τη σχέση (2) σε κάθε συνιστώσα του \mathbf{V} , είτε εργαζόμενοι εξ αρχής ως ανωτέρω με το διανυσματικό μέγεθος $\mathbf{V}(\mathbf{r};t)$. Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{D\mathbf{V}(\mathbf{r};t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{V}(\mathbf{r};t)}{\partial t} + (\mathbf{U}(\mathbf{r};t) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r};t). \quad (3)$$

Με άλλα λόγια, η υλική παραγωγή, στη μορφή (2), εφαρμόζεται τόσο σε βαθμωτά, όσο και σε διανυσματικά μεγέθη.

Μια πρώτη συνέπεια της σχέσης (3) είναι ότι η επιτάχυνση του υλικού στοιχείου $\delta m_r(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{D\mathbf{U}(\mathbf{r};t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{U}(\mathbf{r};t)}{\partial t} + (\mathbf{U}(\mathbf{r};t) \cdot \nabla) \mathbf{U}(\mathbf{r};t). \quad (4)$$



Σχήμα 4.1

5. Εξισώσεις κίνησης ασυμπίεστου μη-συνεκτικού υγρού

Όπως αναφέρθηκε ήδη στο εδάφιο 2, οι θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι που διέπουν την κίνηση του ασυμπίεστου, μη-συνεκτικού υγρού είναι: ο ισολογισμός της ορμής (εξισώσεις Euler), και ο ισολογισμός της μάζας (εξίσωση συνέχειας).

Εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις Euler προκύπτουν με εφαρμογή του νόμου του Newton ($\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$) σε κάθε υλικό στοιχείο του υγρού. Εάν $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ είναι ο όγκος του εξεταζόμενου υλικού στοιχείου (στοιχειώδους κύβου) και ρ η πυκνότητά του, τότε έχουμε

$$\rho \delta V \frac{DU}{Dt} = -\nabla p \delta V + \mathbf{F} \delta V,$$

όπου \mathbf{F} είναι η συνολική εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου που ασκείται στο στοιχειώδη κύβο του υγρού (βλ. και εδάφιο 2).

Διαιρώντας δια ρ παίρνουμε

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}, \quad (1)$$

ή

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \quad (1')$$

Με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (2)$$

βρίσκουμε, θέτοντας $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{U}$,

$$\nabla U^2 = 2\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + 2(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}. \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (3) μπορούμε να μετασχηματίσουμε την (1') ως εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla U^2 - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}. \quad (1'')$$

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις ανά μονάδα μάζας $\rho^{-1} \mathbf{F} = \rho^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}; t)$ προκύπτουν από ένα *συντηρητικό πεδίο* και άρα εκφράζονται με τη βοήθεια ενός *δυναμικού* (δυναμικής ενέργειας) $\Omega = \Omega(\mathbf{r}; t)$ ως εξής:

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}; t)}{\rho} = -\nabla \Omega(\mathbf{r}; t). \quad (4)$$

Ειδικότερα, για τη μοντελοποίηση και μελέτη των υδάτινων επιφανειακών κυμάτων θεωρούμε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις προέρχονται αποκλειστικά από ένα *ομογενές πεδίο βαρύτητας* με ένταση (επιτάχυνση της βαρύτητας) \mathbf{g} . Κατά συνέπεια, αν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων με τον άξονα z κατευθυνόμενο “προς τα επάνω” (αντίθετα προς το διάνυσμα \mathbf{g}), θα έχουμε

$$\Omega = gz \quad \text{και} \quad \nabla \Omega = g\mathbf{k} \quad (5)$$

όπου g είναι το μέτρο του διανύσματος \mathbf{g} .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4), η εξίσωση (1'') γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla U^2 - \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Omega. \quad (6)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μορφή (6) των εξισώσεων Euler είναι ιδιαίτερα βολική για την παραγωγή του Θεωρήματος του Bernoulli.

Εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη κύβο του υγρού ο οποίος, κατά τη χρονική στιγμή t , έχει πλευρές $\delta x(t)$, $\delta y(t)$, $\delta z(t)$ και όγκο $\delta V(t) = \delta x(t) \delta y(t) \delta z(t)$. Δεδομένου ότι $\delta m = \rho \delta V(t)$ και $\rho = \rho_0 = \text{σταθερή}$, ο ισολογισμός (εξίσωση διατήρησης) της μάζας εκφράζεται από τη σχέση

$$\frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0. \quad (7)$$

Όμως, σύμφωνα με τη φυσική έννοια της υλικής παραγώγου (βλ. εδάφιο 4), θα είναι

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta V(t + \delta t) - \delta V(t)}{\delta t}, \quad (8)$$

όπου $\delta V(t + \delta t)$ είναι ο όγκος του στοιχείου στο οποίο μετασχηματίζεται ο αρχικός στοιχειώδης κύβος, μετά πάροδο χρόνου δt . Σε πρώτη τάξη προσέγγισης ισχύει η σχέση

$$\delta V(t + \delta t) = \delta x(t + \delta t) \delta y(t + \delta t) \delta z(t + \delta t),$$

δεδομένου ότι το μετασχηματισμένο υλικό στοιχείο διαφέρει απειροστά από ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Όμως, το μήκος των ακμών δx , δy , δz , μεταβάλλεται αποκλειστικά και μόνο λόγω της διαφοράς των αντίστοιχων πεδιακών ταχυτήτων στα άκρα των ακμών. Οι διαφορές αυτές δίνονται, σε πρώτη τάξη, από τις σχέσεις

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, \quad \delta v = \frac{\partial v}{\partial y} \delta y, \quad \delta w = \frac{\partial w}{\partial z} \delta z.$$

Με τη βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων βρίσκουμε

$$\delta x(t + \delta t) = \delta x(t) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x(t) \delta t = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \delta t\right) \delta x(t),$$

$$\delta y(t + \delta t) = \delta y(t) + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y(t) \delta t = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t\right) \delta y(t),$$

$$\delta z(t + \delta t) = \delta z(t) + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z(t) \delta t = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t\right) \delta z(t).$$

Κατά συνέπεια

$$\delta V(t + \delta t) - \delta V(t) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \delta t\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta t\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta t\right) \delta V(t) - \delta V(t),$$

απ' όπου προκύπτει

$$\delta V(t + \delta t) - \delta V(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \delta V(t) \delta t + \delta V(t) O(\delta t^2). \quad (9)$$

Εισάγοντας την (9) στην (8) και αγνοώντας τους δευτεροτάξιους όρους, βρίσκουμε

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \delta V(t) = \nabla \cdot \mathbf{U} \delta V(t) \quad (10)$$

Άρα η εξίσωση συνέχειας (7) παίρνει τη μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (11)$$

Παρατήρηση: Με τη βοήθεια της σχέσεως (10) είναι πολύ εύκολο να διατυπώσουμε την εξίσωση διατήρησης της μάζας και στη γενική περίπτωση, όπου η πυκνότητα του υγρού μεταβάλλεται. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή η πρωτογενής εξίσωση διατήρησης της μάζας $D(\rho \delta V)/Dt = 0$ γράφεται στη μορφή

$$\frac{D\rho}{Dt} \delta V(t) + \rho \frac{D\delta V(t)}{Dt} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\delta V(t)} \frac{D(\delta V(t))}{Dt} = 0.$$

Εισάγοντας τη (10) στην τελευταία παίρνουμε

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

ή

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (12)$$

Η τελευταία είναι η γενική εξίσωση συνέχειας ενός οποιοδήποτε ρευστού. Η εξίσωση αυτή απαντάται συνήθως υπό την ακόλουθη εναλλακτική μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (13)$$

η οποία προκύπτει άμεσα από την (12), αν αναλύσουμε την υλική παράγωγο.

6. Συνέπειες των εξισώσεων κίνησης: Θεώρημα Kelvin, αστρόβιλη ροή, Θεώρημα Bernoulli

Στις εξισώσεις Euler, μορφή (1') του εδαφίου 5, περιέχεται η *στροβιλότητα* $\text{rot } \mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{U}$ του πεδίου ροής. Το μέγεθος αυτό έχει πολύ μεγάλη φυσική σημασία, και χαρακτηρίζει σε μεγάλο βαθμό τη δυναμική συμπεριφορά του πεδίου ροής. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε διάφορες συνέπειες των εξισώσεων κίνησης, οι οποίες αναφέρονται στη στροβιλότητα του πεδίου $\nabla \times \mathbf{U}$.

Κατ' αρχήν, μέσω του θεωρήματος του Stokes (βλ., π.χ., Παντελίδης, τόμος III, 1994, Κεφάλαιο 15), βλέπουμε ότι η στροβιλότητα $\nabla \times \mathbf{U}$ συνδέεται με την κυκλοφορία του πεδίου ταχύτητας \mathbf{U} σε κλειστές καμπύλες. Πράγματι, αν S είναι μια (ανοικτή) επιφάνεια στο χώρο, η οποία περατούται στην κλειστή καμπύλη ℓ (βλ. Σχήμα 6.1), τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes, έχουμε

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\ell} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\ell}, \quad (1)$$

όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S , και $d\boldsymbol{\ell}$ είναι το στοιχειώδες τόξο πάνω στην καμπύλη ℓ . Η τελευταία θεωρείται προσανατολισμένη με θετική φορά διαγραφής δεξιόστροφα συνδεδεμένη με τη φορά του \mathbf{n} . Το δεύτερο μέλος της (1) είναι η *κυκλοφορία* του πεδίου ταχύτητας κατά μήκος της κλειστής καμπύλης ℓ .

Ένα άμεσο πόρισμα της σχέσης (1) είναι ότι, σε ένα ομαλό πεδίο ροής, η στροβιλότητα είναι μηδέν αν και μόνον αν η κυκλοφορία κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης που βρίσκεται μέσα στο πεδίο είναι μηδέν. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το ρυθμό μεταβολής της κυκλοφορίας κατά μήκος μιας *υλικής κλειστής καμπύλης* ℓ .

Θεώρημα Kelvin

Το Θεώρημα του Kelvin για την κυκλοφορία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Εάν ℓ είναι μια οποιαδήποτε υλική κλειστή καμπύλη, ευρισκόμενη εξ ολοκλήρου μέσα σε πεδίο ροής ρευστού το οποίο διέπεται από τις εξισώσεις Euler, με συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις ($\mathbf{F} = -\nabla \Omega$), τότε

$$\frac{D}{Dt} \oint_{\ell} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \quad (2)$$

Δηλαδή, η τιμή της κυκλοφορίας κατά μήκος κάθε υλικής καμπύλης του πεδίου ροής διατηρείται σταθερή.

Για να αποδείξουμε τη σχέση (2) παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$\oint_{\ell} \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\ell} u dx + v dy + w dz. \quad (3)$$

Εξετάζουμε τώρα το ρυθμό μεταβολής της ποσότητας udx , παρακολουθώντας την κίνηση των υλικών στοιχείων:

$$\frac{D(udx)}{Dt} = \frac{Du}{Dt}dx + u \frac{D(dx)}{Dt}. \quad (4)$$

Όμως, βάσει των εξισώσεων Euler (εξίσωση (1) του εδαφίου 5 σε συνδιασμό με την εξίσωση (4) του ίδιου εδαφίου) έχουμε

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p_{,x} - \Omega_{,x}. \quad (5)$$

Εξ άλλου, επειδή το στοιχείο $d\ell = (dx, dy, dz)$ κινείται μαζί με τα υλικά στοιχεία του ρευστού (βλ. Σχήμα 6.2), η οποιαδήποτε μεταβολή του με το χρόνο σχετίζεται αποκλειστικά με τη διαφορά της ταχύτητας u στα άκρα του. Άρα ισχύει η σχέση

$$\frac{D(dx)}{Dt} = du. \quad (6)$$

Εισάγοντας τις (5) και (6) στην (4) βρίσκουμε

$$\frac{D(udx)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho} p_{,x} - \Omega_{,x} \right) dx + udu. \quad (7a)$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{D(vdy)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho} p_{,y} - \Omega_{,y} \right) dy + vdv, \quad (7b)$$

και

$$\frac{D(wdz)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho} p_{,z} - \Omega_{,z} \right) dz + wdw. \quad (7c)$$

Αθροίζοντας τις (7a,b,c) παίρνουμε

$$\frac{D}{Dt}(udx + vdy + wdz) \equiv \frac{D}{Dt}(\mathbf{U} \cdot d\ell) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\ell - \nabla \Omega \cdot d\ell + \frac{1}{2} dU^2. \quad (8)$$

Ολοκληρώνοντας την (8) κατά μήκος της καμπύλης ℓ , μεταξύ των σημείων A και B, βρίσκουμε

$$\frac{D}{Dt} \int_A^B \mathbf{U} \cdot d\ell = \left[-\frac{p}{\rho} - \Omega + \frac{1}{2} U^2 \right]_A^B, \quad (9)$$

δεδομένου ότι $\nabla p \cdot d\ell = \partial p / \partial \ell$ είναι η παράγωγος της πίεσης κατά μήκος της καμπύλης ℓ , και ομοίως για το Ω . (Η εναλλαγή της τάξης της ολοκλήρωσης και της παραγωγίσισης $D(\bullet)/Dt$ είναι επιτρεπτή επειδή ακριβώς έχουμε υλική παραγωγή στα στοιχεία μιας υλικής καμπύλης).

Αν φανταστούμε τώρα ότι το σημείο B επανέρχεται στο A έχοντας διατρέξει την καμπύλη ℓ , τότε η (9) μας δίνει

$$\frac{D}{Dt} \oint_{\ell} \mathbf{U} \cdot d\ell = \left[-\frac{p}{\rho} - \Omega + \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 \right]_A^A = 0,$$

δηλαδή την αποδεικτέα σχέση (2). Τονίζουμε εδώ ότι το γεγονός ότι το πεδίο εξωτερικών δυνάμεων είναι συντηρητικό, είναι ουσιώδες για την ισχύ του θεωρήματος του Kelvin.

Αστρόβιλη ροή, εξίσωση Laplace

Μια ροή (ένα πεδίο ροής) λέγεται *αστρόβιλη* (αστρόβιλο) αν ισχύει η σχέση

$$\nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r}; t) = 0 \tag{10}$$

παντού μέσα στο πεδίο.

Γενικώς, η σχέση (10) εξαρτάται από το χρόνο. Συνδιάζοντας όμως τα θεωρήματα Stokes και Kelvin μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

Για ένα πεδίο ροής που διέπεται από τις εξισώσεις Euler με συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r}; t = t_0) = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r}; t) = 0, \quad \text{για κάθε } t. \tag{11}$$

Δηλαδή, αν το πεδίο είναι αστρόβιλο σε μια χρονική στιγμή $t = t_0$, τότε θα παραμένει διαρκώς αστρόβιλο.

Στη συνέχεια θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε αστρόβιλα πεδία ροής. Η χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε αστρόβιλου πεδίου $\mathbf{U}(\mathbf{r}; t)$ είναι ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως κλίση (gradient) ενός κατάλληλου βαθμωτού πεδίου. Δηλαδή, αν $\mathbf{U}(\mathbf{r}; t)$ είναι αστρόβιλο πεδίο, τότε υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\Phi(\mathbf{r}; t)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}; t) = \nabla \Phi(\mathbf{r}; t). \tag{12}$$

Όταν το $\mathbf{U}(\mathbf{r}; t)$ είναι το πεδίο ταχύτητας, το βαθμωτό πεδίο $\Phi(\mathbf{r}; t)$ ονομάζεται *δυναμικό ταχύτητας* (velocity potential). (Στη σχέση (12) ο χρόνος υπεισέρχεται ως παράμετρος).

Αν θυμηθούμε τώρα την εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου υγρού (εξίσωση (11) εδαφίου 5)

$$\nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}; t) = 0, \quad (13)$$

και τη συνδυάσουμε με την ανωτέρω αναπαράσταση (12) του πεδίου ροής, παίρνουμε

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi(\mathbf{r}; t) \equiv \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}; t) \equiv \Delta \Phi(\mathbf{r}; t)) \quad (14)$$

$$\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\mathbf{r}; t) = 0.$$

Δηλαδή, το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r}; t)$ κάθε αστρόβιλης και ασυμπίεστης ροής ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\Delta \Phi(\mathbf{r}; t) = 0$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι μεγάλης σημασίας για τη μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη αστρόβιλων, ασυμπίεστων ροών, καθ' ότι ανάγει την επίλυσή τους στη λύση της εξίσωσης Laplace, συμπληρωμένης βέβαια με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής: Η εξίσωση Laplace, η οποία παίζει το ρόλο της πεδιακής εξίσωσης στα προβλήματα αστρόβιλης και ασυμπίεστης ροής, είναι ανεξάρτητη από τις δυναμικές εξισώσεις της ροής (εξισώσεις Euler), και άρα δεν περιέχει καμιά πληροφορία δυναμικού χαρακτήρα. Το “αφύσικο” αυτό γεγονός σημαίνει ότι η αστρόβιλη ασυμπίεστη ροή είναι (σε ορισμένες τουλάχιστον περιπτώσεις) πλήρως καθορισμένη από τους κινηματικούς συνδέσμους της ασυμπιεστότητας και της αστροβιλότητας. Υπό αυτές τις συνθήκες είναι αναμενόμενο ότι το ανωτέρων μοντέλο θα είναι αρκετά “φτωχό” από φυσική άποψη. Αυτό είναι πράγματι έτσι, εκτός από τις περιπτώσεις όπου οι δυναμικές εξισώσεις υπεισέρχονται τελικά (μέ κάποιον τρόπο) στη διαμόρφωση του συνολικού υδροδυναμικού προβλήματος. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση ροών με ελεύθερη επιφάνεια, όπου οι δυναμικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση των οριακών συνθηκών της ελεύθερης επιφάνειας (βλ. εδάφιο 7). Σε κάθε περίπτωση βέβαια, οι δυναμικές εξισώσεις δεν απαλείφονται από το πρόβλημα. Χρησιμοποιούνται πάντοτε για τον προσδιορισμό του πεδίου πιέσεων $p = p(\mathbf{r}; t)$, και άρα για τον προσδιορισμό των δυνάμεων που αναπτύσσονται πάνω στα στερεά σώματα (σύνορα) που κινούνται σε αλληλεπίδραση με το υγρό.

Θεώρημα Bernoulli

Οι εξισώσεις Euler περιέχουν την κλίση $\nabla p(\mathbf{r}; t)$ του πεδίου της πίεσης, και άρα είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις ως προς $p = p(\mathbf{r}; t)$. Εν τούτοις, στην περίπτωση αστρόβιλης ροής (η ιδιότητα του ασυμπίεστου δεν είναι σημαντική εν προκειμένω), οι εξισώσεις Euler μπορούν να ολοκληρωθούν ως προς την πίεση, οδηγώντας σε μια κλειστή έκφραση της τελευταίας συναρτήσεως του δυναμικού ταχύτητας. Το αποτέλεσμα αυτό αναφέρεται ως *θεώρημα Bernoulli*.

Εισάγοντας την αναπαράσταση (12) του πεδίου ταχύτητας στη σχέση (6) του εδαφίου 5, παίρνουμε

$$\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi)^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Omega = 0$$

ή

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0. \quad (15)$$

Η τελευταία, ολοκληρωνόμενη κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης μέσα στο πεδίο ροής, μας δίνει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = C = C(t). \quad (16)$$

Η “σταθερά” $C = C(t)$ μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο, δεδομένου ότι η ολοκλήρωση της (15) γίνεται ως προς τις χωρικές μεταβλητές μόνο. Όμως, το δυναμικό ταχύτητας μπορεί πάντοτε να επανορισθεί έτσι ώστε να “απορροφήσει” μια οποιαδήποτε συνάρτηση εξαρτώμενη μόνο από το χρόνο. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\Phi_1(\mathbf{r}; t) = \Phi(\mathbf{r}; t) + \int^t C(\tau) d\tau,$$

τότε η μέν σχέση (16) γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_1)^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = 0, \quad (16')$$

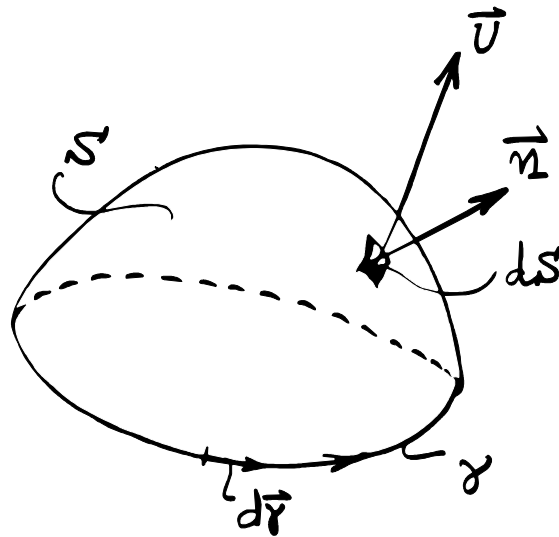
το δε δυναμικό $\Phi_1(\mathbf{r}; t)$ είναι ισοδύναμο, από φυσική άποψη, με το αρχικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r}; t)$, δεδομένου ότι

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u,$$

και ομοίως για τις άλλες συνιστώσες της ταχύτητας.

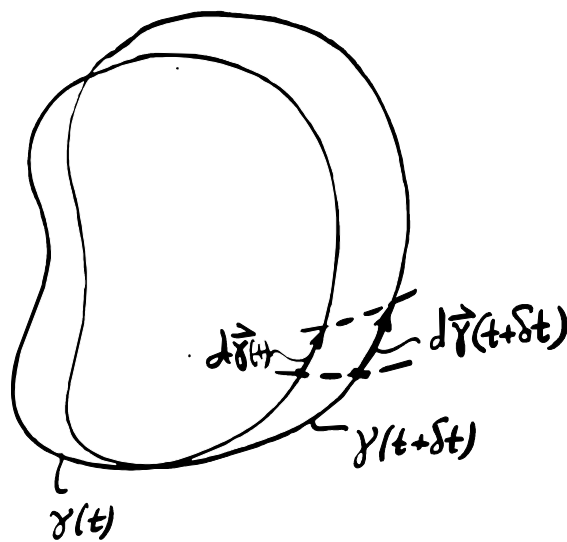
Η εξίσωση (16) ή (16') (το θεώρημα ή νόμος του Bernoulli) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο της πίεσης, αν γνωρίζουμε το πεδίο του δυναμικού ταχύτητας:

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \Omega. \quad (16'')$$



$$\iint_S (\nabla \times \vec{U}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{\gamma}$$

Σχίσμα 6.1: Θεώρημα Stokes



$$\frac{D}{Dt} \oint_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{\gamma} = 0$$

Σχίσμα 6.2: Θεώρημα Kelvin

7. Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Τα θεμελιώδη φυσικά χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας είναι τα εξής:

- i) Η ελεύθερη επιφάνεια είναι μια **υλική επιφάνεια**, δηλαδή αποτελείται διαρκώς από τα ίδια υλικά στοιχεία του υγρού. (Η ελεύθερη επιφάνεια μετακινείται στο χώρο ακριβώς λόγω της μετακίνησης των υλικών στοιχείων που την αποτελούν).
- ii) Τα υλικά στοιχεία της ελεύθερης επιφάνειας υφίστανται την επίδραση της **επιφανειακής τάσης** (surface tension), η οποία είναι συνέπεια της μικροσκοπικής ασυμμετρίας που υπάρχει λόγω της ασυνέχειας της πυκνότητας⁽²⁾. Ο τρόπος με τον οποίο εκδηλώνεται μακροσκοπικά το φαινόμενο της επιφανειακής τάσης είναι ισοδύναμος με την ύπαρξη μιας ελαστικής μεμβράνης η οποία καλύπτει την ελεύθερη επιφάνεια (βλ. π.χ., Landau and Lifshitz 1969, Κεφάλαιο 7). Εφαρμόζοντας το νόμο του Newton σε ένα επιφανειακό δοχείο απειροστού πάχους (βλ. Σχήμα 1) βρίσκουμε ότι η **διαφορά της τιμής της πίεσης στις δύο πλευρές της ελεύθερης επιφάνειας θα πρέπει να εξισορροπεί την επίδραση της επιφανειακής τάσης**. Στις περιπτώσεις όπου η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέα (όπως είναι τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης κυμάτων και σωμάτων μεγάλων διαστάσεων, τα οποία μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα εδώ), **η πίεση στις δύο πλευρές της ελεύθερης επιφάνειας πρέπει να είναι ίδια**. Με άλλα λόγια, αν η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι αμελητέα, **έχουμε συνέχεια της πίεσης σε κάθε σημείο της ελεύθερης επιφάνειας**.

Οι ανωτέρω δύο φυσικές ιδιότητες ισχύουν και στην περίπτωση επιφάνειας που διαχωρίζει δύο μη αναμειγνύόμενα υγρά, η οποία καλείται και διεπιφάνεια (interface). Η ελεύθερη επιφάνεια αποτελεί μια ειδική περίπτωση διεπιφάνειας, όπου η πυκνότητα του υπερκειμένου ρευστού είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα του υγρού το οποίο βρίσκεται στο κατώτερο στρώμα. Στις περιπτώσεις αυτές συνήθως θεωρούμε ότι η πυκνότητα του υπερκειμένου ρευστού είναι μηδενική.

Οι ανωτέρω δύο ιδιότητες μεταφράζονται σε αντίστοιχες μαθηματικές συνθήκες, οι οποίες αποτελούν τις **οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας** (ή **διεπιφάνειας**). Ο προσδιορισμός της αναλυτικής μορφής των συνθηκών αυτών είναι ο σκοπός του παρόντος εδαφίου. Η φυσική συνθήκη i) καθώς και η εξ αυτής επαγόμενη μαθηματική συνθήκη, αναφέρεται ως **κινηματική συνθήκη** της ελεύθερης επιφάνειας (διεπιφάνειας). Αντίστοιχα, η φυσική συνθήκη ii), καθώς και η εξ αυτής επαγόμενη μαθηματική συνθήκη, αναφέρεται ως **δυναμική συνθήκη** της ελεύθερης επιφάνειας (διεπιφάνειας). Οι ονομασίες αυτές υπενθυμίζουν τη φυσική προέλευση των ανωτέρων συνθηκών.

Η ελεύθερη επιφάνεια θα συμβολίζεται γεωμετρικά με ∂D_F ή, όταν θέλουμε να τονίσουμε το γεγονός ότι μεταβάλλεται με το χρόνο $\partial D_F(t)$. Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας θα γράφεται είτε στην πεπλεγμένη μορφή

$$F(\mathbf{r};t) = 0 \quad \text{ή} \quad F(x, y, z; t) = 0, \quad (1)$$

είτε στη λυμένη μορφή,

⁽²⁾ Υπενθυμίζεται ότι η ύπαρξη ελεύθερης (ή διαχωριστικής) επιφάνειας προϋποθέτει ασυνέχεια της πυκνότητας.

$$z = \eta(x, y; t) \quad (1')$$

όπου $\eta(x, y; t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ως προς την αδιατάρακτη θέση της. Σύμφωνα με τον ανωτέρω συμβολισμό ισχύει η σχέση

$$\mathbf{r} \in \partial D_F(t) \Leftrightarrow F(\mathbf{r}; t) = 0. \quad (2)$$

Με σκοπό να απλουστεύσουμε τη μορφή των μαθηματικών σχέσεων, εισάγουμε και ένα δεύτερο συμβολισμό για τη μερική παράγωγο, μέσω του αντίστοιχου δείκτη μετά από κόμμα. Δηλαδή

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_{,x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = F_{,t} \quad \text{κ.λπ.}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς.

3 Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Για τη μαθηματική έκφραση της κινηματικής συνθήκης θα εργασθούμε κατ' αρχήν με την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας μέσω της (1).

Η ελεύθερη επιφάνεια έχει, κατ' αρχήν, δύο καθορισμούς ("υποστάσεις"). Ένα **γεωμετρικό καθορισμό** μέσω της εξίσωσης (1), και **έναν υλικό καθορισμό** μέσω των υλικών στοιχείων της. Η κινηματική συνθήκη ταυτοποιεί αυτές τις δύο υποστάσεις.

Μετά από πάροδο χρόνου δt , το υλικό στοιχείο $\delta m_r(t)$ μετακινείται στη θέση $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r} = (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$. Κατά συνέπεια, το σύνολο των στοιχείων

$$\{\delta m_{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}}(t + \delta t) : \mathbf{r} \in \partial D_F(t)\}$$

είναι ακριβώς η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού τη χρονική στιγμή $t + \delta t$. Άρα, θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$F(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}; t + \delta t) = 0, \quad (3)$$

και αυτή να είναι η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας τη χρονική στιγμή $t + \delta t$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την (3) και λαβαίνοντας υπ' όψιν την (1) βρίσκουμε

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}; t)}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F(\mathbf{r}; t)}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} + (\dots) = 0,$$

όπου οι τελείες (...) υποδηλώνουν όρους ανώτερης τάξης ως προς δt και $\delta \mathbf{r}$. Διαιρώντας την τελευταία σχέση δια δt και παίρνοντας το όριο για $\delta t \rightarrow 0$ βρίσκουμε

$$\frac{\partial F(\mathbf{r};t)}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r};t) \frac{\partial F(\mathbf{r};t)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (4)$$

ή

$$\frac{DF(\mathbf{r};t)}{Dt} = 0. \quad (4')$$

Δηλαδή, η υλική παράγωγος της εξίσωσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι ίση με μηδέν. Η συνθήκη αυτό αποδίδει μαθηματικά το γεγονός ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι μια υλική επιφάνεια.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη λυμένη αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας (1'), τότε η συνθήκη (4') γίνεται

$$\frac{D(z - \eta(x, y; t))}{Dt} = 0 \quad (5)$$

ή

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y - w = 0. \quad (5')$$

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην εξίσωση (5') όσον αφορά τα ορίσματα των πεδιακών ταχυτήτων u , v , w . Δεδομένου ότι η (5') ισχύει πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, θα έχουμε

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, \eta(x, y; t); t), \\ v &= v(x, y, \eta(x, y; t); t), \\ w &= w(x, y, \eta(x, y; t); t). \end{aligned} \quad (6)$$

Κατά συνέπεια, η συνθήκη (5') είναι μια πεπλεγμένη, μη-γραμμική συνθήκη, η οποία συνδέει την (άγνωστη) ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta(x, y; t)$ με το (άγνωστο επίσης) πεδίο ταχύτητας $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, \eta(x, y; t); t)$ πάνω σε αυτήν.

Εάν τώρα, το πεδίο ταχύτητας παράγεται από ένα δυναμικό ταχύτητας, δηλαδή εάν $\mathbf{U} = \nabla \Phi$, τότε η εξίσωση (5') γράφεται στη μορφή

$$\eta_t + \Phi_{,x}\eta_x + \Phi_{,y}\eta_y - \Phi_{,z} = 0, \quad (7)$$

όπου και πάλι

$$\Phi = \Phi(x, y, \eta(x, y; t); t). \quad (8)$$

4 Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Ας συμβολίσουμε με τ τον συντελεστή της επιφανειακής τάσης και με $\kappa = \kappa(\mathbf{r}; t)$ τη μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (9)$$

όπου R_1, R_2 οι δύο ακτίνες καμπυλότητας της ελεύθερης επιφάνειας. Αποδεικνύεται τότε (βλ., π.χ., Landau and Lifshitz, Κεφάλαιο 7), ότι η επιφανειακή τάση έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη κάθετης (στην ελεύθερη επιφάνεια) δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας (δηλαδή πίεσης) ίσης με

$$p_\tau(\mathbf{r}; t) = 2\tau\kappa(\mathbf{r}; t). \quad (10)$$

Ας συμβολίσουμε τώρα με $\bar{p} = \bar{p}(x, y, \eta(x, y, t); t)$ την εξωτερική πίεση που εφαρμόζεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, και με $p_F = p_F(\mathbf{r}; t)$ την πίεση που επάγεται από το πεδίο ροής στο σημείο \mathbf{r} της ελεύθερης επιφάνειας $\partial D_F(t)$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bernoulli έχουμε

$$p_F(\mathbf{r}; t) = -\rho\Phi_{,t} - \frac{1}{2}\rho(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) - \rho g\eta. \quad (11)$$

Εξ άλλου, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν ανωτέρω (ιδιότητα ii) στην αρχή του παρόντος εδαφίου), έχουμε

$$p_F(\mathbf{r}; t) - \bar{p}(\mathbf{r}; t) = p_\tau(\mathbf{r}; t), \quad (12)$$

σε κάθε σημείο \mathbf{r} της ελεύθερης επιφάνειας $\partial D_F(t)$. Εισάγοντας τις εκφράσεις (10) και (11) για τις p_τ και p_F , αντιστοίχως, στην (12) βρίσκουμε

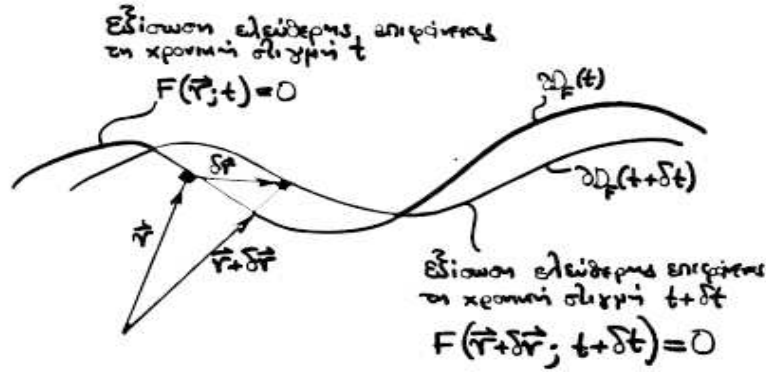
$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) + g\eta + 2\tilde{\tau}\kappa = -\frac{\bar{p}}{\rho}, \quad (13)$$

όπου $\tilde{\tau} = \tau / \rho$. Υπενθυμίζεται ότι, και πάλι, τα ορίσματα του δυναμικού Φ και των παραγώγων του περιέχουν την άγνωστη ανύψωση $\eta = \eta(x, y, t)$, όπως στη σχέση (8).

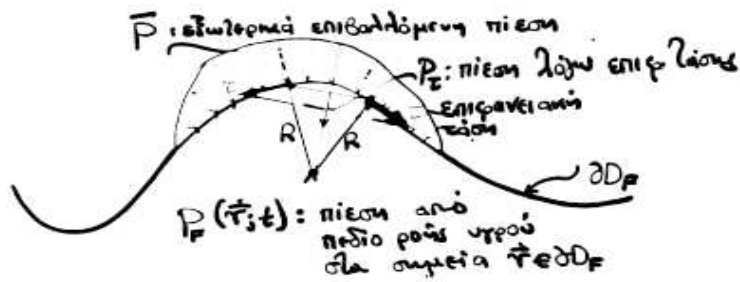
Εάν η επιφανειακή τάση είναι αμελητέα (δηλαδή $2\tau \cong 0$), τότε η συνθήκη (13) απλουστεύεται στην

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) + g\eta + 2\tilde{\tau}\kappa = 0. \quad (13'')$$

Κατά συνέπεια, η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας είναι μια δεύτερη πεπλεγμένη και μη-γραμμική συνθήκη που συνδέει τα άγνωστα πεδία $\Phi(x, y, \eta(x, y; t); t)$ και $\eta(x, y; t)$.



Σχήμα 7.1: Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας



$$P(r; t) + P_s(r; t) = P_f(r; t), \quad r \in \partial D_F(t)$$

Σχήμα 7.2: Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Γενικές παρατηρήσεις

Στην ελεύθερη επιφάνεια, μη-συνεκτικού υγρού, της οποίας την κίνηση δεν γνωρίζουμε κατ' αρχήν, εφαρμόζονται δύο οριακές συνθήκες, μία κινηματική και μία δυναμική. Οι συνθήκες αυτές, στη γενική τους μορφή (7) και (13), αντιστοίχως, είναι πεπλεγμένες και μη-γραμμικές, πράγμα το οποίο καθιστά τα προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας ιδιαίτερα περίπλοκα.

Η απλούστευση των ανωτέρω εξισώσεων είναι απολύτως απαραίτητη, προκειμένου να βρούμε αναλυτικές λύσεις σε ορισμένα προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της διαδικασίας της γραμμικοποίησης των συνθηκών γύρω από μια γνωστή ροή. Το θέμα αυτό αναπτύσσεται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

8. Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αλληλεπίδρασης στερεού σώματος και υγρού με ελεύθερη επιφάνεια (κύματος).

Στο εδάφιο αυτό συνοψίζουμε τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες που διέπουν την κίνηση ενός υδρομηχανικού συστήματος το οποίο αποτελείται από στερεό σώμα και υγρό με ελεύθερη επιφάνεια.

$\eta_{,t} + \Phi_{,x} \eta_{,x} + \Phi_{,y} \eta_{,y} - \Phi_{,z} = 0$
 $\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) + g\eta + \frac{2\tau}{\rho} \kappa = -\frac{\bar{p}}{\rho}$

$\Delta \Phi = 0$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n = (\vec{U}_B + \vec{\Omega}_B \times \vec{r}) \cdot \vec{n}_B$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$

∂D_F : ελεύθερη επιφάνεια
 ∂D_η : πυθμένας
 ∂D_B : στερεό σώμα κινούμενο σε αλληλεπίδραση με το υγρό.

Επιφανειακά υδάτινα κύματα σε υγρό σταθερού βάθους

1. Αλληλεπίδραση κύματος ρεύματος. Διατύπωση του προβλήματος
 - Διατύπωση του γενικού προβλήματος
 - Περιορισμός σε διδιάστατη ροή
 - Γραμμικοποίηση του προβλήματος. I: Απαλοιφή της ρητής μη-γραμμικότητας
 - Γραμμικοποίηση του προβλήματος. II: Απαλοιφή της πεπλεγμένης μη-γραμμικότητας
 - Περαιτέρω επεξεργασία των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας. Απαλοιφή του πεδίου ανύψωσης
 - Περιορισμός στο χρονικά αρμονικό πρόβλημα
2. Λύση του χρονικά αρμονικού γραμμικοποιημένου προβλήματος σε άπειρη λωρίδα υγρού. (Λύσεις φραγμένες για $|x| \rightarrow +\infty$)
 - Διαδικασία χωρισμού μεταβλητών
 - Μελέτη και ερμηνεία της λύσεως $\phi^{\circ}(x, z; \omega)$, Εξ. (10)
3. Σχέση διασποράς
 - Έννοια και παραγωγή της σχέσης διασποράς
 - Διερεύνηση της φασικής ταχύτητας των επιφανειακών κυμάτων
4. Λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος σε ημιάπειρη λωρίδα υγρού. (Λύσεις φραγμένες για $x \rightarrow +\infty$)
 - Σχέση διασποράς
 - Γενική μορφή της λύσης
5. Περαιτέρω μελέτη του πεδίου ροής. (Τροχιές στοιχείων, γραμμές ροής, πίεση και ισοβαρείς επιφάνειες)
 - Τροχιές στοιχείων
 - Γραμμές ροής
 - Πίεση και ισοβαρείς επιφάνειες
6. Πυκνότητα και ροή ενέργειας κύματος
7. Υπέρθηση κυμάτων. Κυματοομάδα. Ταχύτητα ομάδας

Βιβλιογραφία

Ασκήσεις

Στην επιφάνεια της θάλασσας (αλλά και οποιουδήποτε υγρού), αναπτύσσονται και διαδίδονται κύματα, τα οποία παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς κύματα άλλων ειδών (π.χ., ακουστικά) που διαδίδονται δια μέσου της μάζας συνεχών υλικών μέσων. Στο κεφάλαιο αυτό θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις που διέπουν τα κύματα στην ελεύθερη επιφάνεια αστρόβιλου και ασυμπίεστου υγρού (υδάτινα επιφανειακά κύματα), και θα μελετήσουμε διεξοδικά ορισμένες απλές, αλλά πολύ ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Θα καταβληθεί ιδιαίτερη προσπάθεια τα μαθηματικά αποτελέσματα να ερμηνεύονται και να γίνονται κατανοητά και από τη φυσική τους άποψη, ώστε ο (επιμελής) αναγνώστης να αποκτήσει μια ισορροπημένη αίσθηση του μαθηματικού αποτελέσματος και του φυσικού φαινομένου.

Γενικώς, *επιφανειακά κύματα* (surface waves) αναπτύσσονται και διαδίδονται πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μη-αναμιγνυόμενων υγρών διαφορετικής πυκνότητας. Όταν η διαφορά πυκνοτήτων είναι σημαντική (π.χ. νερό-αέρας, όπου $\rho_{NEPO} / \rho_{AEPAΣ} \approx 1000$), τότε το ελαφρύτερο μέσο συνήθως θεωρείται μηδενικής πυκνότητας, και η διαχωριστική επιφάνεια ονομάζεται *ελεύθερη επιφάνεια* (free surface). Όταν οι πυκνότητες είναι συγκρίσιμες, τότε η διαχωριστική επιφάνεια ονομάζεται και *διεπιφάνεια* (interface). Τα κύματα των διεπιφανειών είναι συνήθως μικρότερης συχνότητας από τα αντίστοιχα κύματα ελεύθερης επιφάνειας. Στη θάλασσα, εκτός από την ελεύθερη επιφάνεια, μπορεί να έχουμε και διεπιφάνειες σε διάφορα βάθη, κυρίως λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας και της αλατότητας. Επίσης, και η συνεχής μεταβολή της πυκνότητας συνεπάγεται τη δυνατότητα ανάπτυξης αντιστοίχων κυμάτων, τα οποία ονομάζονται *εσωτερικά κύματα* (internal waves).

Στο θαλάσσιο περιβάλλον, γενικότερα, εξελίσσεται ένα πλήθος κυματικών φαινομένων, αρκετά από τα οποία είναι συζευγμένα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας φαινομενολογικά κριτήρια, μπορούμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες κύριες κατηγορίες κυματικών φαινομένων στη θάλασσα (βλ. σχετικά Phillips 1977, LeBlond και Mysak 1978):

- Επιφανειακά κύματα (surface waves)
- Εσωτερικά κύματα (internal waves)
- Γυροσκοπικά κύματα (inertial or gyroscopic waves)
- Πλανητικά κύματα (planetary or Rossby waves)
- Παλίρροιες (tides)
- Ακουστικά κύματα (acoustic waves), που διαδίδονται στο εσωτερικό της υδάτινης μάζας και είναι συζευγμένα με ακουστικά και ελαστικά κύματα στον πυθμένα, καθώς και με τα κύματα της ελεύθερης επιφάνειας.

Εξετάζοντας αναλυτικότερα τα επιφανειακά θαλάσσια κύματα, διακρίνουμε τις εξής κύριες κατηγορίες, ανάλογα με το αίτιο δημιουργίας τους:

- Ανεμογενή κύματα (κύματα ανέμου, wind waves)
- Σεισμογενή κύματα (σεισμικά κύματα, tsunamis)
- Σωματογενή κύματα, δηλαδή κύματα παραγόμενα από κινήσεις επιπλεόντων ή βυθισμένων αντικειμένων (body-generated waves),

Εξ αυτών τα σωματογενή και ανεμογενή κύματα ενδιαφέρουν περισσότερο σε εφαρμογές Θαλάσσιας Τεχνολογίας στην ανοικτή θάλασσα, ενώ τα σεισμογενή κύματα ενδιαφέρουν ιδιαίτερα σε εφαρμογές ακτομηχανικής, αλλά και για κάθε είδους θαλάσσια κατασκευή με θεμελίωση στον πυθμένα.

Τα σωματογενή κύματα σχετίζονται άμεσα με την ύπαρξη της *αντίστασης κυματισμού* (wave resistance) κατά την πρόωση πλοίου επιφάνειας (ή υποβρυχίου που κινείται κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια), φαινόμενο το οποίο μελετάται στο μάθημα του βου εξαμήνου “Πρόωση Πλοίου”. Τα ανεμογενή κύματα, τα οποία προκαλούν κινήσεις και δυναμική καταπόνηση των πλοίων καθώς και των κάθε είδους θαλασσίων κατασκευών, μελετώνται διεξοδικά στο μάθημα του 8ου εξαμήνου “Υδροδυναμική και Δυναμική Θαλασσίων Συστημάτων”.

Στη συνέχεια των σημειώσεων αυτών θα εξετάσουμε τα επιφανειακά κύματα που διαδίδονται στην ελεύθερη επιφάνεια υγρού, χωρίς να ενδιαφερόμαστε για το αίτιο δημιουργίας τους ⁽¹⁾. Τα κύματα αυτά ονομάζονται επίσης και *ελεύθερα κύματα* (free waves), και αποτελούν την απλούστερη δυνατή περίπτωση επιφανειακών κυμάτων. Παρ’ όλα αυτά, τα κύματα που θα μελετήσουμε στην συνέχεια, θα μας δώσουν τη δυνατότητα να συζητήσουμε, μεταξύ άλλων, δύο θεμελιώδους σημασίας και πολύ μεγάλης χρησιμότητας έννοιες, τη *σχέση διασποράς* και την *ταχύτητα ομάδας*.

1. Αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος. Διατύπωση του προβλήματος

- Διατύπωση του γενικού προβλήματος

Θεωρούμε στρώμα υγρού (π.χ. νερού), το οποίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης \mathbf{g} , και το οποίο περατούται, αφ’ ενός μεν σε οριζόντιο ($\perp \mathbf{g}$) στερεό πυθμένα ∂D_π , αφ’ ετέρου δε σε ελεύθερη επιφάνεια ∂D_F . (Βλ. Σχήμα 1.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι στο στρώμα του υγρού *υφίσταται* (έχει αναπτυχθεί) ροή η οποία συντίθεται από

- i) Μόνιμη παράλληλη ροή με μέση ταχύτητα \mathbf{U}_o (“ΡΕΥΜΑ”), και
- ii) Μη-μόνιμη (κυματική) διαταραχή, σε αλληλεπίδραση με την μόνιμη παράλληλη ροή (“ΚΥΜΑ”) ⁽²⁾.

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά μια τέτοια ροή, με σκοπό να προσδιορίσουμε τα διάφορα χαρακτηριστικά της (πεδίο ανύψωσης, πεδίο ταχυτήτων, πεδίο πιέσεων, τροχιές στοιχείων υγρού, ροή ενέργειας κ.ά.), αλλά και να αντιληφθούμε τη δομή, τη σημασία και τις συνέπειες τέτοιων ροών στη φύση, σε σχέση με διάφορες εφαρμογές.

Για την αναλυτική περιγραφή της ανωτέρω ροής θα χρησιμοποιήσουμε, ως συνήθως, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, με μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, του οποίου το επίπεδο xy συμπίπτει με την αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, ο άξονας x είναι ομόρροπος προς την ταχύτητα του ρεύματος \mathbf{U}_o (άρα $\mathbf{U}_o = U_o \mathbf{i}$), και ο άξονας z είναι αντίρροπος προς την επιτάχυνση της βαρύτητας (άρα $\mathbf{g} = -g \mathbf{k}$). Βλ. και Σχήμα 1.1.

⁽¹⁾ Υποθέτουμε δηλαδή ότι το διεγείρον αίτιο βρίσκεται εκτός της περιοχής του χώρου στην οποία εξετάζεται το κυματικό φαινόμενο.

⁽²⁾ Στο μεγαλύτερο μέρος αυτού του εδαφίου η χρονική εξάρτηση του μη-μόνιμου μέρους της ροής θα θεωρείται γενική. Στο τελευταίο υποεδάφιο θα εξειδικευθεί σε αρμονική εξάρτηση με συχνότητα ω .

Πριν προχωρήσουμε στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος, είναι σκόπιμο να περιγράψουμε όσο το δυνατόν πληρέστερα το φυσικό πρόβλημα το οποίο πρόκειται να μελετήσουμε. Τόσο η παράλληλη ροή, όσο και η κυματική διαταραχή θεωρούνται, στα πλαίσια του προβλήματος που εξετάζουμε, ότι παράγονται από **διεγείροντα αίτια** ευρισκόμενα εκτός του εξεταζόμενου γεωμετρικού πεδίου (κάπου “πολύ μακριά”). Κατά συνέπεια, δεν ενδιαφερόμεθα για την ακριβή μορφή των διεγειρόντων αιτίων και δεν επιθυμούμε να τα περιλάβουμε στη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Ο **απλούστερος τρόπος** για να υλοποιηθεί αυτός ο στόχος, είναι να υποθέσουμε ότι το σύστημα κύμα-ρεύμα εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις οριζόντιες κατευθύνσεις και καταλαμβάνει όλο το διαθέσιμο γεωμετρικό χώρο. Με άλλα λόγια, να υποθέσουμε ότι το γεωμετρικό πεδίο ροής $D = D(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$D = \{ (x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, -h < z < \eta(x, y; t) \}, \quad (1)$$

όπου $z = \eta(x, y; t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και $z = -h$ είναι η εξίσωση του επιπέδου του πυθμένα. (Σχήμα 1.1). Με αυτόν τον τρόπο “απομακρύνουμε” τις διεγειρούσες αιτίες του ρεύματος και του κύματος “στο άπειρο”, δηλαδή κάπου όπου $(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Παρ’ όλα αυτά, τα διεγείροντα αίτια δεν εξαφανίζονται, αλλά η επίδρασή τους στην εξεταζόμενη ροή υλοποιείται ως *ροή μάζας και ενέργειας από και προς το άπειρο*, δηλαδή μέσω ολοκληρωτικών αναλλοιώτων (integral invariants), και όχι μέσω της “λεπτομερικής” κατανομής της πίεσης ή της ταχύτητας σε κάποιο τμήμα του συνόρου του υγρού.

Εκτός από την ανωτέρω (απλούστερη δυνατή) περίπτωση, θα μελετήσουμε στη συνέχεια το ίδιο πρόβλημα (αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος) και σε ημιάπειρη λωρίδα υγρού, δηλαδή στο χωρίο

$$\begin{aligned} D_a &= \{ (x, y, z) : x > a, y \in \mathbb{R}, -h < z < \eta(x, y; t) \} = \\ &= D \cap \{ (x, y, z) : x > a \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή το διεγείρον αίτιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στην περιοχή $D \setminus D_a$, δηλαδή “αριστερά” του επιπέδου $x = a$. Όπως θα δούμε, στην περίπτωση αυτή η μαθηματική αναπαράσταση της ροής είναι πιο πλούσια, πράγμα το οποίο οφείλεται στο ότι το διεγείρον αίτιο επιδρά στην εξεταζόμενη ροή κατά πολύ λεπτομερέστερο τρόπο: όχι μόνο μέσω των ολοκληρωτικών αναλλοιώτων (ροή μάζας και ενέργειας), αλλά και μέσω της κινητικής κατάστασης του υγρού σε όλα τα σημεία του κατακόρυφου επιπέδου

$$\partial D_a^a = \{ (a, y, z) : y \in \mathbb{R}, -h < z < \eta(a, y; t) \}, \quad (3)$$

στο οποίο περατούνται το εξεταζόμενο γεωμετρικό πεδίο.

Οι ανωτέρω παρατηρήσεις, εκτός του ότι μας βοηθούν στην κατανόηση και μαθηματική μοντελοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος που εξετάζουμε (αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος), μας δείχνουν ακόμη ότι, στα κυματικά προβλήματα, το νόημα του “απείρως μακριά” στη μαθηματική μοντελοποίηση είναι σχετικό, και υποβάλλεται από το πρόβλημα που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Και ακόμη, ότι το “άπειρο” μπορεί να καθορίζει, σε σημαντικό βαθμό, το φαινόμενο που εξελίσσεται στο εξεταζόμενο (πεπερασμένο) πεδίο.

Προχωρούμε τώρα στη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος, έχοντας κατά νου τις δύο περιπτώσεις για το γεωμετρικό πεδίο που περιγράψαμε ανωτέρω: είτε στην άπειρη λωρίδα D , είτε στην ημιάπειρη λωρίδα D_a . Υπενθυμίζεται ότι, λόγω της (άγνωστης) ελεύθερης επιφάνειας, τα άγνωστα πεδία είναι δύο: η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta = \eta(x, y; t)$ και το δυναμικό ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z; t)$, του οποίου το πεδίο ορισμού εξαρτάται από την $\eta(x, y; t)$. Το γενικό πρόβλημα τίθεται τώρα ως εξής:

Να προσδιορισθούν τα πεδία

$$\Phi(x, y, z; t) \quad \text{και} \quad \eta(x, y; t), \quad (x, y, z) \in D(t)$$

$$\text{ή} \quad (x, y, z) \in D_a(t),$$

τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\bullet \quad \Delta \Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D(t) \quad (4)$$

$$\text{ή} \quad (x, y, z) \in D_a(t), \quad (4a)$$

$$\bullet \quad \Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2 + \Phi_{,z}^2) + g\eta + \tilde{\tau} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{U_0^2}{2}, \quad z = \eta(x, y; t), \quad (5)$$

$$\bullet \quad \eta_{,t} + \Phi_{,x} \eta_{,x} + \Phi_{,y} \eta_{,y} - \Phi_{,z} = 0, \quad z = \eta(x, y; t), \quad (6)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv \Phi_{,z} = 0, \quad z = -h, \quad (7)$$

• $\Phi_{,x}$, $\Phi_{,y}$, $\Phi_{,z}$ και η παραμένουν φραγμένα

$$\text{όταν } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{και} \quad (x, y, z) \in D(t) \quad (8)$$

$$\text{ή όταν } (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{και} \quad (x, y, z) \in D_a(t). \quad (8a)$$

Η (4) είναι η εξίσωση Laplace, η οποία προκύπτει από το ασυμπίεστο και αστρόβιλο της ροής, η (5) είναι η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας με επιφανειακή τάση (R_1, R_2 είναι οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας της ελεύθερης επιφάνειας), η (6) είναι η κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, η (7) είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης στον πυθμένα, και η (8) είναι μια “ποιοτική” συνθήκη για την επ’ άπειρον συμπεριφορά των πεδίων Φ και η . Η τελευταία πρέπει να θεωρηθεί μάλλον ως ένα “λογικό αίτημα” για τις λύσεις που θα βρούμε, και όχι ως μια αναλυτική συνθήκη που συμμετέχει ουσιαστικά στη σύνθεση (διατύπωση) του προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε. Δηλαδή, θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε κατ’ αρχήν το πρόβλημα (4) - (7), και στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν οι λύσεις που βρίσκουμε ικανοποιούν το “αίτημα” (8) ή (8a). Ακριβέστερα, όπως θα δούμε κατά τη διάρκεια της

⁽³⁾ Με (4a) και (8a) συμβολίζουμε τις σχέσεις (4) και (8), αντιστοίχως, στην περίπτωση όπου το εξεταζόμενο πεδίο ροής περιορίζεται στην ημιάπειρη λωρίδα D_a . Παρόμοια σύμβαση θα χρησιμοποιούμε και στη συνέχεια για την αρίθμηση εναλλακτικών συνθηκών για τις περιπτώσεις άπειρης και ημιάπειρης λωρίδας.

επίλυσης, από το σύνολο των λύσεων οι οποίες ικανοποιούν το πρόβλημα (4) - (7), θα κρατήσουμε μόνο εκείνες που ικανοποιούν την απαίτηση του φραγμένου (8). Πρέπει εδώ να τονισθεί ότι η συνθήκη (8) είναι ουσιωδώς διαφορετική από τη συνθήκη (8a): στην πρώτη περίπτωση η απαίτηση του φραγμένου επιβάλλεται και προς τις δύο επ' άπειρον κατευθύνσεις $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η απαίτηση του φραγμένου περιορίζεται μόνο για $x \rightarrow +\infty$. Η διαφορά αυτή έχει πολύ μεγάλη σημασία, τόσο από φυσική όσο και από αναλυτική άποψη. Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η συμπεριφορά της λύσης (των λύσεων) του ανωτέρω προβλήματος στο άπειρο θα πρέπει να είναι συμβιβαστή, ως προς τις ολοκληρωτικές αναλλοιώτες, με την εκεί "ύπαρξη" των διεγερμένων αιτίων.

Το γεγονός ότι υφίσταται (έχει αναπτυχθεί) παράλληλη ροή $U_0 i$ μπορεί να ληφθεί ρητά υπ' όψιν αν θέσουμε

$$\Phi(x, y, z; t) = U_0 x + \phi(x, y, z; t). \quad (9)$$

Στην ανωτέρω σχέση, το δυναμικό $\phi(x, y, z; t)$ περιγράφει την μη-μόνιμη (κυματική) διαταραχή (αλλά και την αλληλεπίδραση της με την παράλληλη ροή), και ονομάζεται **δυναμικό διαταραχής**. Εισάγοντας την αναπαράσταση (9) στις συνθήκες (4) - (8) βρίσκουμε εύκολα τις αντίστοιχες συνθήκες ως προς το δυναμικό διαταραχής. Προς το παρόν, όμως, θα συνεχίσουμε να εργαζόμαστε με το **συνολικό δυναμικό** $\Phi(x, y, z; t)$.

Για να μπορέσουμε να βρούμε αναλυτική λύση στο ανωτέρω πρόβλημα είναι απαραίτητο να προχωρήσουμε σε μια σειρά από απλουστεύσεις, οι οποίες περιγράφονται διεξοδικά στα επόμενα υποεδάφια.

- Περιορισμός σε διδιάστατη ροή

Κατ' αρχήν, περιοριζόμαστε στο διδιάστατο πρόβλημα (2D - πρόβλημα), θεωρώντας ότι τα πεδία Φ και η είναι ανεξάρτητα της συντεταγμένης y , δηλαδή

$$\Phi_{,y} = 0, \eta_{,y} = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή τα γεωμετρικά χωρία D και D_a μπορούν να θεωρηθούν διδιάστατα, θέτοντας $y = \sigma \tau \alpha \theta = 0$ στις σχέσεις ορισμού τους (1) και (2). Αντίστοιχα, το κατακόρυφο σύνορο ∂D_t^a , περιορίζεται τώρα σε μια ημιευθεία, θέτοντας και πάλι $y = 0$ στη σχέση (3). Παρά ταύτα, για λόγους οικονομίας του συμβολισμού, θα κρατήσουμε τα ίδια σύμβολα και για τους διδιάστατους περιορισμούς των τριδιάστατων χωρίων (1), (2), (3). Υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις, το πρόβλημα (4) - (7) απλοποιείται ως εξής:

$$\bullet \quad \Phi_{,xx} + \Phi_{,zz} = 0, \quad (x, z) \in D(t) \quad (4')$$

$$\quad \quad \quad \text{ή} \quad (x, z) \in D_a(t), \quad (4'a)$$

$$\bullet \quad \Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,z}^2) + g\eta + \tilde{\tau} \frac{1}{R} = \frac{U_0^2}{2}, \quad z = \eta(x; t), \quad (5')$$

$$\bullet \quad \eta_{,t} + \Phi_{,x} \eta_{,x} - \Phi_{,z} = 0, z = \eta(x; t), \quad (6')$$

$$\bullet \quad \Phi_{,z} = 0, z = -h, \quad (7')$$

όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τομής της ελεύθερης επιφάνειας με το κατακόρυφο επίπεδο xz . Στην περίπτωση αυτή η ακτίνα καμπυλότητας εκφράζεται μέσω της ανύψωσης $\eta(x; t)$ από τη σχέση

$$\frac{1}{R} = -\frac{\eta_{,xx}}{(1 + \eta_{,x}^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Παρά την απλούστευση που προκύπτει από τον περιορισμό μας στο 2D-πρόβλημα το σύστημα των διαφορικών συνθηκών (4') - (7') παραμένει **μη-γραμμικό**, αφ' ενός κατά *ρητό* τρόπο (π.χ. περιέχει τους όρους $\Phi_{,x}^2, \Phi_{,x} \eta_{,x}$ κ.λπ.), και αφ' ετέρου κατά *πεπλεγμένο* τρόπο (λόγω του ότι στις (5') και (6') έχουμε $\Phi = \Phi(x, \eta(x; t); t)$). Προχωρούμε λοιπόν στην επόμενη και ουσιαστικότερη απλούστευση, που είναι η γραμμικοποίηση του προβλήματος.

- Γραμμικοποίηση του προβλήματος. I: Απαλοιφή της ρητής μη-γραμμικότητας

Η βασική ιδέα της *γραμμικοποίησης* ενός μαθηματικού μοντέλου (όπως π.χ. αυτού που ορίζεται από τις σχέσεις (4) - (7) ή (4') - (7')), είναι ότι τα άγνωστα πεδία (εδώ τα πεδία της ανύψωσης η και του δυναμικού διαταραχής ϕ) είναι “μικρά”, με κάποια συγκεκριμένη φυσική και αναλυτική έννοια. Συνέπεια της μικρότητας αυτής είναι να μπορούμε να θεωρήσουμε, σε πρώτη προσέγγιση, τους μη-γραμμικούς όρους αμελητέους, σε σύγκριση με τους γραμμικούς όρους. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη γραμμικοποίηση του μαθηματικού μοντέλου (4') - (7'), κατά τον αμεσότερο δυνατό τρόπο, αφήνοντας για αργότερα τη φορμαλιστική ανάπτυξη που γίνεται συνήθως. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ευθύς εξ αρχής ότι η γραμμικοποίηση που θα παρουσιάσουμε είναι *μία από τις δυνατές γραμμικοποιήσεις του προβλήματος που εξετάζουμε*, αυτή που αντιστοιχεί στη **θεωρία των κυματισμών απειροστού πλάτους** (infinitesimal wave theory) ή θεωρία του Airy. Διαφορετικές γραμμικοποιήσεις, δηλαδή διαφορετικές υποθέσεις “μικρότητας” χαρακτηριστικών ποσοτήτων του πεδίου ροής, είναι δυνατές, και οδηγούν σε διαφορετικά γραμμικά μοντέλα, κατάλληλα για άλλες εφαρμογές.

Η θεμελιώδης υπόθεση “μικρότητας”, στα πλαίσια της θεωρίας των κυματισμών απειροστού πλάτους είναι ότι η κλίση $\eta_{,x}$ της άγνωστης ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρή. Ο ουσιαστικός ποσοτικός χαρακτηρισμός αυτής της “μικρότητας” είναι ότι η ποσότητα $\eta_{,x}^2$ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ως προς την ποσότητα $\eta_{,x}$ ⁽⁴⁾. Τότε βέβαια και η ποσότητα $\eta_{,x}$ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ως προς τη μονάδα. Γενικότερα, οι διαφορετικές δυνάμεις του $\eta_{,x}$ κατατάσσονται σε διαφορετικές **τάξεις μεγέθους** ως εξής:

$$1 \equiv \eta_{,x}^0 \quad : \quad \text{μηδενική τάξη,}$$

⁽⁴⁾ Πρέπει να σημειωθεί ότι η ποσότητα $\eta_{,x}$ είναι **αδιάστατη**. Άρα η υπόθεση μικρότητας της ποσότητας αυτής είναι αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς ομοιότητας του πεδίου ροής.

$$\eta_{,x} \equiv \eta_{,x}^1 \quad : \quad \text{πρώτη τάξη,}$$

$$\eta_{,x}^2 \quad : \quad \text{δεύτερη τάξη, κ.ο.κ.}$$

Ο όρος ν-ιοστής τάξεως είναι αμελητέος ως προς τον όρο (ν-1) (ή μικρότερης) τάξεως.

Προφανώς, η αναλυτική υπόθεση “ $\eta_{,x}$ μικρή” ισοδυναμεί προς την γεωμετρική υπόθεση “ θ μικρή”, όπου θ είναι η (μέγιστη) κλίση της επιφάνειας $z = \eta(x; t)$. Βλ. Σχήμα 1.2.

Ας δούμε τώρα τι μπορούμε να πούμε για το δυναμικό ταχύτητας. Το συνολικό δυναμικό Φ συντίθεται από μια παράλληλη ροή με δυναμικό $U_o x$, και από μια κυματική διαταραχή με δυναμικό $\phi(x, y, z; t)$ (βλ. σχέση (9), ανωτέρω). Εν προκειμένω θεωρούμε ότι η ταχύτητα U_o είναι μηδενικής τάξεως μεγέθους (τάξεως μεγέθους μονάδος), και ότι οι παράγωγοι $\phi_{,x}$ και $\phi_{,z}$ του δυναμικού διαταραχής (οι ταχύτητες διαταραχής) είναι μικρές με την έννοια ότι οι ποσότητες $\phi_{,x}^2$ και $\phi_{,z}^2$ είναι αμελητέες ως προς τις ποσότητες $\phi_{,x}$ και $\phi_{,z}$, αντίστοιχα ⁽⁵⁾. Υποθέτοντας, περαιτέρω, ότι οι ποσότητες $\eta_{,x}$, $\phi_{,x}$, $\phi_{,z}$ είναι της ίδιας τάξεως μεγέθους, προκύπτει η ακόλουθη από κοινού ιεράρχηση σε τάξεις μεγέθους διαφόρων μονωνύμων των πεδιακών μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα:

$$1 = \eta_{,x}^o, \phi_{,x}^o, \phi_{,z}^o \quad : \quad \text{μηδενική τάξη,}$$

$$\eta_{,x}, \eta_{,xx}, \phi_{,x}, \phi_{,z} \quad : \quad \text{πρώτη τάξη,}$$

$$\eta_{,x}^2, \phi_{,x}^2, \phi_{,z}^2, \eta_{,x} \phi_{,x}, \phi_{,x} \phi_{,z}, \phi_{,z} \eta_{,x} \quad : \quad \text{δεύτερη τάξη,}$$

$$\eta_{,x}^3, \dots, \eta_{,x}^2 \phi_{,x}, \eta_{,x} \phi_{,x} \phi_{,z}, \dots \quad : \quad \text{τρίτη τάξη, κ.ο.κ.}$$

Στην ιεράρχηση αυτή κάθε όρος ν-ιοστής τάξεως είναι αμελητέος ως προς οποιονδήποτε όρο (ν-1) τάξεως ή μικρότερης.

Λαβαίνοντας υπ’ όψιν μας την ιεράρχηση των τάξεων μεγέθους και τις σχέσεις (9) και (10), βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2} \Phi_{,x}^2 = \frac{1}{2} U_o^2 + U_o \phi_{,x} + (\dots), \quad (11.1)$$

$$\frac{1}{2} \Phi_{,z}^2 = (\dots), \quad (11.2)$$

⁽⁵⁾ Σε αντίθεση με την $\eta_{,x}$, οι ποσότητες $\phi_{,x}$, $\phi_{,z}$ δεν είναι αδιάστατες, άρα η υπόθεση μικρότητας αυτών δεν είναι αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς ομοιότητας του πεδίου ροής. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια αδυναμία της μεθοδολογίας γραμμικοποίησης που ακολουθούμε εδώ, η οποία θα αντιμετωπισθεί στα πλαίσια μιας πληρέστερης, αλλά και περισσότερο περίπλοκης, θεώρησης της γραμμικοποίησης, σε επόμενο κεφάλαιο.

$$\Phi_{,x} \eta_{,x} = U_o \eta_{,x} + (\dots), \quad (11.3)$$

$$\frac{1}{R} = -\eta_{,xx} + (\dots), \quad (11.4)$$

όπου το σύμβολο (...) υποδηλώνει όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης. Ας σημειωθεί ότι ο όρος $\frac{1}{2}U_o^2$ είναι, όπως και η ταχύτητα U_o , μηδενικής τάξης, ενώ οι όροι $U_o \phi_{,x}$ και $U_o \eta_{,x}$ είναι πρώτης τάξης.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (11) και αμελώντας τους δευτεροτάξιους όρους, το πρόβλημα (4') - (7') μετασχηματίζεται στο εξής:

$$\phi_{,xx} + \phi_{,zz} = 0, \quad (x, z) \in D(t) \quad (4'')$$

$$\text{ή} \quad (x, z) \in D_a(t), \quad (4''a)$$

$$\phi_{,t} + U_o \phi_{,x} + g\eta - \tilde{\tau}\eta_{,xx} = 0, \quad z = \eta(x; t), \quad (5'')$$

$$\eta_{,t} + U_o \eta_{,x} - \phi_{,z} = 0, \quad z = \eta(x; t), \quad (6'')$$

$$\phi_{,z} = 0, \quad z = -h \quad (7'')$$

Το ανωτέρω πρόβλημα φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, γραμμικό ως προς ϕ και η . Εν τούτοις η γραμμικοποίηση δεν είναι πλήρης διότι, στις συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (5'') και (6''), το δυναμικό $\phi(x, z; t)$ εξαρτάται κατά γενικό (μη-γραμμικό) τρόπο από το πεδίο ανύψωσης: $\phi = \phi(x, \eta(x; t); t)$. Για την πλήρη γραμμικοποίηση του προβλήματος απαιτείται λοιπόν και η απαλοιφή της πεπλεγμένης μη-γραμμικής εξάρτησης του ϕ από το η .

- Γραμμικοποίηση του προβλήματος. II: Απαλοιφή της πεπλεγμένης μη-γραμμικότητας

Ο τελευταίος κύκλος απλουστευτικών υποθέσεων έχει ως εξής: Θεωρούμε, επιπροσθέτως των προηγούμενων, ότι και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας $\eta(x; t)$ είναι μικρή, δηλαδή ότι η ελεύθερη επιφάνεια εκτελεί ταλαντωτική κίνηση μικρής ταχύτητας, μικρής κλίσης και μικρού πλάτους, περί την αδιατάρακτη θέση της $z=0$. Τέλος, θεωρούμε ότι το δυναμικό διαταραχής επεκτείνεται αναλυτικά και εκτός του (στιγμιαίου) πεδίου ροής, έτσι ώστε το $\phi(x, 0; t)$ να ορίζεται για κάθε θέση x και κάθε χρονική στιγμή t , ακόμη και όταν το σημείο $(x, 0)$ βρίσκεται εκτός του πεδίου ροής. (Βλ. Σχήμα 1.3). Με αυτές τις υποθέσεις μπορούμε να αναπτύξουμε το $\phi(x, \eta(x; t); t)$ και τις παραγώγους του $\phi_{,t}$, $\phi_{,x}$, $\phi_{,z}$ κ.λπ. κατά Taylor γύρω από τη θέση $(x, 0)$, οπότε παίρνουμε

$$\phi(x, \eta; t) = \phi(x, 0; t) + \eta \phi_{,x}(x, 0; t) + \dots, \quad (12.1)$$

$$\phi_{,x}(x, \eta; t) = \phi_{,x}(x, 0; t) + \eta \phi_{,xx}(x, 0; t) + \dots, \quad (12.2)$$

$$\phi_{,t}(x, \eta; t) = \phi_{,t}(x, 0; t) + \eta_{,t} \phi_{,x}(x, 0; t) + \eta \phi_{,xt}(x, 0; t) + \dots, \quad (12.3)$$

και αντίστοιχες σχέσεις για το $\phi_z(x, \eta; t)$, καθώς και τις δεύτερες παραγώγους $\phi_{,xx}$ και $\phi_{,zz}$ στην περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας. Σύμφωνα με τη μέχρι τώρα τακτική μας, θεωρούμε τα γινόμενα $\eta\phi_x, \eta\phi_{,xx}, \eta_t\phi_x, \eta\phi_{,xt}$, κ.λπ., δεύτερης τάξης, οπότε οι (9) μας δίνουν

$$\phi(x, \eta; t) = \phi(x, 0; t) + (\dots), \quad (13.1)$$

$$\phi_{,x}(x, \eta; t) = \phi_{,x}(x, 0; t) + (\dots), \quad (13.2)$$

$$\phi_{,t}(x, \eta; t) = \phi_{,t}(x, 0; t) + (\dots), \quad (13.3)$$

όπου η έκφραση (\dots) συμβολίζει όρους δευτέρας και ανωτέρας τάξεως. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13) και αμελώντας τους όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα (4'') - (7'') στο ακόλουθο, **πλήρως γραμμικοποιημένο**, πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \phi_{,xx} + \phi_{,zz} = 0, & \quad -\infty < x < +\infty, \quad -h < z < 0 & (4''') \\ & \text{ή} \quad a < x < +\infty, \quad -h < z < 0, & (4'''\text{a}) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi + g\eta - \tilde{\tau}\eta_{,xx} = 0, \quad z = 0, \quad (5''')$$

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta - \phi_{,z} = 0, \quad z = 0, \quad (6''')$$

$$\bullet \quad \phi_{,z} = 0, \quad z = -h. \quad (7''')$$

Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι στο πρόβλημα (4''') - (7''') το δυναμικό διαταραχής θεωρείται ορισμένο σε γνωστό πεδίο : είτε στην άπειρη λωρίδα

$$A = \{ (x, z) : -\infty < x < +\infty, -h < z < 0 \},$$

είτε στην ημιάπειρη λωρίδα

$$A_a = \{ (x, z) : a < x < +\infty, -h < z < 0 \}.$$

Παρ' όλα αυτά, οι κυματισμοί στην ελεύθερη επιφάνεια δεν αγνοούνται, εφ' όσον το πεδίο της ανύψωσης $\eta = \eta(x; t)$ υπεισέρχεται στις συνθήκες (5''') και (6''').

Το πρόβλημα (4''') - (7''') δέχεται προφανώς τη μηδενική (τετριμμένη) λύση $\phi = 0, \eta = 0$, η οποία αντιστοιχεί στην αδιατάρακτη παράλληλη ροή $\Phi = U_o x$. Προφανώς, ενδιαφερόμεθα για άλλες λύσεις, πλὴν της τετριμμένης, οι οποίες θα παριστούν ροές αλληλεπίδρασης ρεύματος και κυματισμών ελεύθερης επιφάνειας.

- Περαιτέρω επεξεργασία των οριακών συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας. Απαλοιφή του πεδίου ανύψωσης

Χρησιμοποιώντας τις δύο οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (5''') και (6''') μπορούμε να απαλείψουμε το πεδίο της ανύψωσης $\eta(x; t)$ και να παράγουμε μια οριακή συνθήκη ως προς το δυναμικό διαταραχής $\phi(x, z; t)$. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: εφαρμόζουμε τον τελεστή $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right)$ στην (5'''), οπότε βρίσκουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi + g \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta - \tilde{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta_{,xx} = 0, \quad (14)$$

και παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς x τη σχέση (6'''), οπότε παίρνουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta_{,xx} - \phi_{,zxx} = 0. \quad (15)$$

Εισάγοντας τώρα τις σχέσεις (6''') και (15) στην (14), απαλείφουμε πλήρως το πεδίο ανύψωσης $\eta(x; t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi + g \phi_{,z} - \tilde{\tau} \phi_{,zxx} = 0. \quad (16)$$

Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Laplace (4''') βρίσκουμε

$$\phi_{,zxx} = -\phi_{,zzz},$$

οπότε η (16) γράφεται και στη μορφή

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi + g \phi_{,z} + \tilde{\tau} \phi_{,zzz} = 0. \quad (16')$$

Η (16') (ή (16)) είναι η ζητούμενη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας ως προς το δυναμικό ϕ . Η συνθήκη αυτή, σε συνδιασμό με την εξίσωση Laplace και τη συνθήκη πυθμένα οδηγεί στη διατύπωση του ακολούθου προβλήματος συνοριακών τιμών:

Να προσδιορισθεί το πεδίο $\phi = \phi(x, z; t)$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\bullet \quad \Delta \phi = 0, \quad (x, z) \in A \quad (17)$$

$$\quad \quad \quad \text{ή} \quad (x, z) \in A_a, \quad (17a)$$

$$\bullet \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi + g \phi_{,z} + \tilde{\tau} \phi_{,zzz} = 0, \quad z = 0, \quad (18)$$

- $\phi_{,z} = 0, z = -h,$ (19)

- $\phi_{,x}, \phi_{,z}$ παραμένουν φραγμένες όταν $(x \rightarrow \infty,$ (20)

- ή όταν $x \rightarrow \infty.$ (20a)

Οι σχέσεις (20) και (20a) είναι οι μορφές των επ' άπειρον συνθηκών (8) και (8a) ως προς το δυναμικό διαταραχής ϕ . Οι εξισώσεις (17), (18), (19), (20), θεωρούμενες από κοινού, θα αναφέρονται στη συνέχεια ως **Πρόβλημα** $P(t, U_o, \tilde{\tau})$, ενώ οι εξισώσεις (17a), (18), (19), (20a), θα αναφέρονται ως **Πρόβλημα** $P_a(t, U_o, \tilde{\tau})$. Όταν επιλυθεί το πρόβλημα $P(t, U_o, \tilde{\tau})$ ή $P_a(t, U_o, \tilde{\tau})$, το πεδίο της ανύψωσης $\eta = \eta(x; t)$ μπορεί να προσδιορισθεί από τη συνθήκη (5'''), η οποία καθίσταται τότε μια συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς $\eta(x; t)$:

$$\tilde{\eta}_{,xx}(x; t) - g\eta(x; t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x, 0; t). \quad (21)$$

Δεδομένου ότι το άγνωστο πεδίο $\eta(x; t)$ δεν παραγωγίζεται ως προς χρόνο, στην ανωτέρω διαφορική εξίσωση ο χρόνος t υπεισέρχεται ως παράμετρος. (Εφ' όσον έχει προσδιορισθεί το δυναμικό $\phi(x, z; t)$, το δεξιά μέλος της (21) είναι μια γνωστή συνάρτηση $f(x; t)$).

Μέχρι τώρα δεν έχουμε κάμει καμιά υπόθεση σχετικά με το **είδος της χρονικής εξάρτησης** του δυναμικού διαταραχής $\phi = \phi(x, z; t)$ και της ανύψωσης $\eta = \eta(x; t)$. Δεδομένου όμως ότι ενδιαφερόμεθα για την περίπτωση όπου το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος της ροής αναπαριστά **κυματική διαταραχή**, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι τα πεδία $\phi = \phi(x, z; t)$ και $\eta = \eta(x; t)$ είναι περιοδικά ως προς το χρόνο. Η απλούστερη και, από πολλές απόψεις, πιο ενδιαφέρουσα, περίπτωση περιοδικής χρονικής εξάρτησης είναι η αρμονική χρονική εξάρτηση, με κυκλική συχνότητα ω . Στο επόμενο υποεδάφιο θα επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα $P(t, U_o, \tilde{\tau})$ για την περίπτωση αυτή.

- Περιορισμός στο χρονικά αρμονικό πρόβλημα

Ο χειρισμός του προβλήματος στο πεδίο συχνοτήτων διευκολύνεται σημαντικά με τη χρήση παραστατικών μιγάδων. Πράγματι, ας θέσουμε

$$\phi(x, z; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega) e^{j\omega t} \right\}, \quad (22.1)$$

και

$$\eta(x; t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(x; \omega) e^{j\omega t} \right\}, \quad (22.2)$$

όπου $\overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega)$ και $\overset{\circ}{\eta}(x; \omega)$ είναι μιγαδικοί αριθμοί ανεξάρτητοι του χρόνου t , οι παραστατικοί μιγάδες των $\phi(x, z; t)$ και $\eta(x; t)$, αντιστοίχως ⁽⁶⁾. Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \phi(x, z; t) = \text{Re} \left\{ \left(j\omega + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega) e^{j\omega t} \right\}, \quad (23)$$

καθώς και αντίστοιχη σχέση για το πεδίο ανύψωσης $\eta = \eta(x, z; t)$. Με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών, το πρόβλημα $P(t, U_o, \tilde{\tau})$ (ή $P_a(t, U_o, \tilde{\tau})$) μετασχηματίζεται ως εξής:

Να προσδιορισθεί το πεδίο $\overset{\circ}{\phi} = \overset{\circ}{\phi}(x, z; t)$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\bullet \quad \Delta \left(\overset{\circ}{\phi} \right) = 0, \quad (x, z) \in A, \quad (24)$$

$$\text{ή} \quad (x, z) \in A_a, \quad (24a)$$

$$\bullet \quad \left(j\omega + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \overset{\circ}{\phi} + g \overset{\circ}{\phi}_{,z} + \tilde{\tau} \overset{\circ}{\phi}_{,zzz} = 0, \quad z = 0, \quad (25)$$

$$\bullet \quad \overset{\circ}{\phi}_{,z} = 0, \quad z = -h, \quad (26)$$

$$\bullet \quad \overset{\circ}{\phi}_{,x}, \overset{\circ}{\phi}_{,z} \text{ παραμένουν φραγμένες όταν } |x| \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$\text{ή όταν } x \rightarrow \infty. \quad (27a)$$

Οι εξισώσεις (24), (25), (26), (27), θεωρούμενες από κοινού, θα αναφέρονται ως **Πρόβλημα** $P(\omega, U_o, \tilde{\tau})$. Αντιστοίχως, οι εξισώσεις (24a), (25), (26), (27a), θεωρούμενες από κοινού, θα

⁽⁶⁾ Οι ποσότητες $\overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega)$ και $\overset{\circ}{\eta}(x; \omega)$ είναι βαθμωτά πεδία που παίρνουν μιγαδικές τιμές. Ονομάζονται ακόμη και μιγαδικά πλάτη των $\phi(x, z; \omega)$ και $\eta(x; \omega)$, αντιστοίχως.

αναφέρονται ως **Πρόβλημα** $P_a(\omega, U_o, \tilde{\tau})$. Όταν επιλυθεί το πρόβλημα αυτό, τότε το μιγαδικό πλάτος $\eta(x; \omega)$ της ελεύθερης επιφάνειας προσδιορίζεται από την εξίσωση

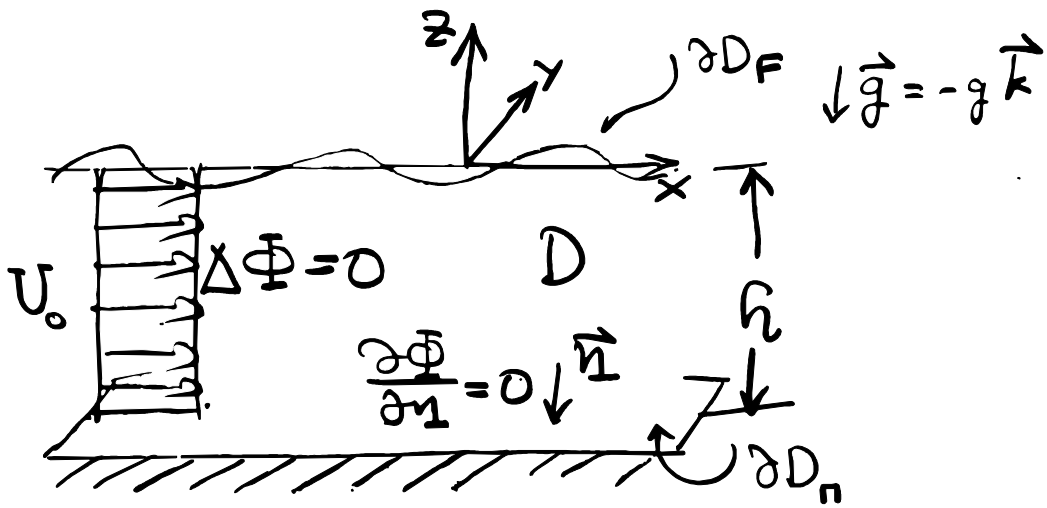
$$\tilde{\eta}_{,xx}(x; \omega) - g \dot{\eta}(x; \omega) = \left(j\omega + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{\phi}(x, 0; \omega), \quad (28)$$

η οποία προκύπτει από την (21), δηλαδή τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, γραμμένη στο πεδίο συχνοτήτων (δηλαδή με εισαγωγή των μιγαδικών πλατών μέσω των σχέσεων (22)). Τέλος, όταν προσδιορισθούν τα πεδία $\dot{\phi}(x, z; \omega)$ και $\dot{\eta}(x; \omega)$, τα πεδία $\phi(x, z; t)$ και $\eta(x; t)$, στο πεδίο του χρόνου t , προκύπτουν άμεσα από τις σχέσεις (22).

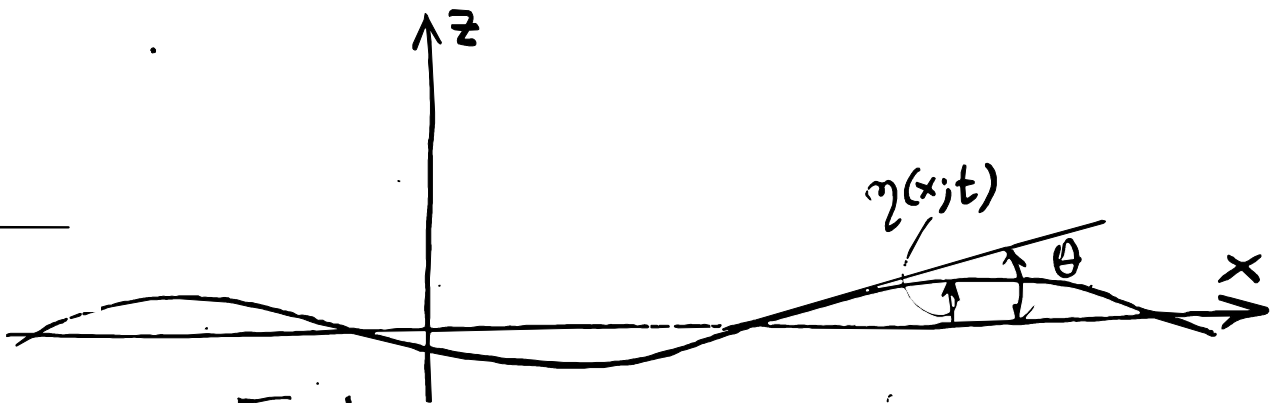
Το πρόβλημα $P(\omega, U_o, \tilde{\tau})$ (ή $P_a(\omega, U_o, \tilde{\tau})$) παρουσιάζει μια σειρά από σημαντικές ιδιομορφίες, σε σύγκριση με τα κλασσικά προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace. Οι κυριώτερες από αυτές είναι:

- Η συνοριακή συνθήκη στο άνω όριο ($z = 0$) περιέχει, εκτός του δυναμικού ϕ και της κάθετου παραγώγου του $\phi_{,z}$, και την πρώτη και δεύτερη εφαπτομενική παράγωγο $\phi_{,x}$ και $\phi_{,xx}$, καθώς επίσης και την τρίτη κάθετη παράγωγο $\phi_{,zzz}$ του δυναμικού. Υπενθυμίζεται ότι οι οριακές συνθήκες των συνήθων προβλημάτων οριακών τιμών της εξίσωσης Laplace περιέχουν μόνο τις τιμές του δυναμικού και της πρώτης κάθετης παραγώγου του.
- Η οριακή συνθήκη (16) (ή (16')) δεν είναι χωριζόμενου τύπου, δηλαδή δεν επιδέχεται χωρισμό μεταβλητών. (Όμως η γεωμετρία του χωρίου και η εξίσωση Laplace επιτρέπουν χωρισμό μεταβλητών).

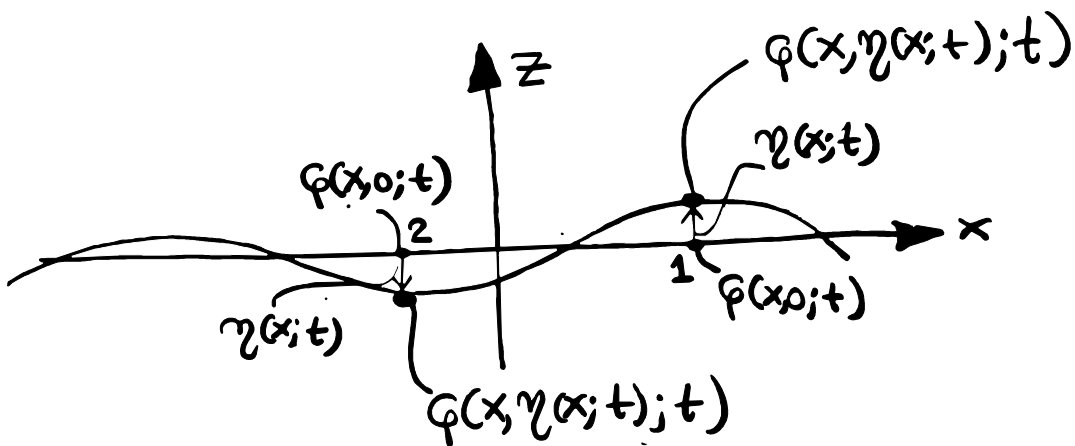
Οι ανωτέρω δυσκολίες αντιμετωπίζονται αν αναζητήσουμε λύσεις του *μερικού προβλήματος* (24), (26) (ή (24a), (26a)) με χωρισμό μεταβλητών, και στη συνέχεια επιλέξουμε εκείνες από τις λύσεις του μερικού προβλήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας (25) και την απαίτηση φραγμένου (27) ή (27a). Αυτή ακριβώς θα είναι η στρατηγική της επίλυσης που θα ακολουθήσουμε στα επόμενα εδάφια.



Σχήμα 1.1



Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.3

2. Λύση του χρονικά αρμονικού γραμμικοποιημένου προβλήματος σε άπειρη λωρίδα υγρού (Λύσεις φραγμένες για $x \rightarrow +\infty$)

Για την επίλυση του χρονικά αρμονικού, γραμμικοποιημένου προβλήματος $\Phi(\omega, U_o, \tilde{\tau})$, το οποίο απαρτίζεται από τις εξισώσεις (24), (25), (26) και (27) του προηγούμενου εδαφίου στην περίπτωση κατά την οποία το ζητούμενο δυναμικό διαταραχής $\phi(x, z, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}$ έχει πεδίο ορισμού την άπειρη λωρίδα $A = \{(x, z) : -\infty < x < \infty, -h < z < 0\}$, και από τις εξισώσεις (24a), (25), (26) και (27a), αντίστοιχα, στην περίπτωση κατά την οποία το ζητούμενο δυναμικό διαταραχής $\phi(x, z, t)$ έχει πεδίο ορισμού την ημιάπειρη λωρίδα $A_a = \{(x; z) : a < x < \infty, -h < z < 0\}$, θα ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία:

1. Κάνοντας χρήση της μεθόδου του χωρισμού μεταβλητών θα αναζητήσουμε λύσεις του μερικού προβλήματος, το οποίο απαρτίζεται από τις εξισώσεις (24), (26), ή (24a), (26) του Εδάφιο 1 αντιστοίχως. Η πρώτη περίπτωση θα εξετασθεί στο παρόν εδάφιο, ενώ η δεύτερη περίπτωση (ημιάπειρη λωρίδα) θα εξετασθεί στο Εδάφιο 4.
2. Από τις δυνατές λύσεις του μερικού προβλήματος θα επιλέξουμε τις λύσεις εκείνες οι οποίες, επιπλέον, ικανοποιούν τη γραμμικοποιημένη οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, (25), Εδάφιο 1, καθώς και την απαίτηση φραγμένου, (27) ή (27a), Εδάφιο 1, ανάλογα με το εάν εξετάζουμε το πρόβλημα στην άπειρη λωρίδα A ή στην ημιάπειρη λωρίδα A_a .
3. Μετά την εύρεση της λύσεως $\overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega)$ του προβλήματος, με χρήση της σχέσεως (28), Εδάφιο 1, θα προσδιορισθεί το μιγαδικό πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $\overset{\circ}{\eta}(x; \omega)$, και στη συνέχεια η συνάρτηση ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας στο πεδίο του χρόνου $\eta(x, t) = \text{Re} \left\{ \overset{\circ}{\eta}(x; \omega) e^{j\omega t} \right\}$.

- Διαδικασία χωρισμού μεταβλητών

Θεωρούμε το μερικό πρόβλημα:

$$\overset{\circ}{\phi}_{,xx} + \overset{\circ}{\phi}_{,zz} = 0, \quad (x, z) \in A, \quad (1)$$

$$\overset{\circ}{\phi}_{,z} \equiv \frac{\partial \overset{\circ}{\phi}}{\partial z} = 0, \quad \text{στον πυθμένα } z = -h. \quad (2)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\overset{\circ}{\phi}(x, z; \omega) = X(x, \omega) \cdot Z(z; \omega). \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace (1) παίρνουμε:

$$X(x) \cdot Z(z) \cdot \left\{ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right\} = 0,$$

από την οποία συνάγουμε ότι

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \mu(\omega) = \begin{cases} -k^2(\omega) < 0 \\ k^2(\omega) > 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Στην εξίσωση (4) η ποσότητα $\mu(\omega)$ δηλώνει τη σταθερά χωρισμού μεταβλητών, η οποία εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα ω , και για την οποία υποθέτουμε ότι είναι πραγματικός αριθμός. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $\mu = -k^2 < 0$ και $\mu = k^2 > 0$.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η περίπτωση $\mu = 0$, δηλαδή, οι συναρτήσεις $X(x)$ και $Z(z)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις των αντιστοίχων μεταβλητών, δεν έχει ενδιαφέρον για το εξεταζόμενο φαινόμενο.

- Περίπτωση $\mu(\omega) \equiv -k^2(\omega) = -k^2 < 0$

Οι εξισώσεις (4) είναι συνήθεις δευτεροτάξιες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, των οποίων οι γενικές λύσεις είναι γνωστές. Η εξίσωση ως προς $X(x)$ γράφεται στη μορφή $X''(x) + k^2 X(x) = 0$ και έχει τη γενική λύση,

$$X(x) = A^+ e^{jkx} + A^- e^{-jkx}, \quad (5)$$

ενώ η εξίσωση ως προς $Z(z)$ γράφεται στη μορφή $Z''(z) - k^2 Z(z) = 0$ και έχει τη γενική λύση,

$$Z(z) = C^+ e^{kz} + C^- e^{-kz}, \quad (6)$$

όπου A^\pm και C^\pm είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα, εξ. (2), παίρνουμε $\phi_{,z}(x, -h; \omega) \equiv X(x)Z'(-h) = 0$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$Z'(-h) = 0 \Rightarrow kC^+ e^{k(-h)} - kC^- e^{-k(-h)} = 0. \quad (7)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να απαλείψουμε τη μια από τις δύο σταθερές C^\pm ,

$$C^- = C^+ e^{-2kh}.$$

Εισάγοντας τη σχέση αυτή στην εξίσωση (6) βρίσκουμε, μετά τις απαιτούμενες πράξεις

$$Z(z) = \frac{2C^+}{e^{kh}} \cosh[k(z+h)] = C \cosh[k(z+h)], \quad (8)$$

όπου $C = 2C^+/e^{kh}$ είναι μια νέα σταθερά.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (5), (8) με την εξίσωση (3) παίρνουμε

$$\overset{o}{\phi}(x, z; \omega) = C(A^+ e^{jkx} + A^- e^{-jkx}) \cosh[k(z+h)].$$

Στην τελευταία εξίσωση τα A^+, A^- και C είναι σταθερές πλάτους, που δεν έχουν προσδιορισθεί ακόμη. Είναι λοιπόν προφανές ότι η σταθερά C μπορεί να απορροφηθεί στις σταθερές A^+ και A^- . Καταλήγουμε έτσι στη σχέση

$$\overset{o}{\phi}(x, z; \omega) = (A^+ e^{jkx} + A^- e^{-jkx}) \cosh[k(z+h)]. \quad (9)$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση οι ακόλουθες δύο συναρτήσεις

$$\overset{o\pm}{\phi}(x, z; \omega) = A^\pm e^{\pm jkx} \cosh[k(z+h)] \quad (10)$$

αποτελούν μερικές λύσεις του προβλήματος (1), (2). Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις (10) έχουν τη μορφή περιοδικών συναρτήσεων ως προς την οριζόντια μεταβλητή, και εκθετικά αποσβενόμενων συναρτήσεων ως προς την κατακόρυφη μεταβλητή.

- Περίπτωση $\mu(\omega) = k(\omega)^2 > 0$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι στην περίπτωση αυτή οι ρόλοι των συναρτήσεων $X(x)$ και $Z(z)$ αντιστρέφονται (σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση) και ότι οι λύσεις που προκύπτουν είναι της μορφής

$$X(x) = B^\pm e^{\pm kx}, Z(z) = D^\pm e^{\pm jkz}. \quad (11)$$

Διαπιστώνουμε τώρα πως η πρώτη επιλογή $\mu = k^2 < 0$ οδηγεί σε λύσεις περιοδικές ως προς την οριζόντια μεταβλητή (x) που αποσβένονται με το βάθος (z). Η κατάσταση αυτή αντιστρέφεται στην περίπτωση της δεύτερης επιλογής $\mu = -k^2 < 0$. Ενδιαφερόμενοι για την μελέτη ενός κυματικού φαινομένου (αλληλεπίδραση κύματος - ρεύματος) που εξελίσσεται κυρίως κατά την οριζόντια διάσταση, θα περιοριστούμε στην περαιτέρω εξέταση της πρώτης μόνο επιλογής, $\mu = k^2 < 0$.

- Μελέτη και ερμηνεία της λύσεως $\overset{o}{\phi}(x, z; \omega)$, Εξ. (10)

Μετασχηματίζοντας τις συναρτήσεις $\overset{o}{\phi}(x, z; \omega)$ στο πεδίο του χρόνου (βλ. εξ. (22.1), εδαφίου Β.1) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\phi^{\pm}(x, z; t) &= A^{\pm} \cosh [k(z+h)] \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} e^{\pm jkx} \right\} = \\ &= A^{\pm} \cosh [k(z+h)] \cos(kx \pm \omega t).\end{aligned}\quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι, σε δεδομένη χρονική στιγμή t , οι λύσεις (12) είναι περιοδικές συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής x και η περιοδικότητα αυτή καθορίζεται από τον *κυματαριθμό* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Πράγματι, για κάθε βάθος $z = \text{const}$, παρατηρούμε ότι,

$$\phi^{\pm}(x, z; t) = \phi^{\pm}(x + n\lambda, z; t), \quad \text{για κάθε ακέραιο αριθμό } n.$$

Η παράμετρος $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ είναι το *μήκος κύματος*.

Για την ερμηνεία των προσήμων \pm στην εξίσωση (12), εξετάζουμε την διαφοροποίηση της μορφής της λύσης σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_1, t_2 > t_1$. Θεωρούμε τα σημεία A_1 και A_2 , Σχήμα 2.1, στα οποία αντιστοιχεί ίδια τιμή του δυναμικού στις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , αντιστοίχως.

α) Η περίπτωση $\phi^+(x, z, t)$, Σχήμα 2.1(α),

$$\begin{aligned}\phi^+(A_2, t_2) = \phi^+(A_1, t_1) &\Rightarrow k(x_2 - x_1) = -\omega(t_2 - t_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = -\frac{\omega}{k} < 0\end{aligned}\quad (13.1)$$

Επομένως, η κυματική διαταραχή διαδίδεται προς τα αρνητικά x , με φασική ταχύτητα μετάδοσης μέτρου $|c| = \frac{\omega}{k}$.

β) Η περίπτωση $\phi^-(x, z, t)$, Σχήμα 2.1 (β):

$$\phi^-(A_2, t_2) = \phi^-(A_1, t_1) \Rightarrow c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k} > 0\quad (13.2)$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η κυματική διαταραχή διαδίδεται προς τα θετικά x , με φασική ταχύτητα μετάδοσης $c = \frac{\omega}{k}$.

Χρησιμοποιώντας τη δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας εξ. (28) του εδαφίου 1, είμαστε σε θέση αφ' ενός μιν να προσδιορίσουμε την μορφή ανύψωσης της ελεύθερης

επιφάνειας $\eta(x,t)$, αφ' ετέρου δε να προσδώσουμε συγκεκριμένη φυσική έννοια στις “αυθαίρετες” σταθερές η^\pm που εμφανίζονται στην εξ. (12). Πράγματι από την εξ. (28), Εδ. 1,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} \overset{\circ}{\eta}_{,xx} - g \overset{\circ}{\eta} &= \left(j\omega + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right) \overset{\circ}{\phi}(x, 0; \omega) \overset{(10)}{\Rightarrow} \\ \overset{(10)}{\Rightarrow} \tilde{\tau} \overset{\circ}{\eta}_{,xx} - g \overset{\circ}{\eta} &= j(\omega \pm U_o k) \cosh(kh) \{A^\pm e^{\pm jkx}\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Για την λύση της γραμμικής δευτεροτάξιας διαφορικής εξίσωσης (14) υποθέτουμε λύσεις της μορφής $\overset{\circ}{\eta}(x; \omega) = jae^{\pm jkx}$ (περιοδικές συναρτήσεις του x , πλάτους a). Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\tilde{\tau} \overset{\circ}{\eta}_{,xx} - g \overset{\circ}{\eta} = \tilde{\tau}(-jak^2 e^{\pm jkx}) - gjae^{\pm jkx}.$$

Επομένως με αντικατάσταση στην εξ. (14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\tilde{\tau}ak^2 - ga &= \cosh(kh) A^\pm (\omega \pm U_o k) \Rightarrow \\ \Rightarrow A^\pm &= -\frac{a}{\cosh(kh)} \cdot \frac{g + ak^2}{\omega \pm U_o k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Συνοψίζοντας, το δυναμικό ταχύτητας διαταραχής από την αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος προκύπτει

$$\phi(x, z; t) = -a \frac{g + \tilde{\tau}k^2}{\omega \pm U_o k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(kx \pm \omega t) \quad (16)$$

και η μορφή ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας

$$\eta(x, t) = a \sin(kx \pm \omega t) \quad (17)$$

Συνεπώς, a είναι το πλάτος, δηλαδή, η μέγιστη τιμή ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (η), πάνω από την στάθμη ηρεμίας $z=0$, δεξ και σχήματα 1.1, 1.2, 1.3. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας σε δεδομένη χρονική στιγμή είναι ημιτονοειδής και η κυματική διαταραχή που μελετάται μεταδίδεται προς τα θετικά ή τα αρνητικά του άξονα x , αντιστρόφως ανάλογα με τα εμφανιζόμενα πρόσημα στις σχέσεις (16) και (17). Σε κάθε περίπτωση το μέτρο της φασικής ταχύτητας μετάδοσης της κυματικής διαταραχής είναι $c = \frac{\omega}{k}$.

Το πλάτος του κυματικού πεδίου $\phi(x, z; t)$ δηλαδή του δυναμικού ταχύτητας διαταραχής από την αλληλεπίδραση κύματος-ρεύματος, εξίσωση (16), διαμορφώνεται βάσει του πλάτους ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας από δύο επιπλέον παράγοντες:

α) τον όρο $\frac{g + \tilde{\tau}k^2}{\omega \pm U_0 k}$ που εκφράζει την αλληλεπίδραση ρεύματος-κύματος, υπό την επίδραση της επιφανειακής τάσεως.

β) τον όρο $\frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}$ που εκφράζει την (αποσβεστική) επίδραση του βάρους στην λύση για το δυναμικό διαταραχής. Η σχέση (16) εξαπλουστεύεται σημαντικά στην περίπτωση ρευστού (νερού) μεγάλου βάρους $\left(kh = 2\pi\left(\frac{h}{\lambda}\right) \rightarrow \infty\right)$. Παρατηρώντας την συμπεριφορά του εν λόγω όρου για μεγάλα βάθη,

$$\frac{\cos[k(z+h)]}{\cos(kh)} = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{e^{kh} + e^{-kh}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{e^{kh} e^{kz}}{e^{kh}} = e^{kz}$$

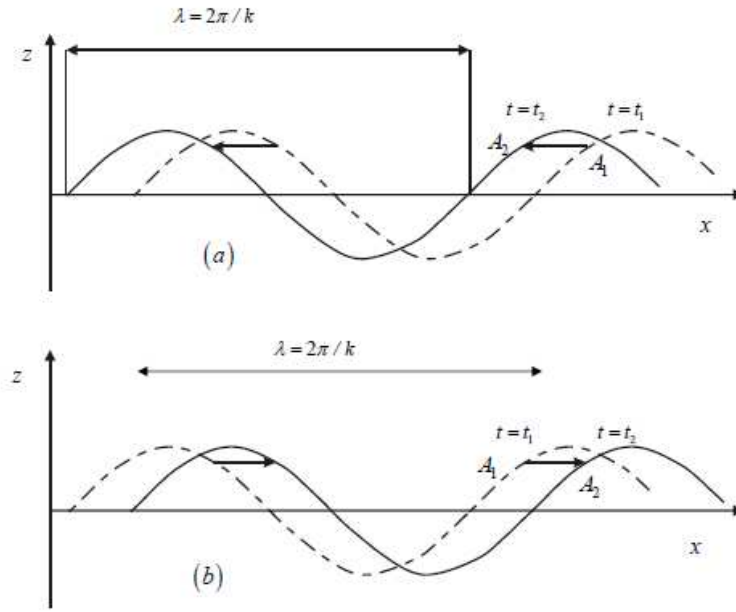
έχουμε,

$$\phi_{\text{ΒΑΘΥ}}(x, z; t) = -\alpha \frac{g + \tilde{\tau}k^2}{\omega \pm U_0 k} e^{kz} \cos(kx \pm \omega t). \quad (18)$$

Από την τελική μορφή της λύσης του προβλήματος που μελετάται, εξ. (16) και (17), παρατηρούμε ότι η μόνη σταθερά που παραμένει “απροσδιόριστη” από τις φυσικές παραμέτρους διατύπωσης του προβλήματος είναι το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας a . Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας συνδέεται στενά με την ενέργεια κύματος και τον ρυθμό μετάδοσης (ροής) της ενέργειας με την κυματική διαταραχή. Όπως γίνεται αντιληπτό, για τον προσδιορισμό του πλάτους ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας απαιτούνται επιπρόσθετες πληροφορίες για την ένταση του διεγείροντος αιτίου (π.χ. κυματιστήρας, σώμα κινούμενο κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, άλλη διαταραχή) ή για την ροή ενέργειας στην μονάδα του χρόνου από τυχαία κατακόρυφη διατομή του κυματικού πεδίου.

3. Σχέση διασποράς

Οι λύσεις ϕ^{\pm} , σχέση (10), Εδάφ. 2 του μερικού προβλήματος που κατασκευάστηκαν ικανοποιούν την απαίτηση του φραγμένου, εξ. (27) ή (27a), Εδάφ. 1. Προκειμένου να είναι αποδεκτές λύσεις του πλήρους γραμμικοποιημένου προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος στην άπειρη λωρίδα \mathcal{A} θα πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσο ικανοποιούν και την γραμμικοποιημένη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, εξ. (25), Εδάφ. 1. Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή



Σχήμα 2.1 Διάδοση της κυματικής διαταραχής

$$\left(j\omega + U_o \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \overset{\circ}{\phi} + g \overset{\circ}{\phi}_{,z} + \tilde{\tau} \overset{\circ}{\phi}_{,zzz} = 0, \quad \text{στη θέση } z = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega^2 \overset{\circ}{\phi} + 2j\omega U_o \overset{\circ}{\phi}_{,x} + U_o^2 \overset{\circ}{\phi}_{,xx} + g \overset{\circ}{\phi}_{,z} + \tilde{\tau} \overset{\circ}{\phi}_{,zzz} = 0. \quad (1)$$

Θεωρώντας $\overset{\circ}{\phi} = A^{\pm} \cosh[k(z+h)]e^{\pm jkx}$ έχουμε για τους επιμέρους όρους στο αριστερό μέλος της εξ. (1),

$$-\omega^2 \overset{\circ}{\phi} = -\omega^2 A^{\pm} e^{\pm jkx} \cosh(kh)$$

$$2j\omega U_o \overset{\circ}{\phi}_{,x} = 2j\omega U_o A^{\pm} (\pm jk) e^{\pm jkx} \cosh(kh)$$

$$U_o^2 \overset{\circ}{\phi}_{,xx} = U_o^2 A^{\pm} (\pm jk)^2 \cosh(kh) e^{\pm jkx}$$

$$g \overset{\circ}{\phi}_{,z} = gk A^{\pm} e^{\pm jkx} \sinh(kh)$$

$$\tilde{\tau} \overset{\circ}{\phi}_{,zzz} = \tilde{\tau} k^3 A^{\pm} e^{\pm jkx} \sinh(kh)$$

Αθροίζοντας τις ανωτέρω σχέσεις κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την εξ. (1) παίρνουμε,

$$0 = (-\omega^2 \mp 2\omega U_o k - U_o^2 k^2) \cosh(kh) + (gk + \tilde{\tau} k^3) \sinh(kh) \Rightarrow$$

$$\left[(kh) + \frac{\tilde{\tau}}{gh^2} (kh)^3 \right] \tanh(kh) = \frac{\omega^2 h}{g} \pm \frac{2\omega U_o}{g} (kh) + \frac{U_o^2}{gh} (kh)^2 \quad (2)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\omega = \sqrt{(kg + \tilde{\tau}k^3) \tanh(kh)} \mp U_o k. \quad (3)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις, (2) ή (3), αποτελούν κατ' αρχήν σχέσεις συμβιβαστού μεταξύ των παραμέτρων που εμπλέκονται στην διατύπωση του εξεταζόμενου φυσικού προβλήματος. Με άλλα λόγια, για να είναι οι λύσεις του προβλήματος που κατασκευάστηκαν, εξ. (16), εξ. (17), Εδάφ. 2, φυσικά αποδεκτές, θα πρέπει οι εμφανιζόμενες σε αυτές παράμετροι $\{k, \omega, g, h, \tilde{\tau}, U_o\}$ να ικανοποιούν τις σχέσεις (2) ή (3). Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται σχέσεις διασποράς (dispersion relations). Από την εξίσωση (3) παίρνουμε για την φασική ταχύτητα μετάδοσης.

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{(g/k + \tilde{\tau}k) \tanh(kh)} \mp U_o. \quad (4)$$

Η ιδιότητα αυτή του μέσου (νερό) στο οποίο εξετάζουμε το κυματικό φαινόμενο, δηλαδή η φασική ταχύτητα c να εξαρτάται από τον κυματαριθμό k (ή το μήκος κύματος $\lambda = 2\frac{\pi}{k}$) έχει σαν συνέπεια την διαρκή μεταβολή της μορφής ενός σύνθετου οδεύοντος κύματος, το οποίο σε μια αρχική χρονική στιγμή απαρτίζεται από την γραμμική υπέρθεση (επαλληλία) περισσοτέρων της μιας απλών αρμονικών συνιστωσών.

Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε την διέγερση του κυματικού φαινομένου από μια τοπική διαταραχή της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού, π.χ. την πτώση ενός σώματος τότε θα παρατηρήσουμε στην αρχή, την ανάπτυξη και διάδοση κυματισμών με διάφορα μήκη κύματος στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Στην συνέχεια, και επειδή οι κυματισμοί, με διάφορα μήκη κύματος έχουν διαφορετικές φασικές ταχύτητες μετάδοσης, σύμφωνα με την εξ. (4), παρατηρείται μια συνεχής μεταβολή της επιφάνειας του ρευστού, καθώς κύματα με ουσιωδώς διαφορετικά μήκη κύματος (π.χ. μεγάλα λ) κινούνται μέσω των υπολοίπων (π.χ. κυμάτων με μικρά λ), και αντιστρόφως. Έτσι, καταλήγουμε στην διαπίστωση ότι με την πάροδο του χρόνου το αρχικά σύνθετο σύστημα κυματισμών θα διαχωρισθεί σε ομάδες, όπου θα συμπεριλαμβάνονται απλά αρμονικά κύματα του αυτού περίπου μήκους κύματος λ , και οι οποίες θα οδεύουν με μια ταχύτητα. Η ταχύτητα της κάθε ομάδας είναι, γενικά, μικρότερη από την φασική ταχύτητα μετάδοσης των απλών, αρμονικών συνιστωσών της. Μια πρώτη εξέταση των ιδιοτήτων μιας τέτοιας ομάδας κυματισμών θα γίνει στο εδάφιο 7.

Επανερχόμενοι, στην εξέταση της σχέσεως διασποράς, Εξ. (2), είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε την εμφάνιση σε αυτή των ακολούθων χαρακτηριστικών αδιαστάτων παραμέτρων:

- τον αριθμό Froude-ρεύματος: $Fr(U_o) = \frac{U_o}{\sqrt{gh}}$. Η παράμετρος αυτή δηλώνει την σχετική σημασία των αδρανειακών δυνάμεων από την παρουσία του ρεύματος προς τις δυνάμεις βαρύτητας.

- τον αριθμό Strouhal (αδιάστατη παράμετρος συχνότητας): $S = \omega \sqrt{\frac{h}{g}}$. Η παράμετρος αυτή δηλώνει την σχετική σημασία των αδρανειακών δυνάμεων λόγω της χρονικά μη μόνιμης κίνησης του ρευστού προς τις δυνάμεις βαρύτητας.

- την αδιάστατη παράμετρο επιφανειακής τάσεως: $T = \frac{\tilde{\tau}}{gh^2}$, η οποία δηλώνει την σχετική σημασία των δυνάμεων επιφανειακής τάσεως προς τις δυνάμεις βαρύτητας.
- τον αδιάστατο κυματαριθμό: $kh = 2\pi \frac{h}{\lambda}$. Η παράμετρος αυτή δηλώνει την σημασία των επιδράσεων βάρους στο εξεταζόμενο πρόβλημα. Στην περίπτωση $\frac{h}{\lambda} > 0,5 \Rightarrow kh > \pi$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε πρακτικά βαθύ νερό (βλ. εξ. (18), Εδάφ. 1). Στην περίπτωση αυτή, περαιτέρω αύξηση του λόγου $\frac{h}{\lambda}$ (με σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους) δεν οδηγεί σε σημαντική διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων.
- η αλληλεπίδραση ρεύματος-κύματος εμφανίζεται ουσιαστικά στον όρο

$$\pm \frac{2\omega U_o}{g}(kh) = \pm 2Fr(U_o) \cdot S \cdot (kh).$$

Ανάλογα με το μέγεθος των ανωτέρω, αδιάστατων χαρακτηριστικών παραμέτρων μπορεί να διακρίνει κανείς διάφορες ενδιαφέρουσες υποπεριπτώσεις (π.χ. την περίπτωση αμελητέας επιδράσεως ρεύματος $Fr(U_o) \ll 1$, την περίπτωση αμελητέας επιδράσεως επιφανειακής τάσεως $T \ll 1$ ή την περίπτωση απλών αρμονικών κυματισμών βαρύτητας σε βαθύ νερό $kh \gg \pi$ και $Fr(U_o), T \ll 1$ κ.λ.π.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση της σχέσεως (4) για την φασική ταχύτητα μεταδόσεως κύματος στην γενική περίπτωση, αφήνοντας την εξέταση των διαφόρων υποπεριπτώσεων στον αναγνώστη ως άσκηση.

- Διερεύνηση της φασικής ταχύτητας των επιφανειακών κυμάτων

Παρατηρούμε ότι για τιμές του μήκους κύματος λ εκτός της γειτονίας του μηδενός ($\lambda > \varepsilon > 0$) η μεταβολή του όρου $f(\lambda)$ στο υπόριζο του δεξιού μέλους της εξ. (4) δίδεται από την σχέση:

$$f(\lambda) = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \tilde{\tau} \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right), \quad (5)$$

και για μεγάλα έως ενδιάμεσα βάθη $\frac{h}{\lambda} > 0.4 - 0.5$, επηρεάζεται κυρίως από την πρώτη του συνιστώσας $\left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)$. Αυτή στασιμοποιείται στο σημείο

$$\lambda = \lambda_m : \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\tilde{\tau}}{\lambda_m^2} = 0 \Rightarrow \lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{\rho g}}.$$

Ως ενδεικτική τιμή, σημειώνεται ότι στην περίπτωση νερού,

$$\tau = 0.073 \text{ N/m} \Rightarrow \tilde{\tau} = 7.02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{s}^2 \Rightarrow \lambda_m \approx 1.73 \text{ cm}.$$

Για μικρότερα μήκη κύματος $\lambda < \lambda_m$, ο όρος που σχετίζεται με την επιφανειακή τάση $\left(\tilde{\tau} \frac{2\pi}{\lambda} \right)$ κυριαρχεί και η μεταβολή της συναρτήσεως-υπορίζου $f(\lambda)$ καθώς και της φασικής ταχύτητας μεταδόσεως $c(\lambda)$, Εξ. (4), είναι θετική ($c(\lambda)$ αύξουσα) για ελάττωση του $\lambda < \lambda_m$. Για μεγαλύτερα μήκη κύματος $\lambda > \lambda_m$, αλλά μέχρι ενός ορίου $\lambda < 2 \div 2.5h$, το οποίο εξαρτάται από το τοπικό βάθος, τόσο η $f(\lambda)$ όσο και η $c(\lambda)$ επηρεάζονται κυρίως από τον όρο που σχετίζεται με την βαρύτητα $\left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)$ και κατά συνέπεια είναι αύξουσες συναρτήσεις, δεξ και σχήμα 3.1. Μια εκτίμηση για την ελάχιστη τιμή του όρου $\sqrt{f(\lambda)}$, που είναι η φασική ταχύτητα μετάδοσης κύματος στην περίπτωση απουσίας ρεύματος ($U_o = 0$), προκύπτει εύκολα εάν κανείς προσέξει ότι στην περιοχή αυτή ($\lambda = \lambda_m$) ισχύει προσεγγιστικά $\tanh(kh) \approx 1$. Συνεπώς για υδάτινα κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον

$$c_{min} = [4\tilde{\tau}g]^{1/4} \approx 23.5 \frac{cm}{s}.$$

Επίσης, στην περίπτωση υδάτινων κυμάτων, για τιμές του μήκους κύματος $\lambda > 2h$ (ρηχό νερό) η επίδραση της επιφανειακής τάσεως είναι πρακτικά αμελητέα. Όταν $kh = 2\pi \frac{h}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \tanh(kh) \approx kh$, συνεπώς από την σχέση (4) παίρνουμε,

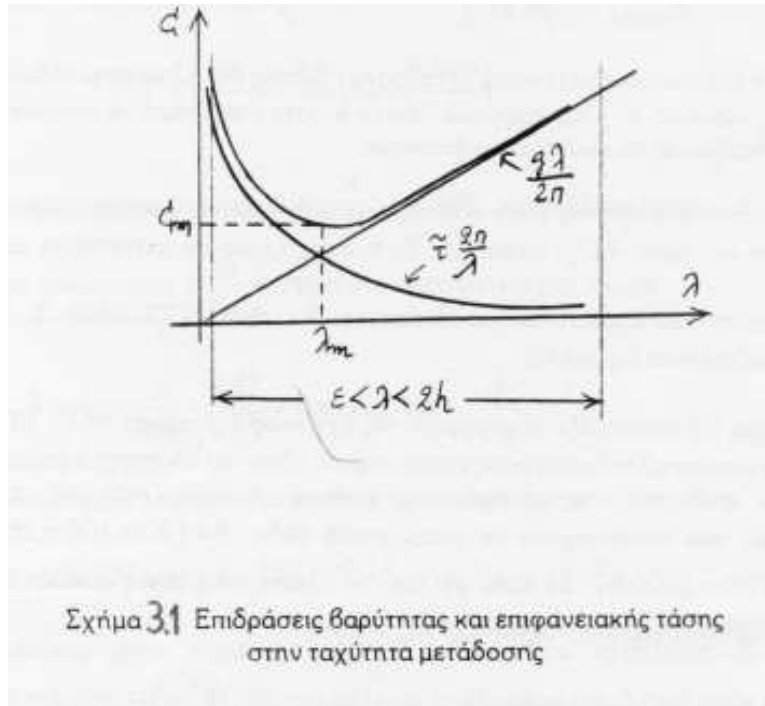
$$c_{PHXO} \approx \sqrt{gh} \mp U_o \quad (6)$$

και η τιμή της φασικής ταχύτητας μετάδοσης κύματος δεν εξαρτάται πλέον από το μήκος κύματος λ . Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο ρηχό νερό τα επιφανειακά κύματα βαρύτητας δεν υφίστανται διασπορά.

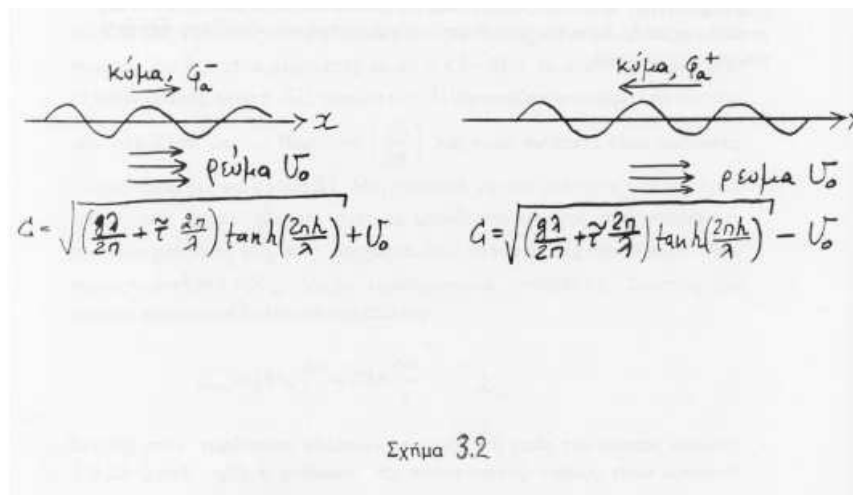
Η επίδραση του ρεύματος στην φασική ταχύτητα κύματος προκύπτει με απλή υπέρθεση του όρου $\mp U_o$, σχέση (4). Τα πρόσημα είναι σε αντίστοιχία με την προσήμανση των λύσεων του προβλήματος ϕ^{\pm} , σχέση (10), Εδάφ. 2, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2.

Στο σχήμα 3.3 απεικονίζεται η μορφή της σχέσεως διασποράς $c(\lambda)$, Εξ. (4), στην περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακού υδάτινου κύματος με ρεύμα και υπό την επίδραση της επιφανειακής τάσεως. Απεικονίζεται μια ομάδα καμπυλών που αντιστοιχούν σε διαφορετικά βάθη $h = \{50m, 100m, 250m, 500m, 750m, 1000m\}$. Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές απεικονίζεται και η επίδραση ρεύματος ταχύτητας $U_o = 1m/s$.

Όταν το κύμα διαδίδεται σε αντίθετη κατεύθυνση από το ρεύμα αναμένεται εν γένει (και ανάλογα με την τιμή U_o) η εμφάνιση μιας περιοχής μηκών κύματος (στο παράδειγμα $1mm < \lambda < 0.9m$) όπου η σχέση διασποράς δεν έχει λύση με φυσική σημασία. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο που εξετάζεται δεν έχει κυματικό χαρακτήρα.



Σχήμα 3.1 Επιδράσεις βαρύτητας και επιφανειακής τάσης στην ταχύτητα μετάδοσης



Σχήμα 3.2

4. Λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος σε ημιάπειρη λωρίδα ρευστού. (Λύσεις φραγμένες για $x \rightarrow +\infty$)

Στο παρόν εδάφιο θα εξετάσουμε την επίλυση του χρονικά αρμονικού, γραμμικοποιημένου προβλήματος $P_a(\omega, U_0, \tilde{\tau})$ που συνίσταται από τις εξισώσεις (24a), (25), (26) και (27a) του Εδαφίου 1. Χάρην απλότητας θα περιορισθούμε στην περίπτωση αρμονικών κυματισμών βαρύτητας, αμελώντας τις επιδράσεις, επιφανειακής τάσεως ($\tilde{\tau} = 0$) και ρεύματος ($U_0 = 0$), στην ημιάπειρη λωρίδα $A_a = \{(x, z) : a < x < \infty, -h < z < 0\}$. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε $a = 0$ στην ανάπτυξη που ακολουθεί.

Η διαδικασία χωρισμού μεταβλητών για το υποπρόβλημα που απαρτίζεται από τις εξισώσεις (24a) και (26) του Εδαφ. 1 παραμένει ακριβώς η ίδια όπως αναπτύχθηκε στο Εδάφ. 2 για την περίπτωση του προβλήματος στην άπειρη λωρίδα ρευστού. Οι εξ. (3) και (4), Εδάφ. 1, ισχύουν και στην παρούσα περίπτωση, για την οποία όμως, είμαστε υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε όλες τις δυνατές μερικές λύσεις που αντιστοιχούν στις επιμέρους επιλογές. $\mu(\omega) < 0$ και $\mu(\omega) > 0$.

Θεωρώντας την σταθερά χωρισμού μεταβλητών (k) ως πραγματικό αριθμό ($k \in \mathbb{R}$) ή φανταστικό αριθμό ($j/k \in \mathbb{I}$), αντίστοιχα, είμαστε σε θέση να εκφράσουμε σε ενιαία μορφή την εξ. (4), Εδάφ. 2, ως ακολούθως,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \mu(\omega) = -k^2 = \begin{cases} -/k|^2, k \in \mathbb{R} \\ |/k|^2, k \in \mathbb{I} \end{cases} . \quad (1)$$

Κατά τα γνωστά, οι μερικές λύσεις του εξεταζόμενου προβλήματος οι οποίες επιπλέον ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα, εξ. (26), Εδάφ. 1, είναι⁷

$$\overset{o \pm}{\phi}(x, z; \omega) = A^\pm e^{\pm jkx} \cosh[k(z+h)], \quad k \in \mathbb{R} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{C} \quad (2)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι στην περίπτωση $k \in \mathbb{R}$ η ανωτέρω σχέση ταυτίζεται με την εξ. (10), Εδάφ. 2, ενώ στην περίπτωση $k = j/k \in \mathbb{I}$ γράφεται ισοδυνάμως στην μορφή,

$$\overset{o \pm}{\phi}(x, z; \omega) = A^\pm e^{\mp k/x} \cosh[j/k/(z+h)], \quad k \in \mathbb{I} \quad (3)$$

Επιπλέον, ενώ στην περίπτωση $k \in \mathbb{R}$ η απαίτηση φραγμένου, εξ. (27a) του Εδαφ. 1, ικανοποιείται από τις συναρτήσεις $\overset{o}{\phi}(x, z; \omega)$, εξ. (2), αντιθέτως στην περίπτωση $k = j/k \in \mathbb{I}$, μόνο οι μερικές λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε θετικούς, φανταστικούς αριθμούς ($k = j\xi \in \mathbb{I}^+$, $\xi \in \mathbb{R}^+$),

$$\overset{o +}{\phi}(x, z; \omega) = A^+ e^{-\xi x} \cos[\xi(z+h)] \quad (4)$$

είναι δυνατόν να θεωρηθούν.

Μετά την ανωτέρω ανάλυση εκείνο που απομένει να εξετασθεί σε ότι αφορά την αναπαράσταση της γενικής λύσεως του προβλήματος $P_a(\omega, U_o = 0, \tilde{\tau} = 0)$ από τις ανωτέρω

⁷ Υπενθυμίζονται στον αναγνώστη οι ακόλουθες σχέσεις από την θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων, ($x \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} \sin(jx) &= j \sinh(x), \quad \sinh(jx) = j \sin(x), \\ \cos(jx) &= \cosh(x), \quad \cosh(jx) = \cos(x), \\ \tan(jx) &= j \tanh(x), \quad \tanh(jx) = j \tan(x). \end{aligned}$$

μερικές λύσεις, Εξ. (2) και (4), είναι κάτω από ποιές επιπλέον προϋποθέσεις αυτές πληρούν και την συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, Εξ. (25), Εδάφ. 1.

- Σχέση διασποράς

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με εκείνη που εφαρμόστηκε στην αρχή του προηγούμενου εδαφίου λαμβάνουμε στην περίπτωση $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\omega^2 = kg \tanh(kh) &\Rightarrow S^2 = \frac{\omega^2 h}{g} = (kh) \tanh(kh) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{S^2}{kh} = \tanh(kh).\end{aligned}\quad (5)$$

Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται η λύση της ανωτέρω εξίσωσης (σχέση διασποράς) στην ειδικότερη περίπτωση $k \in \mathbb{R}^+$. Αριθμητικά η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί ως προς τον αδιάστατο κυματαριθμό (kh) με διάφορες μεθόδους (π.χ. με την μέθοδο της διχοτόμησης). Ο ακόλουθος τύπος παρέχει μια προσεγγιστική εκτίμηση των θετικών ριζών της εξίσωσης (5) για διάφορες τιμές του αριθμού Strouhal,

$$(kh)^2 = S^2 + \frac{S}{1 + \sum_{n=1}^6 d_n (S)^n}, \quad (6)$$

όπου $d_1 = 0.666\dots$, $d_2 = 0.355\dots$, $d_3 = 0.16084656$, $d_4 = 0.063209876$, $d_5 = 0.021754048$ και $d_6 = 0.006540798$.

Στην περίπτωση $k = j\xi \in \mathbb{I}^+$, $\xi \in \mathbb{R}^+$, αντικατάσταση της εξ. (4) στην οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, εξ. (25), Εδάφ. 1, οδηγεί μετά από την σχετική άλγεβρα στην ακόλουθη εξίσωση (σχέση διασποράς),

$$\begin{aligned}\omega^2 = -\xi g \tan(\xi h) &\Rightarrow S^2 = \frac{\omega^2 h}{g} = -(\xi h) \tan(\xi h) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{S^2}{\xi h} = -\tan(\xi h).\end{aligned}\quad (7)$$

Η μεθοδολογία ανεύρεσης των πραγματικών θετικών ριζών ($\xi \in \mathbb{R}^+$) της εξίσωσης (7) παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2. Όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα αυτό, λόγω της περιοδικότητας της εφαπτομένης η εξίσωση (7) επιδέχεται μια απειρία διακριτών, θετικών, πραγματικών λύσεων $\{\xi_n\}_{n=1, \infty} \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει από το σχήμα αυτό ότι

$$\xi_n \rightarrow n\pi, n \rightarrow \infty.$$

Η ιδιότητα αυτή παρέχει στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις: $\overset{o}{\phi}_n(x, z; \omega) = e^{-\xi_n x} \cos[\xi_n(z+h)]$ την ικανότητα να αναπαριστούν πλήρως συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και που αποσβένονται εκθετικά κατά την οριζόντια διεύθυνση (ιδιότητα βάσης).

- Γενική μορφή της λύσης

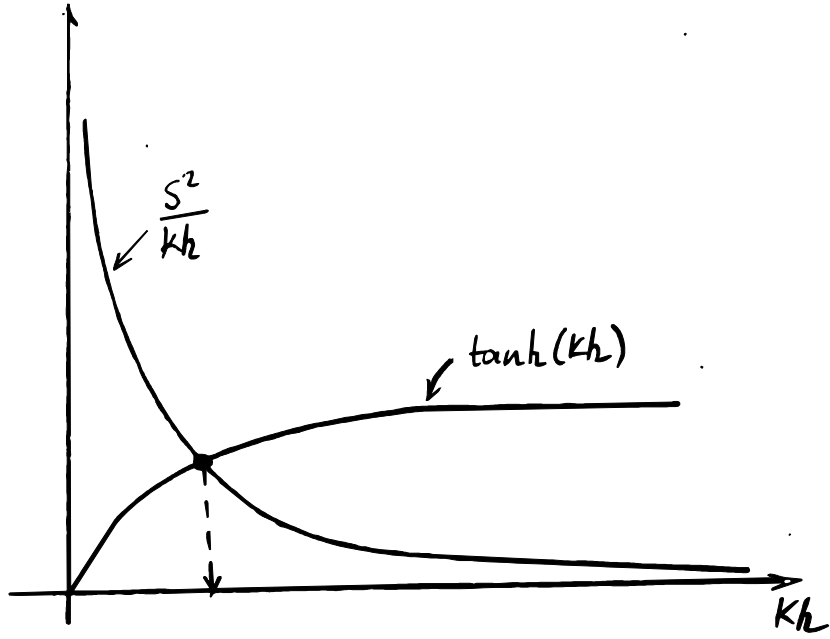
Κατόπιν όλων των ανωτέρω είμαστε σε θέση να συνθέσουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για την γενική λύση του προβλήματος $P_a(\omega, U_o = 0, \tilde{\tau} = 0)$, στην ημιάπειρη λωρίδα A_a ,

$$\overset{o}{\phi}_n(x, z; \omega) = A^+ e^{jkx} \cosh[k(z+h)] + A^- e^{-jkx} \cosh[k(z+h)] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\xi_n x} \cos[\xi_n(z+h)], \quad (8)$$

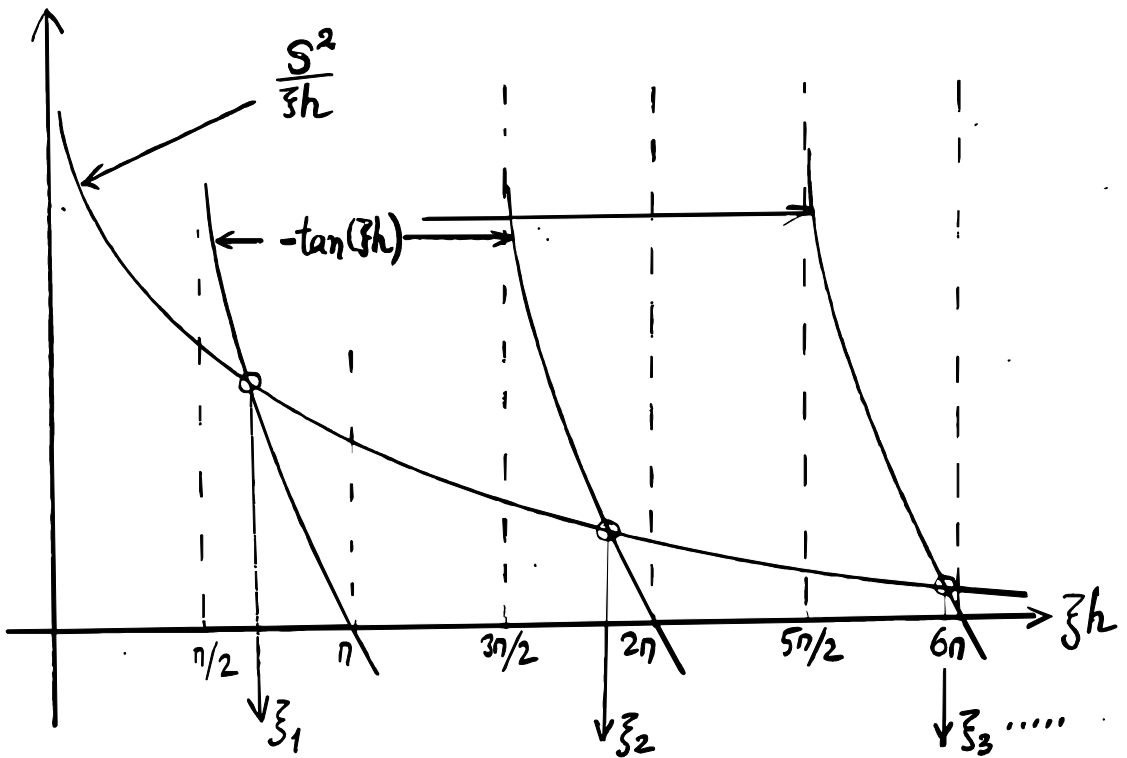
όπου k η ρίζα της εξ. (5) και $\{\xi_n\}$ οι πραγματικές και θετικές ρίζες της εξ. (7).

Οι εμφανιζόμενες σταθερές πλάτους $(A^+, A^-, \{A_n\}_{n=1, \infty})$ στην ανωτέρω αναπαράσταση προσδιορίζονται με την βοήθεια επιπρόσθετης πληροφορίας που σχετίζεται με το αίτιο που προκαλεί την κυματική διαταραχή (π.χ. με χρήση επιπλέον συνοριακών συνθηκών στην κατακόρυφη επιφάνεια $x = a$).

Η μορφή της λύσεως του προβλήματος στο πεδίο του χρόνου, καθώς και η μορφή ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας προκύπτουν εύκολα από εφαρμογή των εξισώσεων (22.1), Εδάφ. 1 και (28), (22.2), Εδάφ. 1, αντιστοίχως, και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.



Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2

5. Περαιτέρω μελέτη του πεδίου ροής. (Τροχιές στοιχείων, γραμμές ροής, πίεση και ισοβαρείς επιφάνειες).

- Τροχιές των στοιχείων

Θα εξετάσουμε στην αρχή την μορφή των τροχιών των υλικών στοιχείων του ρευστού στην απλούστερη περίπτωση απουσίας ρεύματος ($U_o = 0$). Από τις σχέσεις (3''), Εδάφ. 3, Κεφ. Α, έχουμε με αντικατάσταση της λύσεως, Εξ. (16), που κατασκευάσαμε στο Εδ. 2, του παρόντος Κεφαλαίου,

$$\frac{dx}{dt} = \phi_{,x} = \frac{\alpha k}{\omega} (g + \tilde{\tau} k^2) \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx \pm \omega t) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \phi_{,z} = -\frac{\alpha k}{\omega} (g + \tilde{\tau} k^2) \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(kx \pm \omega t) = B \cos(kx \pm \omega t)$$

όπου A, B σταθερές που εξαρτώνται από το βάθος (z).

Θεωρώντας μικρές τις μεταβολές των ταχυτήτων του κάθε μορίου του ρευστού γύρω από μια (κατάλληλη) μέση θέση (x_o, z_o) παίρνουμε από την χρονική ολοκλήρωση του ανωτέρω συστήματος από μια αυθαίρετη αρχική χρονική στιγμή ($t = 0$)

$$x(t) - x(t=0) = \frac{A}{\omega} \cos(kx_o - \omega t), x_o = \overline{x(t)},$$

$$z(t) - z(t=0) = \frac{B}{\omega} \sin(kx_o - \omega t), z_o = \overline{z(t)}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση για την τροχιά του εκάστοτε στοιχείου (εκείνου που κινείται γύρω από τη χρονικά μέση θέση $(x_o, z_o) = (\overline{x(t)}, \overline{z(t)})$),

$$\frac{(x-x_o)^2}{(A/\omega)^2} + \frac{(z-z_o)^2}{(B/\omega)^2} = 1 \quad . \quad (1)$$

Επομένως οι τροχιές των μορίων του ρευστού είναι ελλείψεις με ημιάξονες A/ω και B/ω αντίστοιχα, Σχ. 5.1. Για μεγάλα βάθη, από τις ανωτέρω σχέσεις ορισμού των συντελεστών A, B παρατηρούμε ότι καθώς $|z| \uparrow \Rightarrow A, B \downarrow$.

Για $z = -h \Rightarrow B = 0$, δηλαδή τα στοιχεία σε επαφή με τον οριζόντιο πυθμένα παλινδρομούν παράλληλα προς αυτόν (ιδιότητα του μη συνεκτικού ρευστού).

Στην περίπτωση ρευστού μεγάλου βάθους, $\frac{\cos[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \approx \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \approx e^{kz}$. Κατά συνέπεια, $A = -B = \frac{\alpha k}{\omega} (g + \tilde{\tau} k^2) e^{kz}$. Στην περίπτωση αυτή ($kh \rightarrow \infty$, $U_o = 0$)

η σχέση διασποράς διαμορφώνεται ως ακολούθως: $\omega^2 = kg \Leftrightarrow c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. Επομένως, $A/\omega = \alpha e^{kz}$. Άρα οι τροχιές των μορίων είναι κύκλοι γύρω από τη μέση τους θέση, η ακτίνα των οποίων αποσβέννεται εκθετικά με το βάθος. Στην ελεύθερη επιφάνεια ($z=0$) η ακτίνα των κύκλων ταυτίζεται με το πλάτος (α) ανύψωσης της.

Με βάση τις ανωτέρω παρατηρήσεις μπορούμε με επαλληλία, δεξ και Σχήμα 5.2 να συνθέσουμε τις αναμενόμενες εικόνες για τις τροχιές των μορίων στην περίπτωση αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος.

- Γραμμές ροής

Για την ανεύρεση των γραμμών ροής του πεδίου θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (2), Εδάφ. 3, Κεφ. 5. Ακολούθως, και στην απλούστερη περίπτωση απουσίας ρεύματος, έχουμε με αντικατάσταση της λύσεως, Εξ. (16), Εδαφ. 2,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\phi_{,z}}{\phi_{,x}} = -\frac{\tanh[k(z+h)]}{\tan(kx \pm \omega t)} \Rightarrow \int_z \frac{dz}{\tanh[k(z+h)]} = -\int_x \frac{dx}{\tan(kx \pm \omega t)} + C,$$

όπου C η σταθερά ολοκλήρωσης και όπου η ολοκλήρωση νοείται τμηματικά στα κατακόρυφα τμήματα του πεδίου, όπου η συνάρτηση $\tan(kx \pm \omega t)$ διατηρεί πρόσημο. Επομένως, λαμβάνουμε για τις εξισώσεις των γραμμών ροής,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln \{ \sinh[k(z+h)] \} &= -\frac{1}{k} \ln \{ \sin(kx \pm \omega t) \} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= -h + \frac{1}{k} \sinh^{-1} \left\{ \frac{C'}{\sin(kx \pm \omega t)} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

όπου C' σταθερά που προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του αρχικού σημείου (κάτω ορίου) της ολοκλήρωσης.

Η στιγμιαία εικόνα των γραμμών ροής είναι στην εξεταζόμενη περίπτωση όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.3. Σημειώνεται εδώ ότι το εξεταζόμενο φαινόμενο είναι χρονικώς μη μόνιμο. Συνεπώς, στο σχήμα 5.3 εμφανίζεται η εικόνα που θα παρουσίαζαν οι γραμμές ροής σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή (εάν ήταν δυνατόν να φωτογραφηθούν). Από την χωρο-χρονική περιοδικότητα του φαινομένου που εξετάζεται μπορούμε να φανταστούμε την μορφή που θα είχε μια αλληλουχία τέτοιων εικόνων σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου.

- Πίεση και ισοβαρείς επιφάνειες.

Από την εξίσωση Bernoulli, σχέση (16), Εδάφ. 6, Κεφ. Α, έχουμε:

$$\frac{p-p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - gz, \quad (3)$$

όπου $\Phi = \phi + U_o x$ δηλώνει το συνολικό δυναμικό της ροής και p_a την τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης. (Εξετάζουμε, ειδικότερα, την περίπτωση: $\bar{p} = p_a = const$, δηλαδή την περίπτωση όπου η εξωτερικά επιβαλλόμενη πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση, η οποία έχει σταθερή τιμή). Αμελώντας όρους ανώτερης τάξεως που εμφανίζονται στην εξίσωση (2), σε συμφωνία με την διαδικασία γραμμικοποίησης του εξεταζόμενου προβλήματος που ακολουθείται, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{p(x, z; t) - p_a}{\rho} &\approx -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(U_o^2 + 2U_o \phi_{,x}) - gz \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p + \frac{1}{2}\rho U_o^2 - p_a}{\rho} &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} - U_o \phi_{,x} - gz \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Υποθέτοντας ότι η μορφή της ισοβαρούς (καμπύλη σταθερής πίεσης) γύρω από μια μέση στάθμη $z = z_o = const$ έχει μορφή ανάλογη με την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας: $z = z_o + \beta \sin(kx \pm \omega t)$, όπου β το πλάτος της ισοβαρούς με αντικατάσταση στην Εξ. (4) και κάνοντας χρήση της Εξ. (16), Εδάφ. 2 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{p(x, z; t) + \frac{1}{2}\rho U_o^2 - p_a}{\rho} &= -gz_o - g\beta \sin(kx \pm \omega t) \pm \\ &\pm \psi_o^\pm \omega \sin(kx \pm \omega t) + \psi_o^\pm U_o k \sin(kx \pm \omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

όπου ,

$$\psi_o^\pm = -\frac{\alpha(g + \tilde{\tau}k^2)}{\omega \pm U_o k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \quad . \quad (6)$$

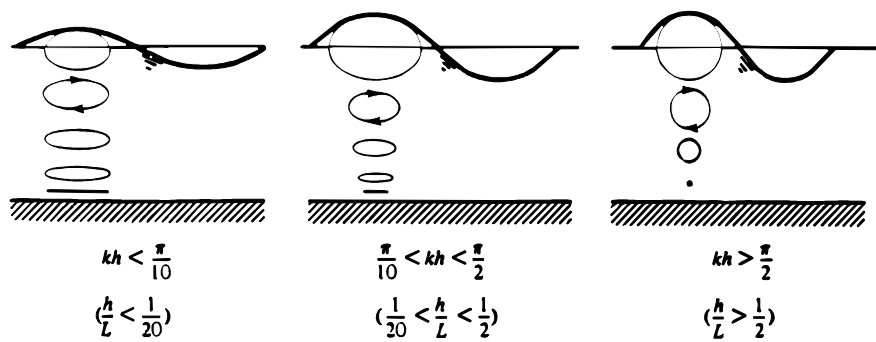
Επομένως, εάν η πίεση της αναζητούμενης ισοβαρούς τεθεί ίση με την μέση σταθμική πίεση (την πίεση που επικρατεί στο συγκεκριμένο βάθος $z = z_o$, στην περίπτωση που στο πεδίο ροής δεν έχουν αναπτυχθεί κυματικά φαινόμενα) έχουμε,

$$\begin{aligned} p(x, z = z_o; t) + \frac{1}{2}\rho U_o^2 - p_a &= -\rho g z_o \Rightarrow \\ \Rightarrow p(x, z = z_o) &= p_a - \frac{1}{2}\rho U_o^2 - \rho g z_o \end{aligned} \quad (7)$$

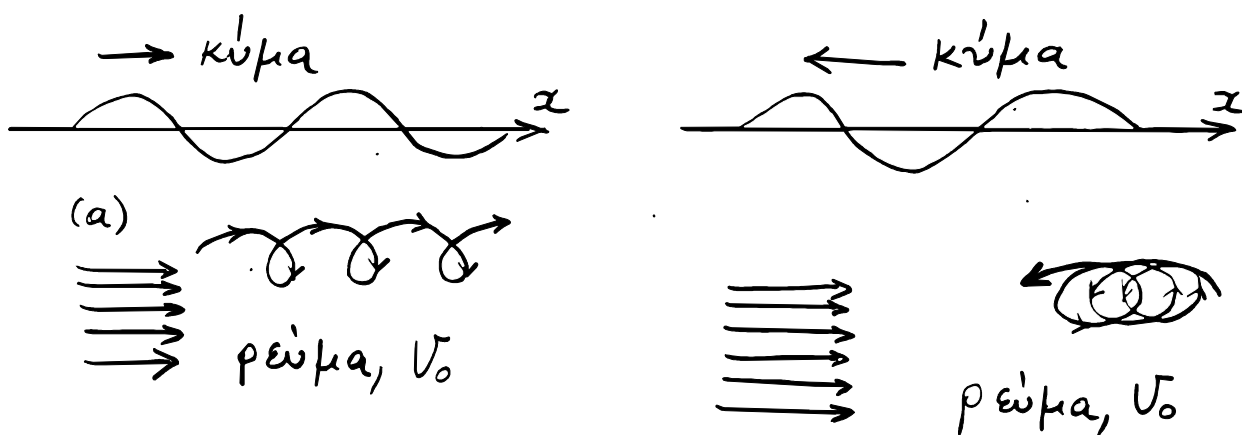
και τότε από την εξίσ. (5) παίρνουμε,

$$g\beta = -\psi_o^\pm(\omega \pm U_o k) \Rightarrow \beta = \frac{\alpha(g + \tilde{\tau}k^2)}{g} \frac{\cosh[k(z_o + h)]}{\cosh(kh)} \quad . \quad (8)$$

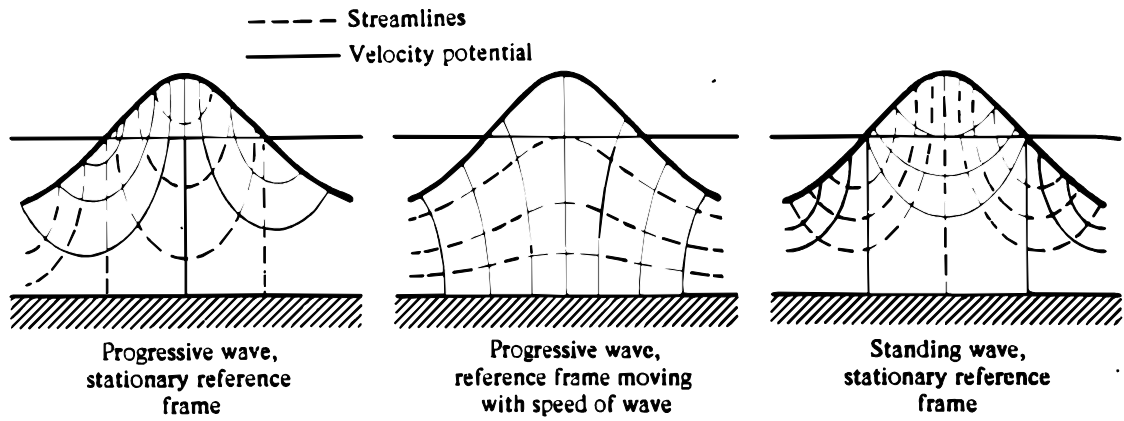
Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι η ισοβαρής γύρω από την μέση στάθμη $z = z_o$, με σταθμική τιμή όπως αυτή παρέχεται από την σχέση (7), έχει την κυματική μορφή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, και πλάτος που δίδεται από την Εξ. (8), το οποίο αποσβύνεται εκθετικά με το βάθος, δες και Σχήμα 5.4.



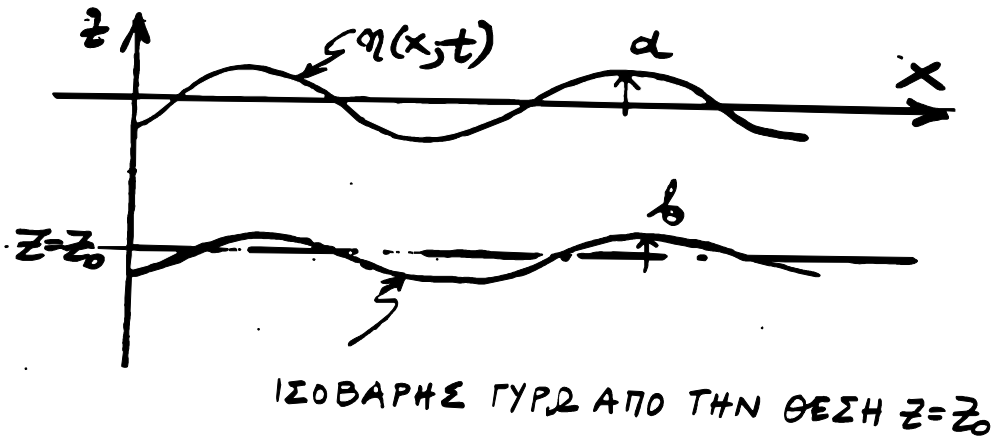
Σχήμα 5.1 Τροχιές των στοιχείων του ρευστού επιφανειακού κύματος (απουσία ρεύματος).



Σχήμα 5.2 Τροχιές των στοιχείων - επαλληλία κύματος - ρεύματος.



Σχήμα 5.3 Γραμμές ροής του επιφανειακού κύματος
(Απουσία ρεύματος $U_0 = 0$).



Σχήμα 5.4 Πίεση (ισοβαρείς) στο κύματικό πεδίο ροής.

6. Πυκνότητα ενέργειας και ροή ενέργειας κύματος

Υπενθυμίζεται ότι το εξεταζόμενο πρόβλημα είναι διδιάστατο. Με αυτό εννοούμε ότι οι λύσεις που κατασκευάσαμε εξαρτώνται μόνο από δύο χωρικές συντεταγμένες x και z , υποθέτοντας στην (τριδιάστατη) πραγματικότητα ότι

$$\phi(x, y, z; t) = \phi(x, z; t) \quad \forall y \in (-\infty, \infty).$$

Η ολική ενέργεια κύματος μέσα σε ένα μήκος κύματος και ανά μονάδα εγκάρσιου βάθους πεδίου, δηλαδή η ολική ενέργεια του ρευστού που περικλείεται, στο χωρίο $0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1, -h \leq z \leq \eta(x; t)$ αποτελείται από το άθροισμα της κινητικής E_K και της δυναμικής E_A ενέργειας του ρευστού, οι οποίες δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_A = \int_{z=0}^{\eta(x;t)} \int_{x=0}^{\lambda} \rho g z dx dz, \quad (1)$$

$$E_K = \int_{z=-h}^{\eta(x;t)} \int_{x=0}^{\lambda} \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 dx dz \approx \int_{z=-h}^{z=0} \int_{x=0}^{x=\lambda} \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 dx dz. \quad (2)$$

όπου ελήφθη ως στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας η αδιατάρακτη επιφάνεια του ρευστού ($z = 0$), και όπου εθεωρήθη καλή προσέγγιση, στα πλαίσια της γραμμικοποιημένης θεωρίας που ακολουθούμε, ο καθ' ύψος περιορισμός της ολοκλήρωσης για την κινητική ενέργεια μέχρι την αδιατάρακτη επιφάνεια του ρευστού. Επομένως για την δυναμική ενέργεια έχουμε με χρήση της Εξ. (16), Εδάφ. 2,

$$E_A = \int_{x=0}^{x=\lambda} \frac{1}{2} \rho g [\eta(x;t)]^2 dx = \frac{1}{2} \rho g a^2 \int_{x=0}^{x=\lambda} \sin^2(kx \pm \omega t) dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda. \quad (3)$$

Για τον υπολογισμό της E_K ανά μονάδα εγκάρσιου βάθους πεδίου ($0 \leq y \leq 1$) και σε ένα μήκος κύματος υπολογίζουμε με χρήση της Εξ. (16), Εδάφ. 2,

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi)^2 &= U_o^2 + (\alpha k)^2 \left(\frac{g + \tilde{\tau} k^2}{\omega \pm U_o k} \right)^2 \frac{\cosh[2k(z+h)]}{[\cosh(kh)]^2} + \\ &+ 2U_o a k \frac{g + \tilde{\tau} k^2}{\omega \pm U_o k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx \pm \omega t). \end{aligned}$$

Ετσι, προκύπτει από την εξ. (3),

$$E_K = \frac{1}{2} \rho U_o h \lambda + \frac{1}{4} \rho (a k)^2 \left(\frac{g + \tilde{\tau} k^2}{\omega \pm U_o k} \right)^2 \frac{2\pi}{k^2} \frac{\sinh(2kh)}{[\cosh(kh)]^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \rho U_o h \lambda + \frac{1}{2} \pi \rho a^2 \left(\frac{g + \tilde{\tau} k}{\omega \pm U_o k} \right)^2 \tanh(kh). \quad (4)$$

Στην περίπτωση επιφανειακών κυμάτων βαρύτητας (αμελητέα επίδραση επιφανειακής τάσεως, $\tilde{\tau} = 0$, και απουσία ρεύματος, $U_o = 0$) η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως ακολούθως,

$$E_K = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda, \quad (5)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και η σχέση διασποράς $\omega^2 = kg \tanh(kh)$, όπως ισχύει στην περίπτωση αυτή. Επομένως, η συνολική ενέργεια μέσα σε ένα μήκος κύματος είναι,

$$E = E_A + E_K = \frac{1}{2} \rho g a^2 \lambda, \quad (6)$$

ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια την ροή ενέργειας στην μονάδα του χρόνου που διέρχεται από μια αυθαίρετη κατακόρυφη διατομή $x = x_o$ του κυματικού πεδίου ροής, Σχήμα 6.1. Προφανώς η ροή ενέργειας ισούται με τον ρυθμό εκελέσεως έργου στην διατομή $x = x_o$, ο οποίος παρέχεται από την σχέση ,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{z=-h}^{\eta(x_o;t)} p(x_o, z; t) \Phi_{,x} dz. \quad (7)$$

Ενδιαφερόμαστε για τον μέσο ρυθμό εκτελέσεως έργου στην διατομή $x = x_o$, που ισούται με την χρονικά μέση (εντός μιας περιόδου $T = \frac{2\pi}{\omega}$) ροή της κυματικής ενέργειας από την διατομή αυτή. Υποθέτουμε χάριν ευκολίας την απουσία ρεύματος ($U_o = 0$), αμελητέα επίδραση επιφανειακής τάσεως ($\tilde{\tau} = 0$) και παραλείποντας τα τετράγωνα των ταχυτήτων στην έκφραση της πίεσης (εξ. Bernoulli), κάτι που ευρίσκεται στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας που ακολουθούμε, λαμβάνουμε από την εξ. (7),

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t)}{\partial t} &= \int_{z=-h}^{z=\eta(x_o;t)} p(x_o, z; t) \phi_{,x}(x_o, z; t) dz \approx \int_{z=-h}^{z=0} -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_{,x} dz = \\ &= \frac{\rho k g^2 a^2}{\omega} \frac{\sin^2(kx - \omega t)}{\cosh^2(kh)} \int_{z=-h}^{z=0} \cosh^2[k(z+h)] dz = \\ &= \frac{\rho k g^2 a^2}{\omega} \frac{\sin^2(kx - \omega t)}{\cosh^2(kh)} \int_{z=-h}^{z=0} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh[2k(z+h)] \right\} dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho k g^2 a^2}{\omega} \frac{\sin^2(kx - \omega t)}{\cosh^2(kh)} \left[\frac{h}{2} + \frac{1}{4k} \sinh(2kh) \right] = \\
&= \frac{\rho k g^2 a^2}{\omega} \sin^2(kx - \omega t) \left[\frac{h}{2 \cosh^2(kh)} + \frac{1}{2k} \tanh(kh) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \rho g^2 a^2 \frac{1}{c} \sin^2(kx - \omega t) \left[\frac{\tanh(kh)}{k} + \frac{h}{\cosh^2(kh)} \right]. \tag{8}
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, ο μέσος ρυθμός εκτελέσεως έργου στην αυθαίρετη διατομή $x = x_0$ που ισούται με την μέση χρονικά ροή ενέργειας κύματος, θα δίνεται από την σχέση,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_r &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{\partial W(t)}{\partial t} dt = \\
&= \frac{1}{2} \rho g^2 a^2 \frac{1}{c} \left[\frac{\tanh(kh)}{k} + \frac{h}{\cosh^2(kh)} \right] \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \sin^2(kx - \omega t) dt \Rightarrow \\
\Rightarrow \bar{W}_r &= \frac{1}{4} \rho g^2 a^2 \frac{1}{c} \left[\frac{\tanh(kh)}{k} + \frac{h}{\cosh^2(kh)} \right] \tag{9}
\end{aligned}$$

όπου $T = \frac{2\pi}{\omega}$, η περίοδος κύματος.

Αντικαθιστώντας στην εξ. (9) την σχέση διασποράς $\omega^2 = kg \tanh(kh)$, όπως ισχύει στην περίπτωση αρμονικών κυματισμών βαρύτητας, απουσία ρεύματος ($U_0 = 0$), προκύπτει τελικά,

$$\bar{W}_r = \frac{1}{4} \rho g a^2 c \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]. \tag{10}$$

Στην περίπτωση αυτή, κάνοντας χρήση και της σχέσεως (6), παίρνουμε για τον λόγο μέσου ρυθμού ροής της κυματικής ενέργειας προς την μέση ενέργεια εντός ενός μήκους κύματος:

$$\frac{\bar{W}_r}{E/\lambda} = \frac{1}{2} c \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right]. \tag{11}$$

7. Υπέρθεση κυμάτων. Κυματοομάδα. Ταχύτητα ομάδας

Η έννοια της φασικής ταχύτητας κύματος, που εισήχθη στο Εδάφιο 3, εξ. (4), αφορά την περίπτωση που η κυματική διαταραχή έχει καταλάβει ολόκληρο τον εξεταζόμενο χώρο, και κατά συνέπεια το εξεταζόμενο φαινόμενο παρουσιάζει χώρο-χρονική περιοδικότητα παντού στο χωρίο A ή A_a , αντιστοίχως. Εξ' άλλου, αυτή υπήρξε και η βασική υπόθεση για την διατύπωση του χρονικά αρμονικού προβλήματος. Παρατηρώντας την μορφή της λύσεως Εξ.

(16) και (17), Εδάφ. 2, συνάγουμε ότι οι ισοφασικές επιφάνειες του δυναμικού διαταραχής καθώς και οι ισοφασικές καμπύλες της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου $kx \pm \omega t = \text{const}$, κινούνται προοδευτικά με ταχύτητα:

$$c = \mp \frac{\omega}{k} \quad (1)$$

Η λύση του εξεταζόμενου προβλήματος που κατασκευάστηκε στα προηγούμενα αφορά την περίπτωση ενός απλού, μονοχρωματικού κύματος (που χαρακτηρίζεται από μία κυκλική συχνότητα ω και από ένα κυματαριθμό k) το οποίο προοδεύει προς τα θετικά ή τα αρνητικά του άξονα x . Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας, όπου κινούμεθα, η γραμμική υπέρθεση (επαλληλία) περισσότερων της μιας απλών αρμονικών συνιστωσών, είναι επιτρεπτή (δηλαδή δεν έρχεται σε αντίθεση ούτε με την πεδιακή εξίσωση Laplace ούτε με κάποια από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος). Συνεπώς, μια πρώτη δυνατή γενίκευση της θεωρίας μας είναι η θεώρηση συστημάτων πολυχρωματικών κυματισμών τα οποία προκύπτουν με την υπέρθεση απλών αρμονικών συνιστωσών διαφόρων συχνοτήτων και κυματαριθμών, και διαφόρων πλατών,

$$\eta(x; t) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(k_n x \pm \omega_n t) \quad (2)$$

και αντίστοιχη σχέση για το δυναμικό $\phi(x, z; t)$. Καθώς ο αριθμός των διακριτών συνιστωσών (N) του ανωτέρω συστήματος κυματισμών τείνει στο άπειρο, και ταυτόχρονα η διαφορά μεταξύ των συχνοτήτων $\delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1}$ γειτονικών συνιστωσών καθίσταται μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε στην θέση του αθροίσματος της παραπάνω σχέσης ένα ολοκλήρωμα επάνω σε ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων, $\omega \in (0, \infty)$, ή κυματαριθμών $k \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \eta(x; t) &= \int_{\omega=0}^{\infty} a(\omega) \sin(k(\omega)x \pm \omega t) d\omega = \\ &= \int_{k=0}^{\infty} a(k) \sin(kx \pm \omega(k)t) dk, \end{aligned} \quad (3)$$

και αντίστοιχη σχέση για το δυναμικό $\phi(x, z; t)$. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε, με την βοήθεια και της σχέσεως διασποράς, Εξ. (3), Εδάφ. 3, ότι εφ' όσον οι επιμέρους συνιστώσες ενός τέτοιου συστήματος κυματισμών προοδεύουν με διαφορετικές φασικές ταχύτητες, το σύστημα κυματισμών, Εξ. (2) ή (3), θα αλλάζει διαρκώς μορφή, καθώς προοδεύει ως ενότητα. Παρ' όλα αυτά, εαν θεωρήσουμε, ιδεατά, μια μικρή ομάδα απλών αρμονικών συνιστωσών με παραπλήσια χαρακτηριστικά, δηλαδή συχνότητες στην στενή λωρίδα: $\omega_o - \delta\omega < \omega < \omega_o + \delta\omega \Rightarrow k_o - \delta k < k < k_o + \delta k$, ίδια κατεύθυνση διάδοσης και παραπλήσια πλάτη $a_o - \delta a < a < a_o + \delta a$,

$$\delta\eta_o(x; t) = \int_{k=k_o-\delta k}^{k_o+\delta k} a(k) \sin(kx \pm \omega(k)t) dk, \quad (4)$$

τότε μπορούμε να συνάγουμε ως χαρακτηριστικό γνώρισμα για την θεωρούμενη μορφή, ότι προοδεύει ως ομάδα, με χαρακτηριστική ταχύτητα ομάδας c_g . Αναπτύσσοντας κατά Taylor την σχέση διασποράς γύρω από την μέση συχνότητα της ομάδας $\omega = \omega_o = \omega(k_o)$, έχουμε, παραλείποντας όρους ανώτερης τάξης,

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \omega_o + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o} \cdot (k - k_o) \Rightarrow \\ \Rightarrow kx \pm \omega(k)t &= kx \pm \left(\omega_o + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_o} \cdot (k - k_o) \right) t \Rightarrow \\ \Rightarrow kx \pm \omega(k)t &= k_o x \pm \omega_o t + (k - k_o) \left(x \pm \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k} \cdot t \right).\end{aligned}$$

Ορίζοντας, ως ακολούθως, τις συνιστώσες του μέσου πλάτους ομάδος,

$$\delta\eta_o^{(1)}(x;t) = \int_{k=k_o-\delta k}^{k_o+\delta k} a(k) \sin \left[(k - k_o) \left(x \pm \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k} \cdot t \right) \right] dk, \quad (5)$$

$$\delta\eta_o^{(2)}(x;t) = \int_{k=k_o-\delta k}^{k_o+\delta k} a(k) \cos \left[(k - k_o) \left(x \pm \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k} \cdot t \right) \right] dk, \quad (6)$$

προκύπτει από την Εξ. (4),

$$\delta\eta_o(x;t) = \delta\eta_o^{(1)}(x;t) \cos(k_o \pm \omega_o t) + \delta\eta_o^{(2)}(x;t) \sin(k_o \pm \omega_o t). \quad (7)$$

Επομένως, έχουμε έναν κυματικό σχηματισμό (κυματοπακέτο) του οποίου το πλάτος στον χώρο-χρόνο διαμορφώνεται όπως υπαγορεύουν οι ανωτέρω σχέσεις (5) και (6), βλ. Σχήμα 7.1. Οι καμπύλες (για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας) ή επιφάνειες (για το δυναμικό) που περιβάλλουν την ομάδα μετακινούνται με ταχύτητα η οποία προσδιορίζεται επίσης από τις ανωτέρω σχέσεις με την απαίτηση,

$$x \pm \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{k=k_o} \cdot t = \text{const} \Rightarrow c_g = \left(\frac{dx}{dt} \right) = \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{k=k_o},$$

από όπου προκύπτει ότι το κυματοπακέτο προοδεύει με την **ταχύτητα ομάδας**

$$c_g = \left[\frac{d\omega}{dk} \right]_{k=k_o}. \quad (8)$$

Από την σχέση διασποράς $\omega = \sqrt{kg \tanh(kh)}$ στην περίπτωση απουσίας ρεύματος, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{1}{2\sqrt{k_g \tanh(kh)}} \left[g \tanh(kh) + k_g \frac{h}{\cos^2 h(kh)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sqrt{k_g \tanh(kh)}} \cdot c \cdot \left[1 + \frac{2kh}{\sin(2kh)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Επομένως, για νερό ενδιάμεσου βάθους, προκύπτει τελικώς για την ταχύτητα ομάδας,

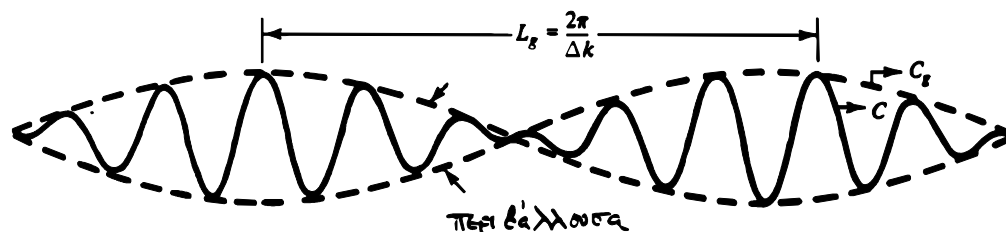
$$c_g = \frac{1}{2} c \left[1 + \frac{2kh}{\sin(2kh)} \right], \quad (10)$$

όπου $c = \frac{\omega}{k}$ η φασική ταχύτητα επιφανειακών κυματισμών.

Επιπροσθέτως, με βάση την τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε από την Εξ. (11) του προηγούμενου εδαφίου για το λόγο μέσου ρυθμού ροής της κυματικής ενέργειας ως προς την μέση ενέργεια εντός ενός μήκους κύματος:

$$\frac{\bar{W}_r}{E/\lambda} = c_g \quad (11)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ενέργεια κυματισμού βαρύτητας μεταφέρεται με την ταχύτητα ομάδας.



Σχήμα 7.1

Βασική Βιβλιογραφία

στα θέματα :

Υδάτινα κύματα (water waves),
 Υδροδυναμική ελεύθερης επιφάνειας (free-surface hydrodynamics),
 Θαλάσσιοι κυματισμοί (sea surface waves / wind waves).

1. LAMB, Sir H., "Hydrodynamics", 6η έκδοση, Cambridge University Press, 1932. Ένα από τα περισσότερο διαβασμένα βιβλία κλασσικής υδροδυναμικής. Από το 1932 και ύστερα, μετά το θάνατο του H. Lamb, έχει ανατυπωθεί και επανεκδοθεί πολλές φορές. Κυκλοφορεί και σήμερα τόσο από την Cambridge University Press (ακριβή έκδοση), όσο και από την Dover (φθηνή έκδοση). Το Κεφάλαιο 9 αυτού του βιβλίου, έκτασης 110 σελίδων, αναφέρεται σε επιφανειακούς κυματισμούς, και το Κεφάλαιο 6, έκτασης 40 σελίδων, αναφέρεται στην κίνηση στερεού σώματος μέσα σε απέρατο ρευστό.
2. STOKER, J.J., "Water Waves, The Mathematical Theory with Applications", Interscience Publ., London, 1957.
 Κλασσική μονογραφία η οποία καλύπτει πολλά θέματα επιφανειακών κυματισμών και αλληλεπίδρασης αυτών με επιπλέοντα σώματα. Πολύ χρήσιμο βιβλίο, γραμμένο σε ψηλό μαθηματικό επίπεδο αλλά κατανοητό και σε μεγάλο βαθμό αυτοδύναμο, δεδομένου ότι αναπτύσει τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιεί.
3. WEHAUSEN, J.V., & LAITONE, E.V., "Surface waves", άρθρο στην Encyclopedia of Physics, Τόμος 9/III, Edited by S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Το άρθρο αυτό, έκτασης 330 περίπου σελίδων (!!) αποτελεί μια πλήρη (έως το 1960) επισκόπηση ολόκληρης της σχετικής βιβλιογραφίας (Δυτικής και Ρωσικής), με εκτενή παρουσίαση ενός πολύ μεγάλου πλήθους αποτελεσμάτων. Τα περισσότερα αποτελέσματα παρατίθενται και σχολιάζονται, αλλά δεν παρουσιάζεται αναλυτική παραγωγή τους. Καλύπτει όλα σχεδόν τα θέματα υδατίνων κυμάτων και αλληλεπιδράσεών τους με στερεά σώματα. Δύσκολα συναντά κανείς, μέχρι σήμερα, συναφείς ερευνητικές δημοσιεύσεις ή βιβλία τα οποία να μην παραπέμπουν στο άρθρο αυτό.

Τα τρία ανωτέρω έργα αποτελούν τις κλασσικές παραπομπές (πηγές) της Δυτικής βιβλιογραφίας σε θέματα υδατίνων κυμάτων.

4. KOCHIN, N.E., KIBEL, I.A. & ROZE, N.V., “Theoretical Hydromechanics”, Interscience Publ., London, 1964 (Μετάφραση από την 5η Ρωσική έκδοση του 1955). Πολύ καλό βιβλίο αφιερωμένο αποκλειστικά στη μελέτη του ιδεατού (μη συνεκτικού) υγρού. Τα κεντρικά θέματα του βιβλίου αυτού είναι η γενική κίνηση στερεού σώματος μέσα σε ρευστό, και τα υδάτινα κύματα. Ένα από τα κλασσικά σχετικά βιβλία της Ρωσικής βιβλιογραφίας.
5. FEDIAEVSKI C., VOITKOUNSKI, I. & FADDEEV, Y., “Mecanique des Fluides”, Editions MIR, Moscou, 1974.
Καλογραμμένο διδακτικό βιβλίο, με έμφαση σε θέματα ναυτικής υδροδυναμικής. Περιέχει εκτεταμένα κεφάλαια για την κίνηση στερεού σώματος σε απέρατο, ασυμπιεστο, μη-συνεκτικό υγρό, και για επιφανειακά κύματα. Επίσης αναφέρεται σε αρκετή έκταση σε προβλήματα αλληλεπίδρασης στερεού σώματος και ελεύθερης επιφάνειας. Η ανάπτυξη ακολουθεί τους κλασσικούς ρευστομηχανικούς της ρωσικής σχολής.
6. Le MEHAUTE, B., “An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves”, Springer-Verlag, New York, 1976.
Χρήσιμο βιβλίο με εκτενή παρουσίαση των βασικών των υδατίνων κυμάτων.
7. NEWMAN, J.N., “Marine Hydrodynamics”, MIT Press, Cambridge Mass., 1977.
8. MEI, C.C., “The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves”, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience Publications, New York, 1983.
Πολύ αξιόλογο βιβλίο, το οποίο καλύπτει πολλά θέματα υδατίνων κυματισμών. Αναφέρεται εκτενώς σε θέματα αλληλεπίδρασης κυμάτων με σώματα και ρεύματα, και αναπτύσει διεξοδικά διάφορες χρήσιμες προσεγγιστικές (κυρίως ασυμπτωτικές) θεωρίες επίλυσης των σχετικών προβλημάτων.
9. CRAPPER, G.D., “Introduction to Water Waves”, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984.
Πολύ καλό βιβλίο, το οποίο αναπτύσσει τη βασική θεωρία των υδατίνων επιφανειακών κυμάτων με τρόπο σαφή και εύληπτο. Χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι η διαρκής προσπάθεια να παρουσιάζεται και να σχολιάζεται η φυσική σημασία των μαθηματικών αποτελεσμάτων.
10. RAHMAN, H., “The Hydrodynamics of Waves and Tides, with Applications”, Computational Mechanics Publ., Southampton U.K., 1988.

Χρήσιμη εξειδικευμένη μονογραφία, η οποία διαβάζεται αρκετά εύκολα και η οποία μπορεί να αποτελέσει μιά γρήγορη εισαγωγή στα υδάτινα κύματα και σε διάφορες εφαρμογές τους.

11. MASSEL, S.R., “Hydrodynamics of Coastal Zones”, Elsevier Oceanography Sciences, Volume 48, Elsevier, 1989.

Βιβλίο εξαιρετικού ενδιαφέροντος, το οποίο καλύπτει πολλά θέματα υδάτινων κυματισμών. Παρουσιάζει, σε καλό επίπεδο, τη μαθηματική μοντελοποίηση των κυματικών φαινομένων στις παράκτιες περιοχές. Επίσης, αναφέρεται εκτενώς σε θέματα αλληλεπίδρασης κυμάτων με σώματα και ρεύματα, και αναπτύσει διεξοδικά διάφορες θεωρίες επίλυσης των σχετικών προβλημάτων σε βαθύ και ρηχό νερό, καθώς και σε νερό ενδιαμέσου βάθους.

12. DEAN, R.G., DALRYMPLE, R.A., “Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists”, Advanced Series on Ocean Engineering, Volume 2, World Scientific, 1991.

Αξιόλογο βιβλίο το οποίο καλύπτει, σε εισαγωγικό επίπεδο, τα κυριότερα θέματα υδάτινων κυματισμών. Παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι επίλυσης των σχετικών προβλημάτων με έμφαση σε εφαρμογές της παράκτιας μηχανικής.

Στα ακόλουθα βιβλία τα θαλάσσια κύματα (επιφανειακά, εσωτερικά κ.λπ.) μελετώνται κυρίως από τη σκοπιά της ωκεανογραφίας. Δηλαδή μελετώνται οι μηχανισμοί δημιουργίας αυτών και γίνεται προσπάθεια να μοντελοποιηθούν μαθηματικά, τα πραγματικά φαινόμενα που παρατηρούνται στη θάλασσα (ακανόνιστοι κυματισμοί, θραύση κυματισμών, διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις, παλίρροιες, ρεύματα, κ.λπ.). Ως είναι αναμενόμενο, τα μαθηματικά προαπαιτούμενα για τη μελέτη τέτοιων βιβλίων είναι περισσότερα, συμπεριλαμβανομένων και της θεωρίας των τυχαίων μεταβλητών και των τυχαίων συναρτήσεων (στοχαστικών διαδικασιών). (Με τέτοια θέματα θα ασχοληθούμε στα πλαίσια του μαθήματος “Υδροδυναμική και Δυναμική Θαλασσιών Συστημάτων”, στο 8^ο εξάμηνο).

13. KINSMAN, B., “Wind Waves: Their generation and Propagation Over the Ocean Surface”, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1965.

14. PHILLIPS, O.M., “The Dynamics of The Upper Ocean”, Cambridge Univ. Press, 1977.

15. LeBLOND, P.H. & MYSAK, L.A., “Waves In the Ocean”, Elsevier, Amsterdam, 1978.

16. KOMEN, G.J., CAVALERI, L., DONELAN, M., HASSELMAN, S., JANSSEN, P.A.E.M., “Dynamics and Modelling of Ocean Waves”, Cambridge University Press, 1994.

17. MASSEL, S.R., “Ocean Surface Waves. Their Physics and Prediction”, Advanced Series on Ocean Engineering, Volume 11, World Scientific, 1996.

Πολύ αξιόλογο πρόσφατο βιβλίο, το οποίο καλύπτει διεξοδικά θέματα θαλασσιών κυματισμών, με έμφαση στην στοχαστική μοντελοποίηση και πρόβλεψη, στο βαθύ νερό και στο ρηχό νερό.

Γενική βιβλιογραφία Μηχανικής Ρευστών

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένα συγγράμματα Μηχανικής Ρευστών, τα οποία αναφέρονται και σε θέματα Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής.

- MP.1. LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M., “Fluid Mechanics”, (Volume 6 of “Course of Theoretical Physics”), Pergamon Press, Oxford, 1959.
- MP.2. SEDOV, L.I., “Similarity and Dimensional Methods in Mechanics”, Academic Press, New York, 1959.
- MP.3. TRUSDELL, C., & TOUPIN, R.A., “The Classical Field Theories”, Αρθρο (650 σελ.) στον τόμο III/1 της Encyclopedia of Physics, Springer-Verlag, Berlin 1960.
- MP.4. BATCHELOR, G.K., “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- MP.5. MILNE-THOMSON, L.M., “Theoretical Hydrodynamics”, MacMillan, London 1968 (5η έκδοση).
- MP.6. SEDOV, L., “Mecanique des Milieux Continus”, Tome I & II, Editions MIR, Moscou, 1975.
- MP.7. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ, Ν.Α., “Μηχανική Ρευστών”, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα, 1989.

Βασική βιβλιογραφία μαθηματικού υποβάθρου

(Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός βαθμωτών και διανυσματικών πεδίων)

- MY.1. BUDAK, B.M. & FOMIN, S.V., “Multiple integrals, field theory and series”, MIR Publishers, Moscou, 1973.
- MY.2. MARSDEN, J.E. & TROMBA, A.J., “Vector Calculus”, W.H. Freeman and Company. Υπάρχει Ελληνική μετάφραση με τίτλο “Διανυσματικός Λογισμός”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1992.
- MY.3. ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ, Γ.Ν., “Μαθηματική Ανάλυση”, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, 1994.

Ερωτήσεις Κεφαλαίου 5

Ερώτηση 1: Πώς μεταβάλλεται η συχνότητα ω αρμονικού κυματισμού που διαδίδεται προς την ακτή, καθώς το βάθος του νερού ελαττώνεται; (Να υποθέσετε ότι ισχύει η γραμμική θεωρία).

Ερώτηση 2: Πώς συνδέονται τα μεγέθη: συχνότητα f , κυκλική συχνότητα ω , περίοδος T , μήκος κύματος λ , κυματικός αριθμός k , στην περίπτωση απλού αρμονικού κυματισμού που διαδίδεται σε νερό σταθερού βάθους h ; Πόσα από τα ανωτέρω πέντε μεγέθη μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους;

Ερώτηση 3: Κάτω από ποιές προϋποθέσεις επιτυγχάνεται η γραμμικοποίηση του προβλήματος αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος; Να αναφέρετε μερικές περιπτώσεις στις οποίες η λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος αναμένεται να μην προσομοιάζει ικανοποιητικά τη φυσική πραγματικότητα.

Ερώτηση 4: Τι γνωρίζετε για τις τροχιές των στοιχείων υγρού με ελεύθερη επιφάνεια, στο οποίο διαδίδονται επιφανειακοί κυματισμοί; Να αναφερθείτε ξεχωριστά στις περιπτώσεις: α) βαθύ νερό, β) ρηχό νερό, και i) μόνο κύμα, ii) κύμα-ρεύμα.

Ερώτηση 5: Ως γνωστόν, η συνάρτηση

$$\phi(x, z; \omega) = A_{\pm} \exp(\pm jkx) \cosh[k(z+h)] \quad (1)$$

εκφράζει τον παραστατικό μιγάδα του δυναμικού ταχύτητας αρμονικού κυματισμού μικρού πλάτους, που διαδίδεται σε νερό σταθερού βάθους h .

- Να γράψετε την αναλυτική μορφή του δυναμικού $\phi(x, z; t)$ και της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας $\eta(x, z; t)$ στο πεδίο του χρόνου, οι οποίες αντιστοιχούν στην (1). Ποιά είναι η φυσική σημασία του διπλού προσήμου (\pm) που εμφανίζεται στον όρο $\exp(\pm jkx)$;
- Πώς ονομάζεται και τί εκφράζει η σταθερά k που εμφανίζεται στη σχέση (1);
- Πως υπολογίζεται η σταθερά k ; Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει, αν η κυκλική συχνότητα ω του κυματισμού είναι δεδομένη;

Ερώτηση 6: Έστω ότι το πλάτος αρμονικού προοδευτικού κυματισμού που διαδίδεται σε βαθύ νερό είναι a . Πόσο είναι το αντίστοιχο πλάτος κίνησης των στοιχείων του υγρού σε βάθος $\lambda/4$, $\lambda/2$ και λ , όπου λ είναι το μήκος κύματος; Τί συμπεραίνετε από τα ανωτέρω αποτελέσματα για την επίδραση του πυθμένα στους κυματισμούς, όταν το βάθος h είναι μεγαλύτερο του $\lambda/2$;

Ερώτηση 7: Στην περίπτωση αρμονικών κυματισμών βαρύτητας υπό την παρουσία ρεύματος, η σχέση διασποράς οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση για τη φασική ταχύτητα του κύματος:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \pm U_0.$$

- α) Πως απλοποιείται η ανωτέρω σχέση στις περιπτώσεις νερού μεγάλου βάθους ($kh \gg 1$), και νερού μικρού βάθους (ρηχού νερού, $kh \ll 1$);
- β) Να εντοπίσετε τις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος όπου η εξίσωση διασποράς μπορεί να μην έχει λύση. Πως ερμηνεύετε φυσικά τις περιπτώσεις αυτές;

Ερώτηση 8: Υπενθυμίζεται ότι η γενική μορφή της σχέσεως διασποράς για την περίπτωση αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος, συμπεριλαμβανομένων και των επιδράσεων της επιφανειακής τάσεως έχει τη μορφή

$$\left[(kh) + \frac{\tilde{\tau}}{gh^2} (kh)^3 \right] \tanh(kh) = \left[\omega \sqrt{\frac{h}{g}} \pm \frac{U_0}{\sqrt{gh}} (kh) \right]^2, \quad (2)$$

όπου k είναι ο κυματαριθμός, $\tilde{\tau}$ είναι η παράμετρος επιφανειακής τάσεως, h είναι το βάθος του νερού, ω είναι η κυκλική συχνότητα κύματος, U_0 είναι η ταχύτητα του ρεύματος, και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

- α) Ποιά είναι η ερμηνεία του διπλού προσήμου (\pm) που εμφανίζεται στην ανωτέρω σχέση;
- β) Ποιές είναι οι αδιάστατες παράμετροι που αναπαριστούν τις επιδράσεις της επιφανειακής τάσεως, του ρεύματος, και των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας;
- γ) Πότε οι επιδράσεις επιφανειακής τάσεως κρίνονται αμελητέες;
- δ) Πότε οι επιδράσεις ρεύματος κρίνονται αμελητέες;

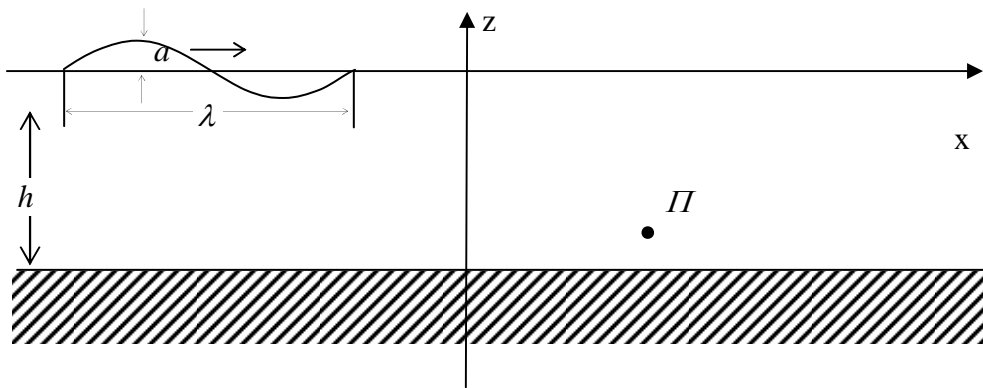
Ερώτηση 9:

- α) Ποιές είναι οι ουσιώδεις διαφορές μεταξύ κυμάτων με διασπορά και κυμάτων χωρίς διασπορά (υπερβολικών κυμάτων); Να περιγράψετε τόσο τις φυσικές όσο και τις μαθηματικές διαφορές.
- β) Να συνοψίσετε την απάντησή σας στο ανωτέρω ερώτημα σε έναν ορισμό του φαινομένου της διασποράς.
- γ) Να δώσετε δύο παραδείγματα κυμάτων χωρίς διασπορά και δύο παραδείγματα κυμάτων με διασπορά.

Ερώτηση 10: Πόσες και ποιές είναι οι διαφορετικές έννοιες ταχύτητας που υπεισέρχονται στο φαινόμενο της διάδοσης ενός κυματοπακέτου (συστήματος κυματισμών) στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού;

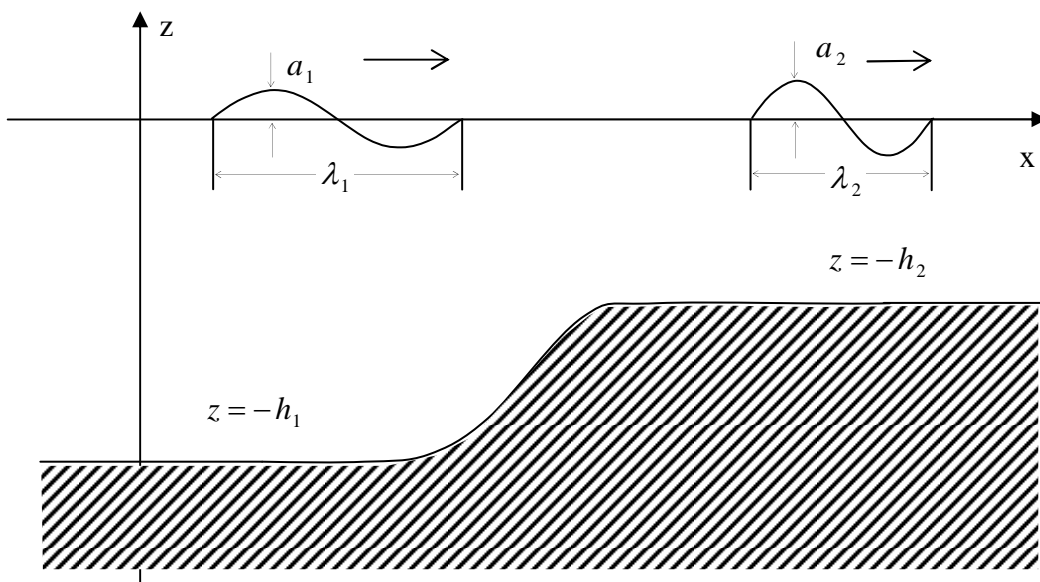
Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Ασκηση 1: Πιεσόμετρο τοποθετημένο στη θέση Π στον πυθμένα πειραματικής δεξαμενής (βλ. σχήμα), καταγράφει συνεχώς την πίεση $p(t)$, η οποία επάγεται από απλό προοδευτικό αρμονικό κυματισμό βαρύτητας. Θεωρώντας γνωστό το βάθος του νερού h , να περιγράψετε τη διαδικασία (και να δώσετε τις απαιτούμενες σχέσεις) μέσω της οποίας είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι βασικές παράμετροι του κυματικού πεδίου, δηλαδή, το πλάτος κύματος a , η συχνότητα ω , και το μήκος κύματος λ , από τη μέτρηση της πίεσης $p(t)$ στο σημείο Π . Να θεωρήσετε ότι ισχύει η γραμμική θεωρία.

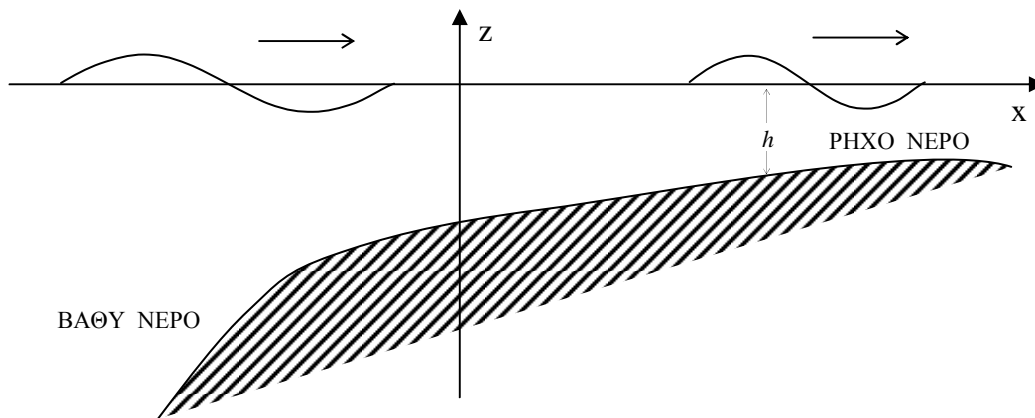


Άσκηση 2: Απλός αρμονικός κυματισμός βαρύτητας πλάτους a_1 και κυκλικής συχνότητας ω_1 διαδίδεται από νερό βάθους h_1 σε νερό βάθους $h_2 < h_1$ (βλ. σχήμα).

- α) Υποθέτοντας ότι η μεταβατική περιοχή είναι ερκετά ομαλή, ώστε να μη λαμβάνει χζώρα σημαντική ανάκλαση και να μην υπάρχουν απώλειες ενέργειας, να προσδιορίσετε το πλάτος a_2 του κυματισμού που διαδίδεται στην περιοχή βάθους h_2 , συναρτήσει των μεγεθών a_1 , h_1 και h_2 .
- β) Να λύσετε το προηγούμενο πρόβλημα στην περίπτωση όπου συνυπάρχει και ρεύμα με σταθερή ταχύτητα $U_1 > 0$ στην περιοχή βάθους h_1 (κατευθυνόμενο προς τη περιοχή μικρού βάθους h_2).



Άσκηση 3: Απλός αρμονικός κυματισμός βαρύτητας πλάτους $a = 1.0 \text{ m}$ και περιόδου $T = 10 \text{ s}$ μεταδίδεται από την περιοχή νερού μεγάλου βάθους ($x < 0$) προς την ακτή ($x > 0$), (βλ. σχήμα).



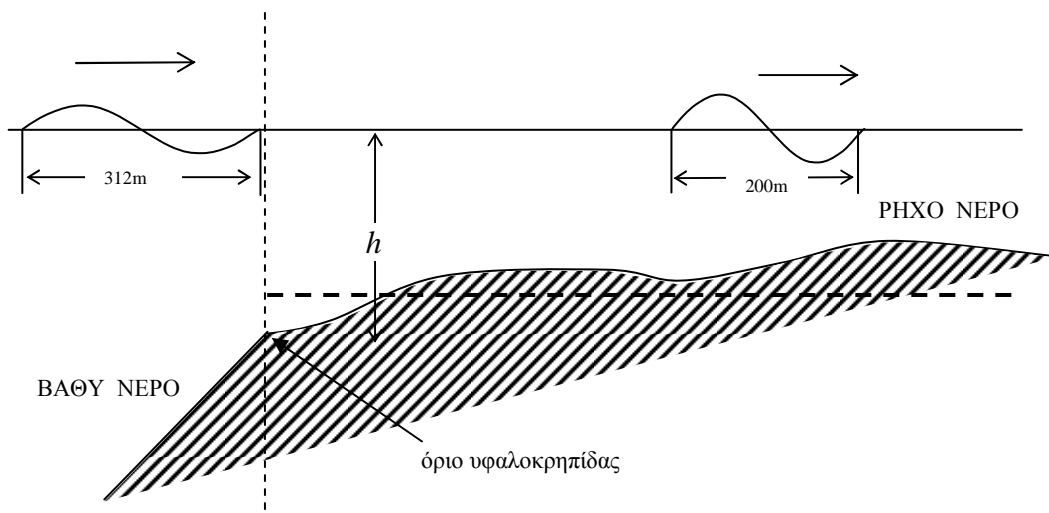
Από γεωλογική έρευνα στην παράκτια ζώνη της περιοχής έχει διαπιστωθεί ότι το υλικό του πυθμένα είναι λεπτόκοκκη άμμος με μέση διάμετρο κόκκου 0.5 mm , για το οποίο είναι γνωστό ότι τίθεται σε κίνηση όταν η χρονική μέση τιμή του μέτρου της ταχύτητας του ρευστού στον πυθμένα υπερβεί την τιμή 1.3 m/s . Να εκτιμήσετε το βάθος νερού h στο οποίο θα αρχίσει η διεργασία μεταφοράς ιζήματος (sediment transport).

Υποδείξεις: (i) Να θεωρήσετε ότι ο ρυθμός ελάττωσης του βάθους στην περιοχή είναι πολύ μικρός, ώστε να μπορούν να αμεληθούν τα φαινόμενα ανάκλασης του κυματισμού.

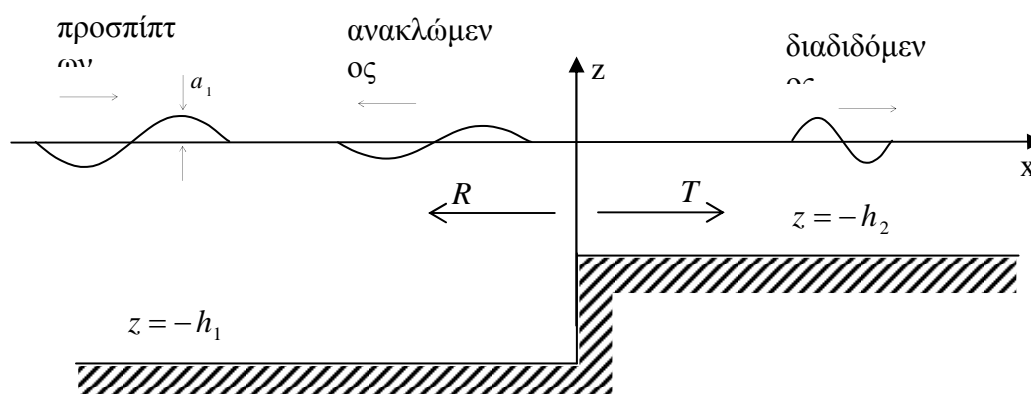
(ii) Να θεωρήσετε πολύ ρηχό νερό στην περιοχή $x > 0$, δηλαδή $kh < 1$ και επομένως $\sinh(kh) \approx \tanh(kh) \approx kh$ και $\cosh(kh) \approx 1$. Μπορείτε όμως να λύσετε το πρόβλημα και χωρίς αυτή την απλούστευση.

Άσκηση 4: Από μετρήσεις του κυματικού πεδίου με τη βοήθεια radar προκύπτει ότι το μήκος κύματος στο βαθύ νερό (μακριά από την ακτή) είναι 312 m , ενώ το μήκος κύματος μετά το όριο της υφαλοκρηπίδας (βλ. σχήμα) είναι 200 m .

Να δώσετε μια εκτίμηση του μέσου βάθους νερού h στη ρηχή περιοχή, μετά το όριο της υφαλοκρηπίδας. Να θεωρήσετε ότι στην εξεταζόμενη περιοχή δεν υπάρχουν ρεύματα, και ότι το βάθος στη ρηχή περιοχή είναι περίπου σταθερό.



Άσκηση 5: Απλός αρμονικός κυματισμός βαρύτητας κυκλικής συχνότητας ω , μεταδίδεται από περιοχή βάθους h_1 σε περιοχή βάθους $h_2 < h_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

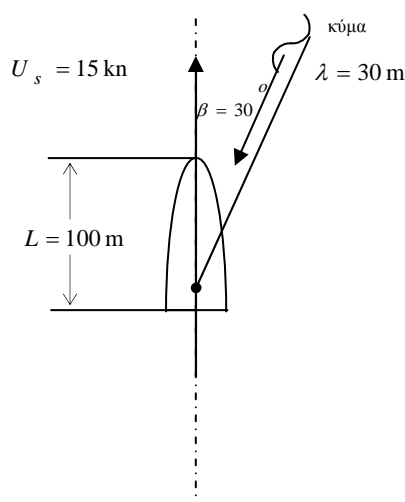


Εξ' αιτίας της απότομης μεταβολής του βάθους του νερού στην θέση $x = 0$, τμήμα (R) της συνολικής ροής της κυματικής ενέργειας ανακλάται προς τα πίσω και τμήμα (T) διαδίδεται προς τα δεξιά, στην περιοχή νερού μικρότερου βάθους ($x > 0$), όπως φαίνεται και στο σχήμα. Θεωρώντας γνωστό το πλάτος a_1 του προσπίπτοντος κυματισμού και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ακόλουθες φυσικές απαιτήσεις

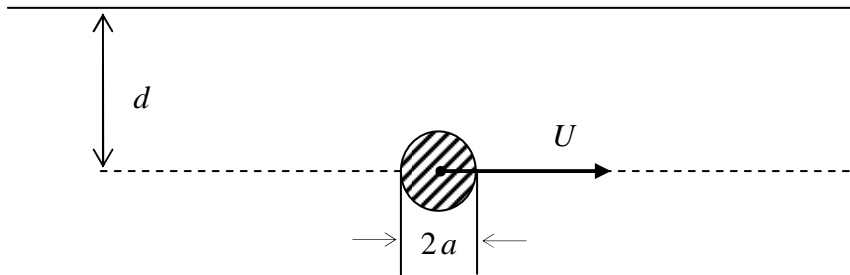
- i) Η μορφή ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας $z = \eta(x; t)$ είναι συνεχής στην θέση $x = 0$,
- ii) Η ροή της κυματικής ενέργειας (ισχύος) από κάθε κατακόρυφη τομή (πριν ή μετά την απότομη αλλαγή βάθους του νερού) διατηρείται σταθερή,

να προσδιορίσετε τη σχέση που παρέχει το πλάτος ανύψωσης του κυματισμού στην περιοχή του νερού μικρού βάθους ($x > 0$) συναρτήσει των χαρακτηριστικών του προσπίπτοντος κυματισμού.

Άσκηση 6: Πλοίο μήκους $L = 100\text{ m}$ ταξιδεύει με ταχύτητα 15 Knots ($1\text{ knot} \cong 0.51\text{ m/s}$) με κατεύθυνση προς Βορρά (N). Στην περιοχή επικρατούν κυματισμοί χαρακτηριστικού μήκους κύματος $\lambda = 30\text{ m}$, διαδιδόμενοι από Βορειοανατολικά (NE) προς Νοτιοδυτικά (SW). Οι κυματισμοί προσπίπτουν υπό γωνία $\beta = 30^\circ$ ως προς τη διεύθυνση κίνησης του πλοίου (βλ. σχήμα). Θεωρώντας το νερό βαθύ, να βρείτε τη συχνότητα των κυματισμών ω_w (θεωρώντας του αρμονικούς), και τη συχνότητα ταλάντωσης του πλοίου ω_s κατά τη διάρκεια της κίνησης του στην περιοχή. Είναι ίδιες ή διαφορετικές οι συχνότητες ω_w και ω_s ;



Άσκηση 7: Κύλινδρος ακτίνας a κινείται μέσα στο νερό μεγάλου βάθους με μεταφορική ταχύτητα U . Ο κύλινδρος κινείται παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια του νερού και το κέντρο απέχει από αυτήν την απόσταση d (βλ. σχήμα). Το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί διδιάστατο.



- α) Να περιγράψετε ποιοτικά, με τη βοήθεια ενός σκαριφήματος, τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.
- β) Να προσδιορίσετε το μήκος κύματος λ και τη διεύθυνση διάδοσης του δημιουργούμενου κυματισμού βαρύτητας.
- γ) Τί αναμένεται να συμβεί όταν η απόσταση d αυξάνεται;

Παραδείγματα – Λυμένες ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Παράδειγμα 1: Υπενθυμίζεται η γενική μορφή της σχέσεως διασποράς για την περίπτωση αλληλεπίδρασης κύματος-ρεύματος, παρουσία και των επιδράσεων της επιφανειακής τάσης:

$$\left[(kh) + \frac{\tilde{\tau}}{gh^2} (kh)^3 \right] \tanh(kh) = \left[\omega \sqrt{\frac{h}{g}} \pm \frac{U_0}{\sqrt{gh}} (kh) \right]^2 \tag{1}$$

- α) Ποιά είναι η ερμηνεία του διπλού προσήμου (\pm) που εμφανίζεται στην ανωτέρω σχέση;
- β) Πώς διαμορφώνεται η ανωτέρω σχέση όταν $h \rightarrow \infty$;
- γ) Με τη βοήθεια της σχέσεως διασποράς να προσδιορίσετε τη φασική ταχύτητα c συναρτήσει του μήκους κύματος λ , για νερό ενδιαμέσου βάθους και για βαθύ νερό.
- δ) Να προσδιορίσετε την ταχύτητα ομάδας. Ποιά είναι η φυσική σημασία αυτής;
- ε) Να εκτιμήσετε τη σχετική σημασία των διαφόρων όρων που εμφανίζονται στη σχέση (1) για σχετικώς μεγάλα κύματα σε ενδιαμέσο και μεγάλο βάθος νερού, (δηλαδή για τις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν περισσότερο σε εφαρμογές θαλάσσιας τεχνολογίας). Πώς απλοποιείται σ' αυτήν την περίπτωση η σχέση διασποράς; Δίδεται η τιμή του συντελεστή επιφανειακής τάσεως του νερού σε θερμοκρασία 25°C: $\tilde{\tau} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{sec}$.

Υπόδειξη: Για να εκτιμήσετε τη σχετική σημασία των διαφόρων όρων που εμφανίζονται στη σχέση (1) σε νερό ενδιαμέσου βάθους, μπορείτε να βρείτε πως διαμορφώνονται οι αριθμητικές τιμές των αδιάστατων συντελεστών $\xi = \tilde{\tau} / gh^2$, $\nu = \omega \sqrt{h/g}$, και $F = U_0 / \sqrt{gh}$ για ορισμένες ενδεικτικές τιμές των κυματικών παραμέτρων. Μπορείτε να λάβετε υπ' όψιν σας τα ακόλουθα σχόλια. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $h > 5 \text{ m}$, διότι για μικρότερο βάθος και σχετικώς μεγάλα κύματα καθίστανται έντονα διάφορα μη

γραμμικά φαινόμενα, τα οποία δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν στην παρούσα θεωρία. Η εκφραση "σχετικώς μεγάλα κύματα" βολεύει να ερμηνευθεί ως "κύματα με σχετικώς μεγάλη περίοδο", π.χ. $T > 2 \text{ sec}$ (γιατί;). Η ταχύτητα ρεύματος στη θάλασσα κυμαίνεται συνήθως από 0 έως 1m/sec. Αντιστοίχως μπορείτε να εργασθείτε για την περίπτωση νερού μεγάλου βάθους, ξεκινώντας από την κατάλληλη μορφή της σχέσεως διασποράς.

Λύση: α) Το πρόσημο (-) στην εξίσωση (1) ισχύει στην περίπτωση όπου ο κυματισμός διαδίδεται ομόρροπα προς το ρεύμα, ενώ το πρόσημο (+) στην αντίθετη περίπτωση.

β) Για να βρούμε πώς διαμορφώνεται η σχέση (1) όταν $h \rightarrow \infty$, διαιρούμε πρώτα και τα δύο μέλη με h , οπότε παίρνουμε

$$\left(k + \tilde{\tau} \frac{k^3}{g} \right) \cdot \tan(kh) = (\omega \pm U_0 k)^2 / g. \quad (1)$$

Ομως, όταν $h \rightarrow \infty$, τότε $\tan(kh) \rightarrow 1$, οπότε η ανωτέρω σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$(\omega \pm U_0 k)^2 = gk + \tilde{\tau} k^3, \quad \left(\begin{array}{l} + : \text{κύμα - ρεύμα αντίρροπα} \\ - : \text{κύμα - ρεύμα ομόρροπα} \end{array} \right) \quad (2)$$

γ) Η φασική ταχύτητα του κυματισμού δίδεται από τη σχέση $c = \omega / k$. Για νερό ενδιαμέσου βάθους η σχέση (1) μας δίνει

$$\omega = \sqrt{\left(kg + \tilde{\tau} k^3 \right) \tanh(kh)} \mp U_0 k, \quad \left(\begin{array}{l} - : \text{κύμα - ρεύμα αντίρροπα} \\ + : \text{κύμα - ρεύμα ομόρροπα} \end{array} \right). \quad (3)$$

Συνεπώς, η φασική ταχύτητα του κυματισμού θα είναι

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \tilde{\tau} k \right) \tanh(kh)} \mp U_0, \quad \left(\begin{array}{l} - : \text{κύμα - ρεύμα αντίρροπα} \\ + : \text{κύμα - ρεύμα ομόρροπα} \end{array} \right), \quad (4)$$

εκ της οποίας, αντικαθιστώντας τον κυματαριθμό k με $2\pi / \lambda$, βρίσκουμε

$$c(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \tilde{\tau} \frac{2\pi}{\lambda} \right) \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \mp U_0, \quad \left(\begin{array}{l} - : \text{κύμα - ρεύμα αντίρροπα} \\ + : \text{κύμα - ρεύμα ομόρροπα} \end{array} \right). \quad (5)$$

Για νερό μεγάλου βάθους ($h \rightarrow \infty$) έχουμε ότι $\tanh(2\pi h / \lambda) \rightarrow 1$, οπότε η σχέση (5) μας δίνει

$$c_\infty(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \tilde{\tau} \frac{2\pi}{\lambda}} \mp U_0, \quad \left(\begin{array}{l} - : \text{κύμα - ρεύμα αντίρροπα} \\ + : \text{κύμα - ρεύμα ομόρροπα} \end{array} \right) \quad (6)$$

Στην ίδια σχέση καταλήγουμε και αν ξεκινήσουμε από τη σχέση διασποράς του βαθού νερού (2).

ε) Βρήκαμε από την απάντηση του ερωτήματος γ) την συνθήκη

$$\left(\frac{g}{k} + \tilde{\tau}k\right) \tanh(kh) < U_0^2$$

Υποθέτοντας ότι το νερό είναι βαθύ (υπόθεση που θα ελεγχθεί εκ των υστέρων), θέτουμε $\tanh(kh) \approx 1$. Τότε η ανωτέρω ανισότητα γίνεται

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{k} + \tilde{\tau}k\right) < U_0^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{kh} + \tilde{\tau} \frac{kh}{h^2}\right) < \frac{U_0^2}{gh} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{kh} + \frac{\tilde{\tau}(kh)}{gh^2} < \frac{U_0^2}{gh} \equiv F^2 \Leftrightarrow 1 + T \cdot (kh)^2 < F^2 \cdot (kh), \end{aligned}$$

όπου, για βάθος $h = 10m$, οι αδιάστατες ποσότητες F (αριθμός Froude) και T έχουν τις τιμές:

$$F = \frac{U_0}{\sqrt{gh}} = 0.1 \quad \text{και} \quad T = \frac{\tilde{\tau}}{gh^2} = \frac{7 \cdot 10^{-5}}{100 \cdot 9.81} = 7 \cdot 10^{-8}.$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται τελικά στη μορφή

$$T \cdot (kh)^2 - F^2 \cdot (kh) + 10 < 0,$$

από την οποία προκύπτει ότι η ποσότητα (kh) πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των ριζών του αντίστοιχου τριωνύμου:

$$(kh)_{1,2} = \frac{F^2 \pm \sqrt{F^4 - 4T}}{2T} = \begin{cases} 1.42 \cdot 10^5 \\ 100 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{2\pi h}{1.42 \cdot 10^5} = 4.4 \cdot 10^{-4} m \\ \frac{2\pi h}{100} = 0.62m \end{cases}$$

Επομένως, το φαινόμενο διατηρεί τον κυματικό του χαρακτήρα στις περιοχές $\lambda < \lambda_1 = 0.00044m$ (όπου κυριαρχεί η επίδραση επιφανειακής τάσεως) και $\lambda > \lambda_2 = 0.62m$ (όπου κυριαρχεί η επίδραση βαρύτητας). Και στις δύο περιπτώσεις $(\lambda_{1,2})$ το μήκος κύματος που υπολογίζεται είναι πολύ μικρό ώστε να επαληθεύεται η υπόθεση $kh \gg 1$!!

Παράδειγμα 2: Να διερευνήσετε τη σχέση διασποράς (Π1.1) αμελώντας την επίδραση της επιφανειακής τάσης (δηλαδή θέτοντας $\tilde{\tau} = 0$). Το κεντρικό ερώτημα που πρέπει να εξετασθεί στα πλαίσια της ζητούμενης διερεύνησης είναι τα εξής: Δεδομένης της κυκλικής συχνότητας ω (ή της περιόδου T), πόσες και ποιές είναι οι επιτρεπτές τιμές του κυματαριθμού K (ή του μήκους κύματος λ), οι οποίες προκύπτουν από τη σχέση διασποράς;

Να εξετάσετε ξεχωριστά τις περιπτώσεις:

- α) Κύμα και ρεύμα ομόρροπα,
- β) Κύμα και ρεύμα αντίρροπα.

Λύση: α) Όταν το κύμα και το ρεύμα είναι ομόρροπα και $\tilde{\tau} = 0$, η σχέση διασποράς γίνεται

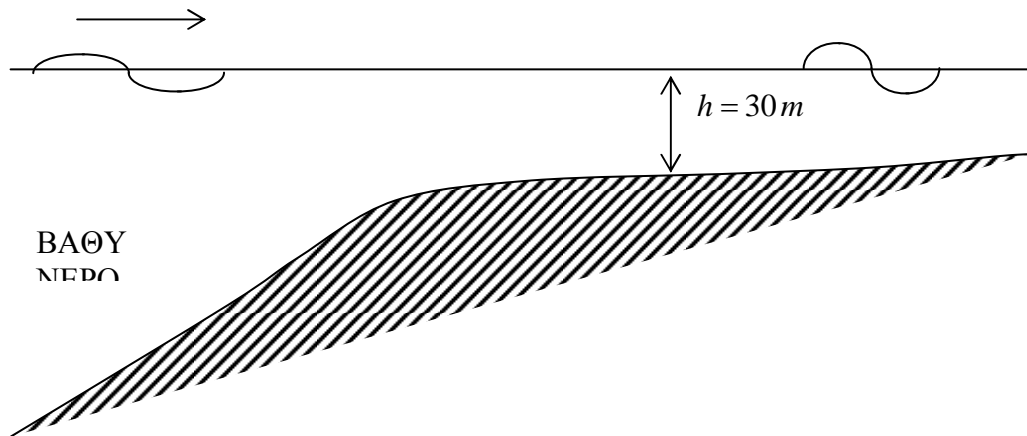
$$\omega \sqrt{h/g} = \sqrt{(kh) \cdot \tanh(kh)} + \frac{U_0}{\sqrt{gh}} (kh). \quad (1)$$

Θέτοντας $kh = u$ και $\omega \sqrt{h/g} = U$, η (1) γράφεται στη μορφή

$$U = \sqrt{u \cdot \tanh u} + F \cdot u, \quad (2)$$

όπου $F = U_0 / \sqrt{gh}$ είναι ένας αριθμός Froude

Παράδειγμα 3: Απλός αρμονικός κυματισμός βαρύτητας, κυκλικής συχνότητας ω , διαδίδεται από την περιοχή νερού μεγάλου βάθους προς την ακτή (βλ. σχήμα). Το μήκος και ύψος του κυματισμού στο βαθύ νερό είναι $\lambda = \lambda_\infty = 120m$ και $2a = 2a_\infty = 2m$, αντίστοιχα.



Ποιά είναι το πλάτος, το μήκος και η φασική ταχύτητα του κυματισμού στη ρηχή περιοχή, όπου το βάθος του νερού είναι $h = 30m$; Τι υποθέσεις, πέραν της γραμμικότητας, χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τα ανωτέρω μεγέθη;

Λύση: Προκειμένου να συνδέσουμε τα χαρακτηριστικά του κύματος στο ρηχό νερό με αντίστοιχα χαρακτηριστικά του όταν αυτό βρίσκεται (σε προγενέστερες στιγμές) στο βαθύ νερό (χωρίς να διατυπώσουμε και να επιλύσουμε το πλήρες πρόβλημα συνοριακών τιμών που εμπλέκει την ακριβή μορφή του πυθμένα), απαιτείται να ισχύουν οι ακόλουθες απλοποιητικές προϋποθέσεις:

- Η ρήγωση είναι πολύ ομαλή έτσι ώστε το βάθος να μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά σταθερό σε αρκετά μήκη κύματος. (Αργά μεταβαλλόμενη βαθυμετρία ως προς το μήκος κύματος).
- Οι απώλειες ενέργειας, π.χ. λόγω τριβής στον πυθμένα ή/και λόγω θραύσης των κυμάτων στην επιφάνεια, είναι μικρές, έτσι ώστε να μπορούν να αγνοηθούν.

Υπό τις δύο αυτές προϋποθέσεις μπορούμε να δώσουμε την ακόλουθη προσεγγιστική λύση του ανωτέρου προβλήματος.

Δεδομένου ότι η απόκριση γραμμικών συστημάτων σε αρμονική διέγερση είναι αρμονική με την ίδια συχνότητα, η συχνότητα του κυματισμού καθώς κινείται προς την ακτή παραμένει σταθερή. Από την σχέση διασποράς των κυματισμών βαρύτητας στο βαθύ νερό λαμβάνουμε

$$\omega = \sqrt{k_{\infty} g} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_{\infty}} g} = \sqrt{\frac{2\pi}{120m} 9.81 m/s^2} = 0.7167 \text{ rad/sec}.$$

Η φασική ταχύτητα στο βαθύ νερό δίδεται από τη σχέση

$$c_{\infty} = \frac{\omega}{k_{\infty}} = \frac{0.7167 \text{ rad/s}}{0.0524 \text{ s/m}} = 13.69 \text{ m/s}.$$

Στην περιοχή του ρηχού νερού, όπου το βάθος είναι περίπου 30m, ισχύει η σχέση διασποράς

$$\omega^2 = k_{30} g \cdot \tanh(k_{30} h) \Rightarrow k_{30} h \cdot \tanh(k_{30} h) = \frac{\omega^2 h}{g} = 1.57.$$

Η ανωτέρω εξίσωση, λυόμενη ως προς την αδιάστατη παράμετρο $k_{30} h$ με επαναλήψεις (ή γραφικά), μας δίνει $k_{30} h = 1.683$, άρα $k_{30} = 0.0561 \text{ m}^{-1}$, και

$$\lambda_{30} = \frac{2\pi}{k_{30}} = 112 \text{ m}.$$

Η φασική ταχύτητα του κυματισμού στην περιοχή βάθους 30m προκύπτει άμεσα από τη σχέση

$$c_{30} = \frac{\omega}{k_{30}} = \frac{0.7167 \text{ rad/s}}{0.0561 \text{ s/m}} = 12.77 \text{ m/s}.$$

Υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε στην αρχή, μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλάτος a_{30} του κυματισμού στην περιοχή με $h = 30 \text{ m}$, χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ενέργειας.

Η ροή της κυματικής ενέργειας (ισχύος) που διέρχεται από κατακόρυφη διατομή στην περιοχή νερού μεγάλου βάθους είναι:

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} \Big|_{\infty} = \frac{1}{4} \rho g a_{\infty}^2 c_{\infty}.$$

Αντιστοίχως, η ροή της κυματικής ενέργειας (ισχύος) που διέρχεται από κατακόρυφη διατομή στην περιοχή βάθους $h = 30 \text{ m}$ είναι:

$$\left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} \right|_{30} = \frac{1}{4} \rho g a_{30}^2 c_{30} \left[1 + \frac{2k_{30}h}{\sinh(2k_{30}h)} \right].$$

Εφ' όσον οι απώλειες ενέργειας μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} \right|_{\infty} = \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} \right|_{30} &\Rightarrow a_{30}^2 = a_{\infty}^2 \frac{c_{\infty}}{c_{30}} \left[1 + \frac{k_{30}h}{\sinh(2k_{30}h)} \right]^{-1} = a_{\infty}^2 \cdot 1.0720 \left(1 + \frac{3.366}{14.464} \right)^{-1} = a_{\infty}^2 \cdot 0.87 \\ &= a_{\infty}^2 \cdot 1.3251, \end{aligned}$$

και άρα

$$a_{30} = 0.94 \cdot a_{\infty} = 0.94m .$$

**Επιφανειακοί κυματισμοί βαρύτητας και ακουστικά κύματα:
Λύσεις των κυματικών εξισώσεων σε κυματοδηγό με επίπεδα
σύνορα**

6.1 Γενικά

6.2 Το γραμμικοποιημένο αρμονικό πρόβλημα σε ημιάπειρη λωρίδα ρευστού

6.3 Το κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών (πρόβλημα Sturm-Liouville)

6.4 Αναλυτική επίλυση του κατακορύφου προβλήματος ιδιοτιμών στην
περίπτωση ομογενούς κυματοδηγού ($k = \text{σταθερό}$ και $\mu = \text{σταθερό}$)

6.5 Η γενική αναπαράσταση της λύσεως του προβλήματος σε ημιάπειρη
λωρίδα. Επίπεδα κύματα

6.1 Γενικά

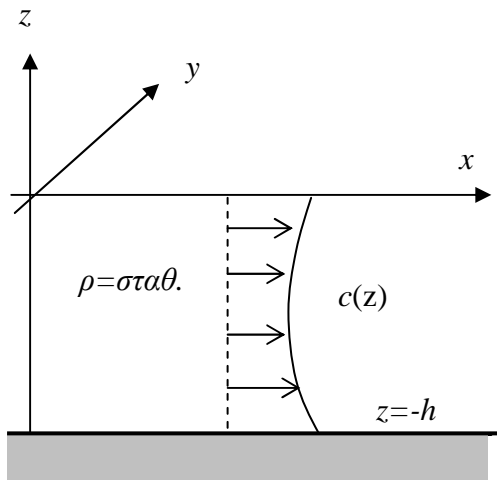
Στο παρόν κεφάλαιο θα κατασκευασθεί η γενική αναπαράσταση της λύσεως του χρονικά αρμονικού, γραμμικοποιημένου προβλήματος σε ομογενή κυματοδηγό οριζοντίως σταθερών παραμέτρων. Ειδικότερα, θα περιγράψουμε την κατασκευή της γενικής έκφρασης της λύσεως του προβλήματος

- (i) στην ημιάπειρη λωρίδα σταθερού βάθους $A_a = \{(x, \psi, z), x \geq a \text{ (ή } x \leq a), -\infty < \psi < \infty, -h \leq z \leq 0\}$, σε καρτεσιανό συντεταγμένων, βλ. Σχήμα 6.1, και
- (ii) στον άπειρο εξωτερικό κύλινδρο $K_a = \{(r, \theta, z), r \geq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -h \leq z \leq 0\}$, σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, βλ. Σχήμα 6.2.

Η κατασκευή της γενικής αναπαραστάσεως της λύσεως σε ομογενή κυματοδηγό οριζοντίως σταθερών παραμέτρων παρουσιάζει μεγάλη σημασία διότι, πέραν της φυσικής κατανόησης του φαινομένου που μας προσφέρει, μας επιτρέπει στη συνέχεια να προσδιορίζουμε με σαφήνεια και επάρκεια τις συνθήκες ακτινοβολίας (radiation conditions) του κυματικού προβλήματος σε γενικό κυματοδηγό. Οι συνθήκες ακτινοβολίας συμπληρώνουν την μαθηματική διατύπωση και εξασφαλίζουν την επιλυσιμότητα του γενικού γραμμικού προβλήματος κυματικής διάδοσης σε κυματοδηγό με οριζόντια μεταβαλλόμενες παραμέτρους. Το θέμα αυτό εξετάζεται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

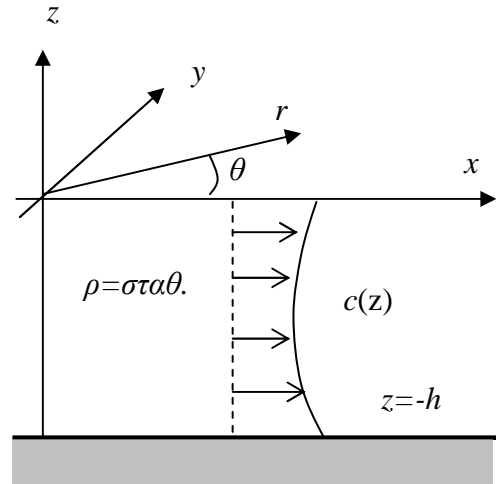
Και στις δύο περιπτώσεις που θα εξετασθούν θεωρούμε ομογενή, άπειρο σε έκταση κυματοδηγό οριζοντίως σταθερών παραμέτρων. Αυτή η απαίτηση συνεπάγεται αμετάβλητη βαθυμετρία (και στις δύο περιπτώσεις το βάθος του νερού είναι $h = \text{σταθερό}$), σταθερή πυκνότητα νερού ($\rho = \text{σταθερό}$), και κατανομή της ταχύτητας του ήχου στο νερό $c(z)$ που δεν μεταβάλλεται οριζοντίως

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \text{ και } \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial \theta} = 0, \text{ αντίστοιχα}\right).$$



Σχήμα 6.1. Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ημιάπειρη λωρίδα

$$A_a = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} x \geq a, \\ -\infty < y < \infty, -h \leq z \leq 0 \end{array} \right\}$$



Σχήμα 6.2. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Εξωτερικός κύλινδρος

$$K_a = \left\{ (r, \theta, z) : \begin{array}{l} r \geq a, \\ 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{array} \right\}$$

Οι ανωτέρω υποθέσεις μεταφέρονται αυτούσιες και στις κυματικές παραμέτρους του μονοχρωματικού προβλήματος (δηλαδή του κυματικού προβλήματος που αντιστοιχεί σε δεδομένη συχνότητα, $\omega = \text{σταθερή}$), δηλαδή

$$\mu = \frac{\omega^2}{g} = \text{σταθερό} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = 0, \quad \text{και} \quad (1)$$

$$k(z) = \frac{\omega}{c(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial \theta} = 0. \quad (2)$$

Επιπροσθέτως, θεωρούμε, ότι το κυματικό πεδίο διεγείρεται στις περιοχές A_a και K_a από παράλληλο επίπεδο και κυλινδρικό κύμα, αντίστοιχα. Το διεγείρον αίτιο του κυματικού φαινομένου που εξετάζουμε μπορεί να είναι κύμα που εισέρχεται (δηλαδή προσδίδει κυματική ενέργεια) ή κύμα που εξέρχεται (δηλαδή αφαιρεί κυματική ενέργεια) στις περιοχές A_a και K_a . Μπορεί επίσης να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός από ένα εισερχόμενο και ένα εξερχόμενο

κύμα, με διαφορετικά χαρακτηριστικά πλάτους και φάσης, στις συνοριακές επιφάνειες $x = a$ και $r = a$, αντίστοιχα. Έτσι, τόσο οι κυματικές παράμετροι μ και k όσο και το διεγείρον αίτιο δεν εξαρτώνται από την εγκάρσια συντεταγμένη y στην περίπτωση της ημιάπειρης λωρίδας A_a . Ομοίως, οι κυματικές παράμετροι και το διεγείρον αίτιο δεν εξαρτώνται από την γωνία αζιμουθίου θ στην περίπτωση του άπειρου εξωτερικού κυλίνδρου K_a .

Κατ'αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε πρακτικά τον περιορισμό της θεώρησης μας στις δύο διαστάσεις. Στην μόν περίπτωση της λωρίδας A_a το κυματικό πεδίο είναι ανεξάρτητο από την εγκάρσια συντεταγμένη $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0\right)$, στη δε περίπτωση του κυλίνδρου K_a το κυματικό πεδίο είναι ανεξάρτητο της γωνίας αζιμουθίου $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0\right)$. Στην τελευταία περίπτωση ομιλούμε για αξονικά συμμετρικό κυματικό πεδίο $\Phi = \Phi(r, \theta)$.

Στην περίπτωση του χρονικά αρμονικού, γραμμικοποιημένου προβλήματος το κυματικό δυναμικό στις ημιάπειρες λωρίδες ρευστού αναπαρίσταται, γενικώς, στην ακόλουθη μορφή:

$$\Phi(x, z; t) = \text{Re} \{ \varphi(x, z; k, \mu) \exp(-i\omega t) \}, \quad (3)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και η ιδιότητα ανεξαρτησίας του πεδίου από την εγκάρσια (y) συντεταγμένη. Στην Εξίσωση (3), $\varphi(x, z; k, \mu)$ δηλώνει το μιγαδικό πλάτος του κυματικού πεδίου, η οποία είναι συνάρτηση των χωρικών (ανεξάρτητων) μεταβλητών (x, z) και είναι παραμετρικά εξαρτώμενη από τις κυματικές παραμέτρους (k, μ) των εσωτερικών (ακουστικών) και των επιφανειακών κυμάτων. Αντίστοιχα στην περίπτωση του εξωτερικού κυλίνδρου $K_a = \{(r, \theta, z), r \geq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -h \leq z \leq 0\}$, το κυματικό δυναμικό γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$\Phi(x, r; t) = \text{Re} \{ \varphi(x, r; k, \mu) \exp(-i\omega t) \}. \quad (4)$$

6.2 Το γραμμικοποιημένο αρμονικό πρόβλημα σε ημιάπειρη λωρίδα ρευστού

Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με την κατασκευή της γενικής αναπαράστασης της λύσεως $\varphi(x, z; k, \mu)$ του χρονικά αρμονικού γραμμικοποιημένου προβλήματος στην θετική ημιάπειρη λωρίδα ρευστού $A_a = \{(x, y, z): a < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h < z < 0\}$, οριζοντίως σταθερών παραμέτρων, βλ. Σχήμα 4.1. Η λύση στην περίπτωση της αρνητικής ημιάπειρης λωρίδας $A_a = \{(x, y, z): -\infty < x < a, -\infty < y < \infty, -h < z < 0\}$ προκύπτει κατ'αντιστοιχίαν.

Σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε στο Κεφ. 3, η διαφορική διατύπωση του προβλήματος που εξετάζεται, γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} > 0, \quad (x, z) \in A_a, \quad (1\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \varphi = 0, \quad \mu = \frac{\omega^2}{g} > 0, \quad z = 0, \quad (1\beta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad (1\gamma)$$

όπου $k(z) = \frac{\omega}{c(z)}$ η παράμετρος των ακουστικών κυμάτων και $\mu = \frac{\omega^2}{g}$ η παράμετρος των

επιφανειακών κυμάτων (βαρύτητας). Όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι ανωτέρω παράμετροι, όπως και η γεωμετρία των συνόρων, υποτίθενται οριζοντίως αμετάβλητες. Οι ανωτέρω εξισώσεις συμπληρώνονται από την απαίτηση του φραγμένου για το κυματικό πεδίο και τις παραγώγους του στο άπειρο

$$|\varphi| < C_1, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < C_2, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| < C_3, \quad \text{για } x \rightarrow \infty, \quad (1\delta)$$

όπου C_1, C_2, C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για την επίλυση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

1. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών θα κατασκευάσουμε την γενική λύση του προβλήματος που απαρτίζεται από τις Εξισώσεις (1α), (1β) και (1γ).

2. Από το σύνολο των λύσεων του ανωτέρω μερικού προβλήματος θα επιλέξουμε τις λύσεις εκείνες οι οποίες, επιπλέον, ικανοποιούν την απαίτηση φραγμένου (1δ).

Διαδικασία χωρισμού μεταβλητών:

Θεωρούμε το ακόλουθο, μερικό πρόβλημα:

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,zz} + k^2 \varphi = 0, \quad (x, z) \in A_a, \quad (2\alpha)$$

$$\varphi_{,z} - \mu \varphi = 0, \quad \text{στην ελεύθερη επιφάνεια } z = 0, \quad (2\beta)$$

$$\varphi_{,z} = 0, \quad \text{στον πυθμένα } z = -h. \quad (2\gamma)$$

Στην συνέχεια, αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\varphi(x, z) = X(x) \cdot Z(z) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την μορφή (3) στην εξίσωση Helmholtz (2α) παίρνουμε

$$X(x) \cdot Z(z) \cdot \left\{ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z) + k^2(z) \cdot Z(z)}{Z(z)} \right\} = 0, \quad (4)$$

από την οποία συνάγουμε ότι για $X(x) \neq 0$ και $Z(z) \neq 0$ θα πρέπει ισοδύναμα να ισχύει

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z''(z) + k^2(z) \cdot Z(z)}{Z(z)} = k_n^2. \quad (5)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση k_n^2 δηλώνει τις πραγματικές σταθερές χωρισμού μεταβλητών, πράγμα που όμως αφήνει περιθώριο στις ρίζες αυτών να είναι μιγαδικές σταθερές ($k_n \in \mathbb{C}$).

Αντικαθιστώντας την μορφή (3) στις συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (2α) και πυθμένα (2β) λαμβάνουμε

$$X(x) \cdot \{Z'(z) - \mu Z(z)\} = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

και

$$X(x) \cdot Z'(z) = 0, \quad z = -h, \quad (7)$$

αντιστοίχως.

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις ο τόνος (') δηλώνει παραγωγή της αντίστοιχης συναρτήσεως ως προς την μεταβλητή από την οποία εξαρτάται. Από το πρώτο τμήμα της εξίσωσης (5) εύκολα παράγεται η ακόλουθη οριζόντια εξίσωση:

$$X''(x) + k_n^2 \cdot X(x) = 0. \quad (8)$$

Από το δεύτερο τμήμα της εξίσωσης (5), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (6) και (7), λαμβάνουμε το ακόλουθο κατακόρυφο πρόβλημα συνοριακών τιμών, με ελεύθερη παράμετρο (k_n^2):

$$Z''(z) + (k^2(z) - k_n^2) Z(z) = 0, \quad -h < z < 0, \quad (9\alpha)$$

$$Z'(z) - \mu Z(z) = 0, \quad z = 0, \quad (9\beta)$$

$$Z'(z) = 0, \quad z = -h, \quad (9\gamma)$$

το οποίο θα εξετασθεί αναλυτικότερα στην συνέχεια.

6.3 Το κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών (πρόβλημα Sturm-Liouville)

Από τη βιβλιογραφία, βλ. π.χ. Coddington & Levinson (1955, Chapter 7), Morse & Feshbach (1953), είναι γνωστό ότι το πρόβλημα (7) συνιστά ένα ομαλό, αυτοσυζυγές πρόβλημα ιδιοτιμών στο φραγμένο διάστημα $z \in [-h, 0]$ (regular, self-adjoint eigenvalue problem on a finite interval).

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και ως ομαλό, Sturm-Liouville πρόβλημα ιδιοτιμών. Στην συνέχεια θα αναφερόμαστε στο σύστημα (9) χρησιμοποιώντας τον όρο *κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών*.

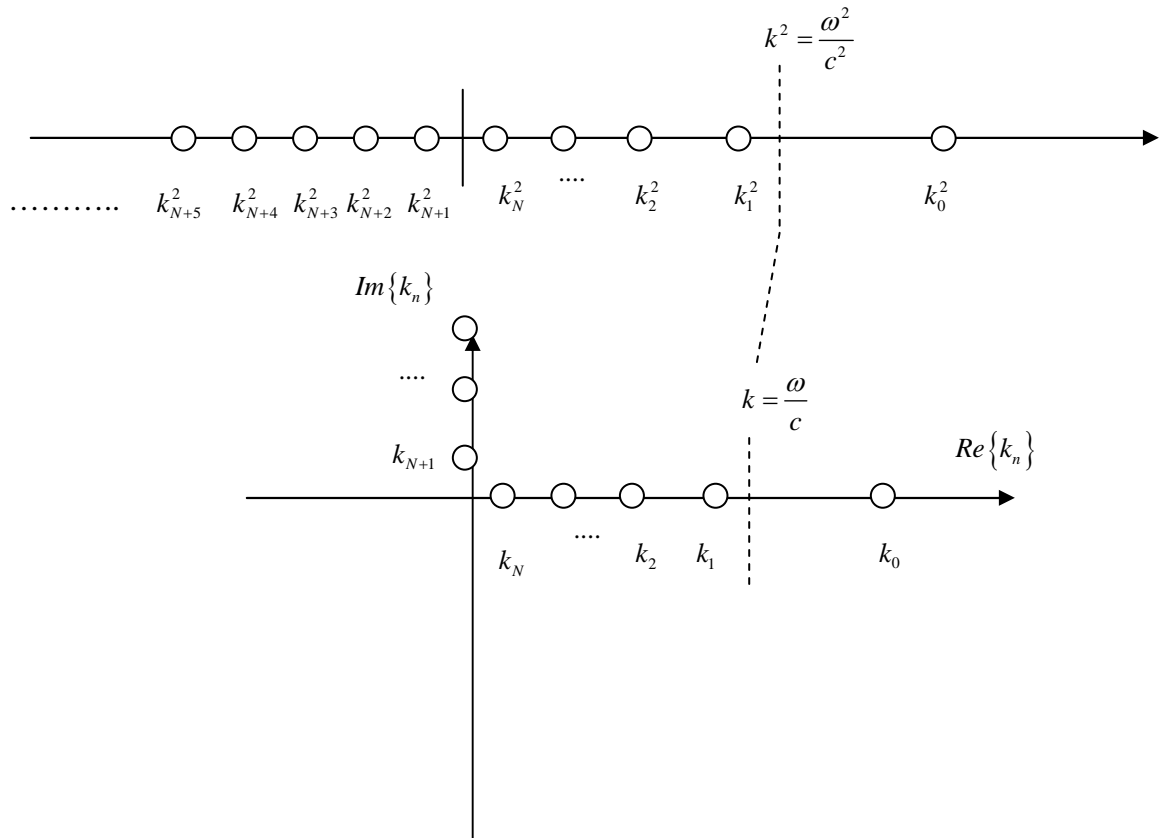
Υπό την υπόθεση ότι η κατανομή της ταχύτητας του ήχου $c(z)$ και, κατά συνέπεια, η κυματική παράμετρος $k(z) = \frac{\omega}{c(z)}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κατακόρυφο διάστημα $[-h, 0]$ ($c(z), k(z) \in C[-h, 0]$), θα αναφερθούμε συνοπτικά στη συνέχεια, σε μία σειρά από πολύ σημαντικές ιδιότητες που διαθέτει το σύστημα των λύσεων του κατακορύφου προβλήματος ιδιοτιμών. Οι ιδιότητες αυτές έχουν καθοριστική σημασία για την περαιτέρω μελέτη του εξεταζομένου προβλήματος, επιπλέον δε βρίσκουν και πλήθος άλλες χρήσιμες εφαρμογές, όπως θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι στην εξεταζόμενη περίπτωση η επιφανειακή κυματική παράμετρος $\mu = \frac{\omega^2}{g}$ εξαρτάται μόνον από τη συχνότητα ω και, κατά συνέπεια, είναι μία θετική πραγματική σταθερά ($\mu \in R^+$).

Ιδιότητες του κατακορύφου προβλήματος ιδιοτιμών

(i) Οι ιδιότητες k_n^2 του προβλήματος είναι πραγματικές και άπειρες το πλήθος. Το απειροσύνολο $\{k_n^2\}$ είναι αριθμήσιμο και δεν παρουσιάζει άλλο σημείο συσσωρεύσεως εκτός από το $-\infty$. Θεωρούμε στην συνέχεια το σύνολο $\{k_n^2\}$ αναδιαταγμένο κατά φθίνουσα σειρά, έτσι ώστε k_0^2 να είναι η μέγιστη (πιθανόν θετική) ιδιοτιμή και $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^2 = -\infty$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, και εξαιρώντας την ειδική περίπτωση κατά την οποία για κάποια συχνότητα ω πιθανόν να συμβεί κάποια ιδιοτιμή να μηδενίζεται, έχουμε πάντα την δυνατότητα να διαχωρίσουμε το σύνολο $\{k_n^2\}$ σε δύο υποσύνολα, ένα πεπερασμένο και ένα απειροσύνολο ως ακολούθως:

$$\{k_n^2\}_{n=0,1,\dots} = \{k_n^2\}_{n=0,N} \cup \{k_n^2\}_{n=N+1,\infty}, \quad (1)$$

όπου k_N^2 η ελάχιστη θετική ιδιοτιμή, δηλαδή $k_n^2 > 0$, για $n = 0, 1, \dots, N$, και $k_n^2 < 0$, για $n = N + 1, N + 2, \dots$. Η διάταξη των ιδιοτιμών του κατακορύφου προβλήματος απεικονίζεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3 Διάταξη των ιδιοτιμών $\{k_n^2\}$ του κατακορύφου προβλήματος στην πραγματική ευθεία, και των αριθμών $\{k_n\}$ στο μιγαδικό επίπεδο.

(ii) Σε κάθε ιδιοτιμή k_n^2 , $n=0,1,2,\dots$ αντιστοιχεί μία ιδιοσυνάρτηση $Z_n(z)$, $n=0,1,2,\dots$. Οι ιδιοσυναρτήσεις $\{Z_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$ είναι αμοιβαία ορθογώνιες, δηλαδή ισχύει

$$\langle Z_n, Z_m \rangle = \int_{z=-h}^{z=0} Z_n(z) Z_m(z) dz = \delta_{nm} \cdot \|Z_n\|^2 = \begin{cases} \|Z_n\|^2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (2)$$

όπου $\|Z_n\| = \left\{ \int_{z=-h}^{z=0} Z_n^2(z) dz \right\}^{1/2}$ η L_2 -νόρμα της ιδιοσυναρτήσεως $Z_n(z)$, και δ_{nm} δηλώνει το δέλτα του Kronecker.

Απόδειξη της ιδιότητας (ii)

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (6.2-9α) για δύο διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ και $Z_m(z)$, αντίστοιχα, λαμβάνουμε

$$Z_n''(z) + (k^2(z) - k_n^2)Z_n(z) = 0 \quad , \quad (3\alpha)$$

$$Z_m''(z) + (k^2(z) - k_m^2)Z_m(z) = 0 \quad . \quad (3\beta)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι οι ιδιοτιμές k_n^2 και k_m^2 ($k_n^2 \neq k_m^2$) αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ και $Z_m(z)$.

Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό και δεξιό μέλος της σχέσεως (3α) με την ιδιοσυνάρτηση $Z_m(z)$, και το αριστερό και δεξιό μέλος της σχέσεως (3β), αντίστοιχα, με την ιδιοσυνάρτηση $Z_n(z)$, και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει η σχέση

$$Z_m Z_n'' - Z_n Z_m'' = (k_n^2 - k_m^2) \cdot Z_n Z_m \quad . \quad (4)$$

Η σχέση (4) ισχύει σε όλο το διάστημα $z \in [-h, 0]$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή στο ανωτέρω διάστημα και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \langle Z_n, Z_m \rangle &= \int_{-h}^0 Z_n(z) Z_m(z) dz = \frac{1}{k_n^2 - k_m^2} \int_{-h}^0 (Z_m Z_n'' - Z_n Z_m'') dz = \\ &= \frac{1}{k_n^2 - k_m^2} \left\{ Z_m Z_n' \Big|_{-h}^0 - Z_n Z_m' \Big|_{-h}^0 - \int_{-h}^0 Z_m' Z_n' dz + \int_{-h}^0 Z_m' Z_n' dz \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

όπου $\langle Z_n, Z_m \rangle = \int_{z=-h}^{z=0} Z_n(z) Z_m(z) dz$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων στον

Hilbert χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες στα άκρα $z = 0$, Εξ. (9β), Εδαφ. 6.2, και $z = -h$, Εξ. (9γ), Εδαφ. 6.2, του προβλήματος, λαμβάνουμε τελικώς από την ανωτέρω σχέση (5)

$$\begin{aligned}\langle Z_n Z_m \rangle &= \frac{1}{k_n^2 - k_m^2} \{Z_m(0) \cdot Z'_n(0) - Z_n(0) \cdot Z'_m(0) - Z_m(-h) \cdot Z'_n(-h) + Z_n(-h) \cdot Z'_m(-h)\} = \\ &= \frac{1}{k_n^2 - k_m^2} \{Z_m(0) \cdot \mu Z_n(0) - Z_n(0) \cdot \mu Z_m(0)\} = 0,\end{aligned}\quad (6)$$

η οποία είναι η ζητούμενη συνθήκη ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων.

Το ορθογώνιο σύστημα $\{Z_n\}_{n=0,1,\dots}$ μπορεί εύκολα να κανονικοποιηθεί, επανορίζοντας τις ιδιοσυναρτήσεις ως ακολούθως

$$\tilde{Z}_n(z) = \frac{Z_n(z)}{\|Z_n(z)\|} = \frac{Z_n(z)}{\left\{ \int_{z=-h}^{z=0} Z_n^2(z) dz \right\}^{1/2}}. \quad (7)$$

Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι το σύνολο $\{\tilde{Z}_n\}_{n=0,1,\dots}$ είναι ορθοκανονικό, δηλαδή

$$\langle \tilde{Z}_n, \tilde{Z}_m \rangle = \frac{\langle Z_n, Z_m \rangle}{\|Z_n\| \cdot \|Z_m\|} = \delta_{nm}. \quad (8)$$

(iii) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων $\{Z_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ και $\{\tilde{Z}_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ αποτελεί ορθογώνια και ορθοκανονική βάση, αντίστοιχως, στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων επί του διαστήματος $z \in [-h, 0]$. Αυτό σημαίνει ότι μία τυχαία συνεχής συνάρτηση $f \in C[-h, 0]$ αναπτύσσεται ως προς την ανωτέρω βάση στην ακόλουθη σειρά Fourier:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, Z_n \rangle}{\|Z_n\|^2} \cdot Z_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \tilde{Z}_n \rangle \tilde{Z}_n(z), \quad (9)$$

και το δεξί μέλος της εξίσωσης (9) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(z)$. Εάν, επιπροσθέτως η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ικανοποιεί στα άκρα $z = 0$ και $z = -h$ του

διαστήματος τις ίδιες ακριβώς συνοριακές συνθήκες όπως το σύστημα $\{Z_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$, δηλαδή τις εξισώσεις (9β) και (9γ) του Εδαφ. 6.2, τότε τόσο το ανάπτυγμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (9) συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(z)$ στο $z \in [-h, 0]$, όσο και το ανάπτυγμα που προκύπτει από την όρο-προς-όρο παραγωγή του δεξιού μέλους της εξ. (9) συγκλίνει στην παράγωγο αυτής $f'(z)$. Δηλαδή

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, Z_n \rangle}{\|Z_n\|^2} \cdot Z_n'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \tilde{Z}_n \rangle \tilde{Z}_n'(z) \quad . \quad (10)$$

(iv) Άμεση συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας είναι η ακόλουθη σχέση για την αναπαράσταση της γενικευμένης συναρτήσεως Dirac- δ . Συγκεκριμένα, για $z, z_0 \in (-h, 0)$ ισχύει

$$\delta(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(z) Z_n(z_0)}{\|Z_n\|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}_n(z) \tilde{Z}_n(z_0) \quad (11)$$

Απόδειξη της ιδιότητας (iv).

Θα αποδείξουμε ότι η δράση της γενικευμένης συναρτήσεως που αναπαρίσταται από το δεξί μέλος της εξίσωσης (11) επί της τυχαίας συνεχούς συναρτήσεως $f(z) \in C[-h, 0]$ έχει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με τη γνωστή δράση της συναρτήσεως Dirac- δ , δηλαδή

$$\int_{z=-h}^0 \delta(z - z_0) \cdot f(z) dz = f(z_0), \quad \text{για κάθε } z_0 \in (-h, 0).$$

Πράγματι, εναλλάσσοντας τους τελεστές της άθροισης και ολοκλήρωσης λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_{z=-h}^0 f(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(z) Z_n(z_0)}{\|Z_n\|^2} dz &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(z_0)}{\|Z_n\|^2} \int_{z=-h}^0 f(z) \cdot Z_n(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, Z_n \rangle}{\|Z_n\|^2} \cdot Z_n(z_0) \end{aligned} \quad (12)$$

Όμως από τη σχέση (9) παρατηρούμε ότι το τελευταίο δεξιό μέλος της εξισώσεως (12) είναι ακριβώς $f(z_0)$, δηλαδή η τιμή της τυχαίας, συνεχούς συναρτήσεως f στο σημείο $z_0 \in (-h, 0)$.

Επομένως,

$$\int_{z=-h}^0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(z) \cdot Z_n(z_0)}{\|Z_n\|^2} \right) \cdot f(z) \cdot dz = f(z_0) = \int_{z=-h}^0 \delta(z - z_0) \cdot f(z) dz \quad . \quad (13)$$

Αξίζει τέλος να σημειωθεί εδώ ότι τόσο το σύνολο των ιδιοτιμών $\{k_n^2\}_{n=0,1,\dots}$ όσο και το σύνολο των αντιστοίχων ιδιοσυναρτήσεων $\{Z_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ του κατακορύφου προβλήματος εξαρτώνται παραμετρικά από τις κυματικές παραμέτρους του προβλήματος, καθώς και από το βάθος, δηλαδή

$$k_n^2 = k_n^2(k(z), \mu; h) \quad \text{και} \quad Z_n(z) = Z_n(z; k(z), \mu; h), \quad n=0,1,2,\dots \quad , \quad (14)$$

και μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο, καθώς οι τιμές των παραμέτρων $k(z)$ και μ μεταβάλλονται συνεχώς (όπως π.χ. μπορεί να συμβεί στην περίπτωση συνεχούς μεταβολής της συχνότητας ω).

6.4 Αναλυτική επίλυση του κατακορύφου προβλήματος ιδιοτιμών στην περίπτωση ομογενούς κυματοδηγού ($k = \text{σταθερό και } \mu = \text{σταθερό}$)

Στην περίπτωση του ομογενούς κυματοδηγού $\left(k = \frac{\omega}{c} = \text{σταθερό} \right)$, το κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$Z''(z) + (k^2 - k_n^2) Z(z) = 0, \quad -h < z < 0 \quad , \quad (1\alpha)$$

$$Z' - \mu Z = 0, \quad \text{στη θέση } z = 0 \quad , \quad (1\beta)$$

$$Z' = 0, \quad \text{στη θέση } z = -h, \quad (1\gamma)$$

Η γενική λύση της δευτεροτάξιας, απλής διαφορικής εξίσωσης (1α) γράφεται στη μορφή

$$Z_n(z) = A_n \cos(\lambda_n z) + B_n \sin(\lambda_n z), \quad (2)$$

όπου $\lambda_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}$, και A, B σταθεροί συντελεστές, οι οποίοι θα προσδιορισθούν στην συνέχεια από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (1β) και (1γ). Από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια (1β) προκύπτει

$$Z'(0) - \mu Z(0) = 0 \Rightarrow B_n \lambda_n - \mu A_n = 0 \Rightarrow B_n = \frac{\mu A_n}{\lambda_n}. \quad (3)$$

Επίσης, από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης στον πυθμένα (1γ) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Z'(-h) = 0 &\Rightarrow -A_n \lambda_n \sin(-\lambda_n h) + B_n \lambda_n \cos(-\lambda_n h) = 0 \\ &\Rightarrow B_n = -A_n \tan(\lambda_n h) \end{aligned} \quad (4)$$

Απαλείφοντας τον συντελεστή B_n από τις εξισώσεις (3) και (4) καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση διασποράς

$$\mu = -\lambda_n \tan(\lambda_n h), \quad (5\alpha)$$

η οποία σε αδιάστατη μορφή γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως

$$\mu h = -\lambda_n h \tan(\lambda_n h). \quad (5\beta)$$

Οι ρίζες λ_n της εξίσωσης (5β), οι οποίες στην συνέχεια θα δείξουμε ότι είναι άπειρες το πλήθος, εξαρτώνται από την επιφανειακή κυματική παράμετρο μ και από το βάθος h του κυματοδηγού. Επομένως, οι ιδιοτιμές του κατακορύφου προβλήματος θα δίδονται από την σχέση:

$$k_n = k_n(k, \mu, h) = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2(\mu, h)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις υπολογίζονται με την βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) ως εξής:

$$\begin{aligned} Z_n(z) &= A_n \cdot \cos(\lambda_n z) - A_n \cdot \tan(\lambda_n h) \sin(\lambda_n z) = \\ &= A_n \frac{\cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n h) - \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_n h)}{\cos(\lambda_n h)} = \\ &= A_n \frac{\cos[\lambda_n(z+h)]}{\cos(\lambda_n h)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Παρατηρούμε από την σχέση (7) ότι η γενική έκφραση των ιδιοσυναρτήσεων του κατακορύφου προβλήματος εμπεριέχει τις αντίστοιχες ιδιοτιμές και την απροσδιόριστη πολλαπλασιαστική σταθερά A_n . Η σταθερά αυτή μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της κανονικοποίησης του συνόλου των ιδιοσυναρτήσεων. Για τον σκοπό αυτό απαιτείται ο υπολογισμός του κατωτέρω ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned} \|Z_n\|^2 = \langle Z_n, Z_n \rangle &= \int_{z=-h}^{z=0} Z_n(z) \cdot Z_n(z) dz = \\ &= \frac{h}{2 \cos^2(\lambda_n h)} \cdot \left[1 + \frac{\sin(2\lambda_n h)}{2\lambda_n h} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Επομένως, σύμφωνα και με την εξίσωση (7) του εδαφίου 4.3, οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του κατακορύφου προβλήματος, στην μελετώμενη περίπτωση, δίδονται από την ακόλουθη σχέση

$$\tilde{Z}_n(z) = \frac{Z_n(z)}{\|Z_n\|} = \frac{\cos[\lambda_n(z+h)]}{\sqrt{\frac{h}{2 \cos^2(\lambda_n h)} - \frac{\mu}{2(\lambda_n)^2}} \cos \lambda_n h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι:

$$\lambda_n = \sqrt{k^2 - k_n^2(k, \mu, h)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε λεπτομερέστερα την κατανομή των ιδιοτιμών του μελετώμενου κατακορύφου προβλήματος, καθώς και τις ειδικές μορφές που λαμβάνει η λύση του στις ακόλουθες περιπτώσεις :

- (i) του αμιγώς υδροακουστικού προβλήματος, κατά το οποίο η ελεύθερη επιφάνεια συμπεριφέρεται ως ιδανικά μαλακό σύνορο (συνθήκη Dirichlet στην ελεύθερη επιφάνεια), $\left(\frac{1}{\mu} \rightarrow 0 \quad \text{ή} \quad \mu \rightarrow \infty \right)$, και
- (ii) του προβλήματος κυματισμών βαρύτητας ($k=0$).

Θεώρημα Για δεδομένες και πεπερασμένες τιμές των κυματικών παραμέτρων $\mu = \frac{\omega^2}{g} \in R^+$ και

$k = \frac{\omega}{c} \in R_0^+$, και για πεπερασμένο βάθος κυματοδηγού ($h = \text{σταθερό}$), η εξίσωση διασποράς (5)

έχει μία καθαρά θετική φανταστική ρίζα $\lambda_o = i|\lambda_o| \in I^+$ και άπειρες διακριτές πραγματικές ρίζες $\{\lambda_n\}_{n \in N} \in R^+$.

Απόδειξη Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ως ακολούθως:

- (i) Στην περίπτωση όπου κάποια από τις ρίζες της εξίσωσης (5) είναι καθαρά φανταστικός αριθμός της μορφής $i|\lambda_n|$ η σχέση (5) λαμβάνει ισοδυνάμως την μορφή

$$\mu h = |\lambda_n| \cdot h \tan h(|\lambda_n| \cdot h) \quad (11\alpha)$$

Για $\mu \in R^+$ και θέτοντας $x = |\lambda_n| h$ η εξίσωση (11α) γράφεται στην μορφή

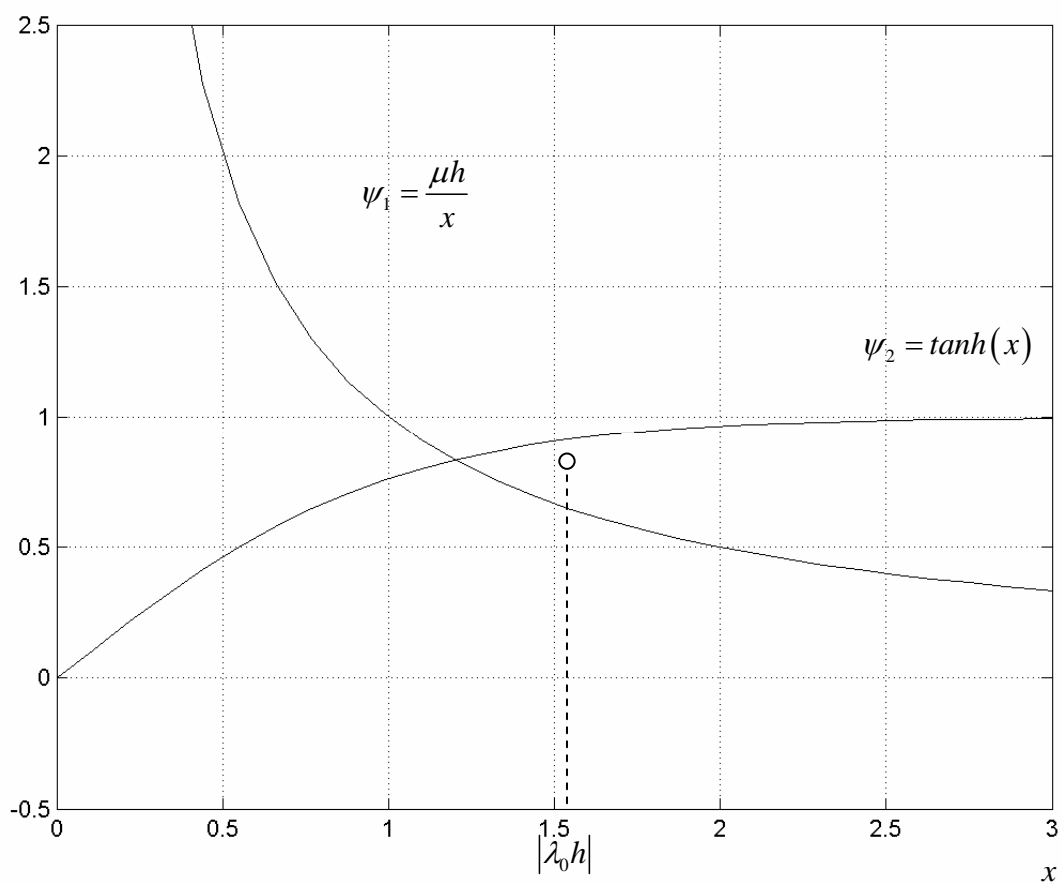
$$\frac{\mu h}{x} = \tan h(x), \quad (11\beta)$$

και επομένως η ύπαρξη θετικής πραγματικής ρίζας $x = |\lambda_n| \cdot h \in R^+$ της εξίσωσης (11β) εξασφαλίζεται, ισοδυνάμως από τα σημεία τομής των εξής δύο καμπυλών (βλέπε και Σχήμα 6.4)

(α) της καμπύλης $\psi_1 = \frac{\mu h}{x}$, η οποία παριστάνει μία υπερβολή και είναι γνησίως φθίνουσα

$\forall x \in R^+$, και

(β) της καμπύλης $\psi_2 = \tanh(x)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \in R^+$.



Σχήμα 6.4

Το πεδίο τιμών της συνεχούς συναρτήσεως $\psi_1(x) - \psi_2(x)$, θεωρούμενης $\forall x \in R^+$, είναι $\mathcal{D}(\psi_1 - \psi_2) = (+\infty, -1)$. Επομένως, εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano, βλ. π.χ. Apostol (1974), εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον θετικής πραγματικής ρίζας για την εξίσωση (11β). Η μοναδικότητα της ρίζας αυτής εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\psi_1 - \psi_2$ είναι γνησίως φθίνουσα ως διαφορά μίας γνησίως φθίνουσας και μίας

αύξουσας συναρτήσεως. Τη μοναδική αυτή ρίζα $\lambda_o = i|\lambda_o|$ την αντιστοιχίζουμε στον δείκτη $n = 0$.

- (ii) Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι η εξίσωση διασποράς στην πρωταρχική της μορφή, δηλαδή όπως δίδεται από την Εξίσωση (5α), έχει άπειρες διακριτές, πραγματικές ρίζες και η ακολουθία των ριζών αυτών δεν παρουσιάζει άλλο σημείο συσσωρεύσεως εκτός από το $+\infty$. Για $\mu \in R^+$, θέτοντας $x = \lambda_n \cdot h > 0$, η εξίσωση (5α) γράφεται στην μορφή.

$$\frac{\mu h}{x} = -\tan(x) \quad , \quad (12)$$

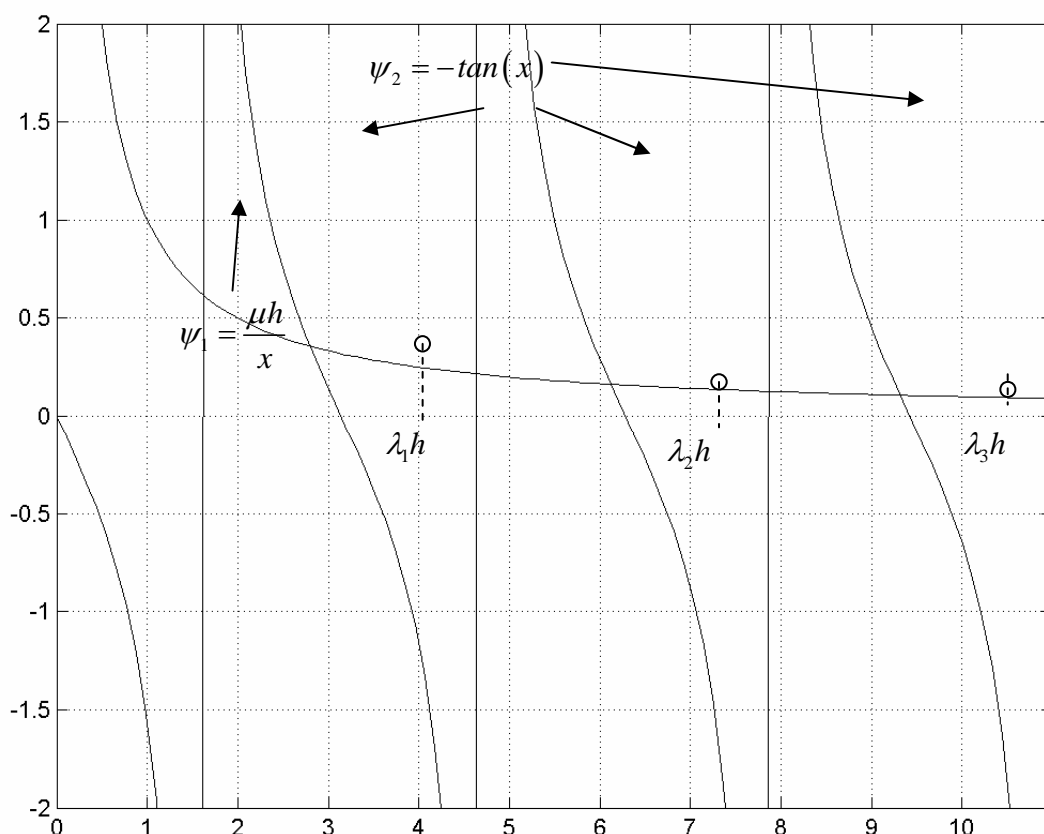
και επομένως οι υπόλοιπες ρίζες της εξισώσεως διασποράς προκύπτουν ως σημεία τομής των εξής δύο συναρτήσεων (βλ. και Σχήμα 6.5)

α) της συνάρτησης $\psi_1(x) = \frac{\mu h}{x}$, η οποία παριστάνει υπερβολή και είναι γνησίως φθίνουσα

$\forall x \in R^+$, και

β) της συνάρτησης $\psi_2(x) = -\tan(x)$, η οποία ως γνωστόν παρουσιάζει περιοδικότητα στα ακόλουθα υποδιαστήματα του θετικού πραγματικού ημιάξονα, βλ. και Σχ. 6.5,

$$I_n = \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi, \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$



Σχήμα 6.5

Παρατηρούμε με την βοήθεια του σχήματος 6.5 ότι σε κάθε ένα από τα διαστήματα I_n , $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία και μοναδική λύση $x_n = \lambda_n h$ της εξισώσεως (12). Αυτό προκύπτει επίσης από εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano, με την παρατήρηση ότι το πεδίο τιμών της συναρτήσεως $\psi_1(x) - \psi_2(x)$ σε κάθε ένα από τα ανωτέρω διαστήματα ($x \in I_n$) είναι $\mathcal{D}_n(\psi_1 - \psi_2) = (+\infty, -\infty)$, και η συνάρτηση διαφοράς είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτά. Επομένως, υπάρχουν άπειρες θετικές πραγματικές ρίζες της εξισώσεως (5α) $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, κάθε μία από τις οποίες ευρίσκεται εντός του διαστήματος I_n , και πιο συγκεκριμένα

$$\lambda_n \in \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi, n\pi \right) \subset I_n.$$

Επίσης, με την βοήθεια του Σχήματος 6.5 παρατηρούμε σχετικά με την ασυμπτωτική κατανομή των ριζών της εξισώσεως διασποράς ότι:

$$\lambda_n h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} n\pi \Rightarrow \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{h}. \quad (14)$$

Συνεπώς, το μοναδικό σημείο συσσωρεύσεως της ακολουθίας $\{\lambda_n\}$ είναι το $+\infty$.

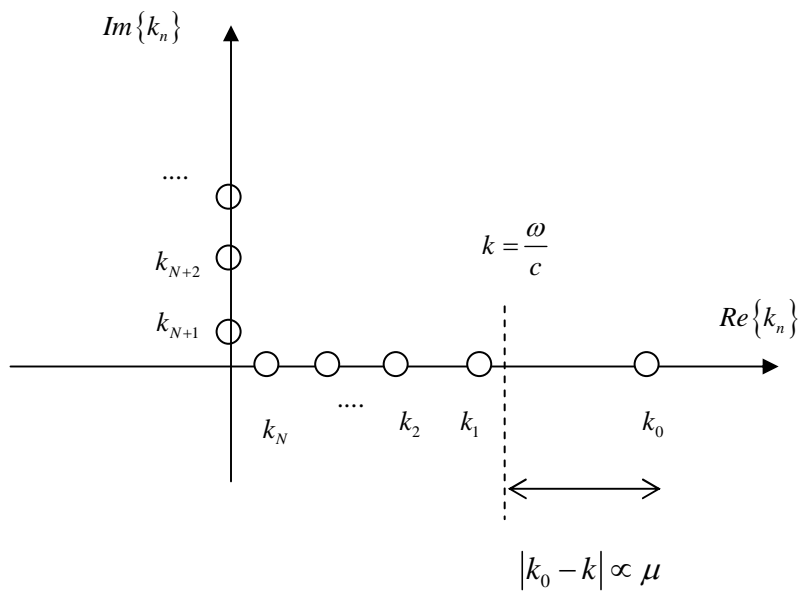
Συνοψίζοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα έχουμε για το σύνολο των ριζών της εξισώσεως διασποράς (5):

$$\{\lambda_n\}_{n=0,1,2,\dots} : \begin{cases} n=0 \rightarrow & \lambda_o = i|\lambda_o| : \mu h = |\lambda_o| h \tanh(|\lambda_o| \cdot h) \\ n \geq 1 \rightarrow & \{\lambda_n\}_{n=1,2,\dots} : \mu h = -\lambda_n h \tan(\lambda_n h) \end{cases} . \quad (15\alpha)$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοτιμών του κατακορύφου προβλήματος στην εξεταζόμενη περίπτωση δίδεται ως ακολούθως

$$\{k_n\}_{n=0,1,2,\dots} = \begin{cases} n=0 \rightarrow & k_o = \sqrt{k^2 + |\lambda_o|^2} \\ n \geq 1 \rightarrow & k_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} \end{cases} , \quad (15\beta)$$

και διατάσσεται στο μιγαδικό επίπεδο όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.6.



Σχήμα 6.6

Με την βοήθεια των σχημάτων 6.4, 6.5 και 6.6 μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις.

- (i) Η απόσταση $|k_0 - k|$ αυξάνεται με την αύξηση της παραμέτρου μ , και για $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow k_0 \rightarrow \infty$. Πραγματί, η συνεχής αύξηση της παραμέτρου μ συνεπάγεται την αντίστοιχη αύξηση του συντελεστή της υπερβολής $\psi_1(x) = \mu h / x$ και την μετατόπιση του σημείου τομής της καμπύλης αυτής με την καμπύλη $\psi_2(x) = \tan h(x)$ σε μεγαλύτερες τιμές του x . Στο όριο $\mu h \rightarrow \infty$ (όριο βαθέως ύδατος) προκύπτει $|\lambda_0| h \approx \mu h$ (πρακτικά αυτό συμβαίνει για $\mu h \gg 1$). Επομένως

$$k_0 \rightarrow \sqrt{k^2 + \mu^2} \quad (\approx \mu, \quad \text{για } \mu \gg k) \quad (16)$$

- (ii) Η κατανομή των υπολοίπων ιδιοτιμών $\{k_n\}_{n \geq 1}$ διαχωρίζεται σε πραγματικές και φανταστικές ανάλογα με την τιμή της ακουστικής παραμέτρου k . Επειδή η ακολουθία $\{\lambda_n^2\}_{n=1,2,\dots}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, η αντίστοιχη ακολουθία των τετραγώνων των ιδιοτιμών

$\{k_n^2 = k^2 - \lambda_n^2\}_{n=1,2,\dots}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι το σύνολο των ιδιοτιμών διαχωρίζεται στο πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών ιδιοτιμών και στο απειροσύνολο των φανταστικών ιδιοτιμών στη θέση $n = N + 1$ για τη οποία ισχύει:

$$\{k_n^2\}_{n=N+1, N+2} < 0 \Rightarrow \{\lambda_n^2 > k^2\}_{n=N+1, N+2, \dots} \quad (17)$$

Επίσης, από την σχέση (14) λαμβάνουμε για την ασυμπτωτική κατανομή των ιδιοτιμών

$$k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - k^2} \left(\approx i \frac{n\pi}{h} \right), \quad \text{για μεγάλο } n. \quad (18)$$

- (iii) Στην περίπτωση όπου $k = 0$, δηλαδή στην περίπτωση του προβλήματος κυματισμών ελεύθερης επιφάνειας, σε πεπερασμένο βάθος νερού ($h < \infty$), ισχύει ότι $N = 0$, και επομένως

$$\{k_n\} = \begin{cases} n = 0 & \rightarrow k_o = |\lambda_o| \in R^+ \\ n \geq 1 & \rightarrow k_n = i \lambda_n \in I \end{cases} \quad (19\alpha)$$

Στην περίπτωση αυτή ($k = 0$), το σύνολο των κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων όπως προκύπτει από τις σχέσεις (9) και (19α) είναι:

$$\tilde{Z}_n(z) = \begin{cases} n = 0 \Rightarrow \tilde{Z}_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2 \cosh^2(k_o h)} - \frac{\mu}{2(k_o)^2}}} \frac{\cosh[k_o(z+h)]}{\cosh(k_o h)} \\ n \geq 1 \Rightarrow \tilde{Z}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2 \cos^2(|k_n| h)} - \frac{\mu}{2|k_n|^2}}} \frac{\cos[k_n(z+h)]}{\cos(k_n)} \end{cases} \quad (19\beta)$$

- (iv) Η περίπτωση του αμιγώς ακουστικού προβλήματος, κατά το οποίο η ελεύθερη επιφάνεια συμπεριφέρεται ως ιδανικά ακουστικά μαλακό σύνορο (ομογενής

συνθήκη Dirichlet στην ελεύθερη επιφάνεια: $p=0$ στην θέση $z=0$) προκύπτει θεωρώντας $\mu \rightarrow \infty$ (ή ισοδύναμα $\frac{1}{\mu} \rightarrow 0$). Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί προηγουμένως στην περίπτωση αυτή $k_o \rightarrow \infty$ και επομένως η ιδιοτιμή αυτή μπορεί να εξαιρεθεί από το σύνολο των ιδιοτιμών δεδομένου ότι το άπειρο εμπεριέχεται (ως σημείο συσσώρευσεως) στο απειροσύνολο $\{k_n\}_{n \geq 1}$.

Οι λοιπές ρίζες $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ της εξίσωσης διασποράς (5) στην περίπτωση αυτή δίδονται από την σχέση:

$$\lambda_n h = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow k_n = \sqrt{k^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}, \quad n \geq 1. \quad (20\alpha)$$

Τέλος, στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων όπως προκύπτει από εφαρμογή της σχέσεως (9) είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n(z) &= \sqrt{\frac{2}{h}} \cos\left[\frac{2n-1}{2h} \pi(z+h)\right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{h}} \left\{ \cos\frac{(2n-1)\pi z}{2h} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2} - \sin\frac{(2n-1)\pi z}{2h} \sin\frac{(2n-1)\pi}{2} \right\} \\ &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{h}} \sin\left[(n-0.5) \frac{\pi z}{h}\right]. \end{aligned} \quad (20\beta)$$

6.5 Η γενική αναπαράσταση της λύσεως του κυματικού προβλήματος σε ημιάπειρη λωρίδα. Επίπεδα κύματα.

Με βάση τον διαχωρισμό του συνόλου των ιδιοτιμών $\{k_n^2\}$ στο πεπερασμένο υποσύνολο των θετικών ιδιοτιμών και στο απειροσύνολο των αρνητικών ιδιοτιμών είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά των αντιστοίχων λύσεων της οριζοντίου εξίσωσης. Πράγματι, από την Εξίσωση (8) του Εδαφίου 6.2 έχουμε

$$X_n(x) = A_n \exp(ik_n x) + B_n \exp(-ik_n x), \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N, \quad (1)$$

ενώ,

$$X_n(x) = A_n \exp(|k_n| \cdot x) + B_n \exp(-|k_n| \cdot x), \quad \text{για } n = N+1, \dots \quad (2)$$

όπου A_n και B_n μιγαδικές, γενικώς, σταθερές.

Εκ των ανωτέρω είμαστε σε θέση να κάνουμε τις ακόλουθες σημαντικές διαπιστώσεις:

- (i) Στην περίπτωση της θετικής ημιάπειρης λωρίδας ($x > a$), οι λύσεις της μορφής $A_n \cdot \exp(|k_n| \cdot x)$, $n = N+1, N+2, \dots$ απειρίζονται με εκθετικό ρυθμό καθώς το $x \rightarrow \infty$. Αυτό έρχεται σε άμεση αντίθεση με την υπόθεση φραγμένου για το κυματικό πεδίο Εξισ. (1δ), Εδαφ. 6.2. Συνεπώς, οι λύσεις αυτές θα πρέπει να απορριφθούν ($A_n = 0$, $n = N+1, N+2, \dots$). Αντίστοιχα, και για τον ίδιο λόγο, στην περίπτωση της αρνητικής ημιάπειρης λωρίδας ($x < a$) θα πρέπει να απορριφθούν οι λύσεις της μορφής: $B_n \exp(-|k_n| \cdot x)$ ($B_n = 0$, $n = N+1, N+2, \dots$).

Επομένως, στην περίπτωση της θετικής ημιάπειρης λωρίδας ($x > a$) η γενική αναπαράσταση του κυματικού πεδίου θα δίδεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^N \{A_n \cdot \exp(ik_n x) + B_n \cdot \exp(-ik_n x)\} \cdot Z_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} B_n \exp(-|k_n| \cdot (x-a)) \cdot Z_n(z), \quad (3\alpha)$$

ενώ στην περίπτωση της αρνητικής ημιάπειρης λωρίδας ($x < a$), η γενική αναπαράσταση του κυματικού πεδίου δίδεται αντιστοίχως στην μορφή:

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^N \{A_n \cdot \exp(ik_n x) + B_n \cdot \exp(-ik_n x)\} \cdot Z_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} B_n \exp(|k_n| \cdot (x-a)) \cdot Z_n(z). \quad (3\beta)$$

Στις Εξισώσεις (3α) και (3β) οι εμφανιζόμενες παράμετροι k_n και οι συναρτήσεις $Z_n(z)$ έχουν προκύψει ως ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις, αντίστοιχα, του κατακόρυφου προβλήματος ιδιοτιμών, Εξισ. (1), Εδαφ. 6.4, και ως εκ τούτου εξαρτώνται από το βάθος h της λωρίδας, την συχνότητα ω του κύματος, και την κατακόρυφη κατανομή της ταχύτητας του ήχου $c(z)$ στην εξεταζόμενη περιοχή. Από τις ίδιες παραμέτρους εξαρτάται επίσης και ο αριθμός N των διαδιδόμενων ιδιομορφών στον επίπεδο κυματοδηγό.

(ii) Παρατηρώντας πιο προσεκτικά τους όρους στο πρώτο άθροισμα του δεξιού μέλους των σχέσεων (3α) και (3β) είμαστε σε θέση να κάνουμε τις ακόλουθες διαπιστώσεις:

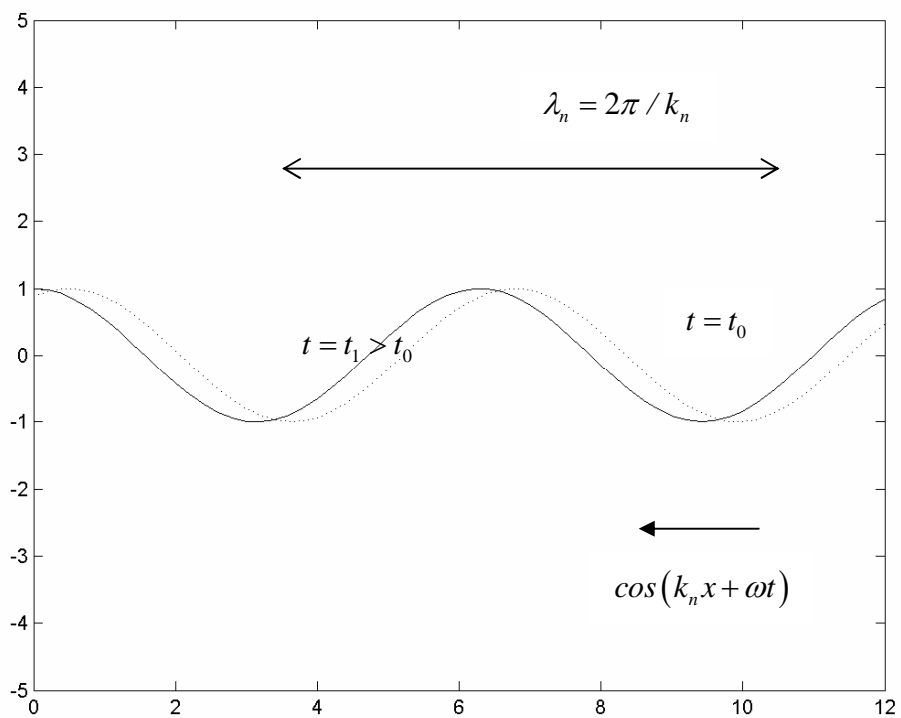
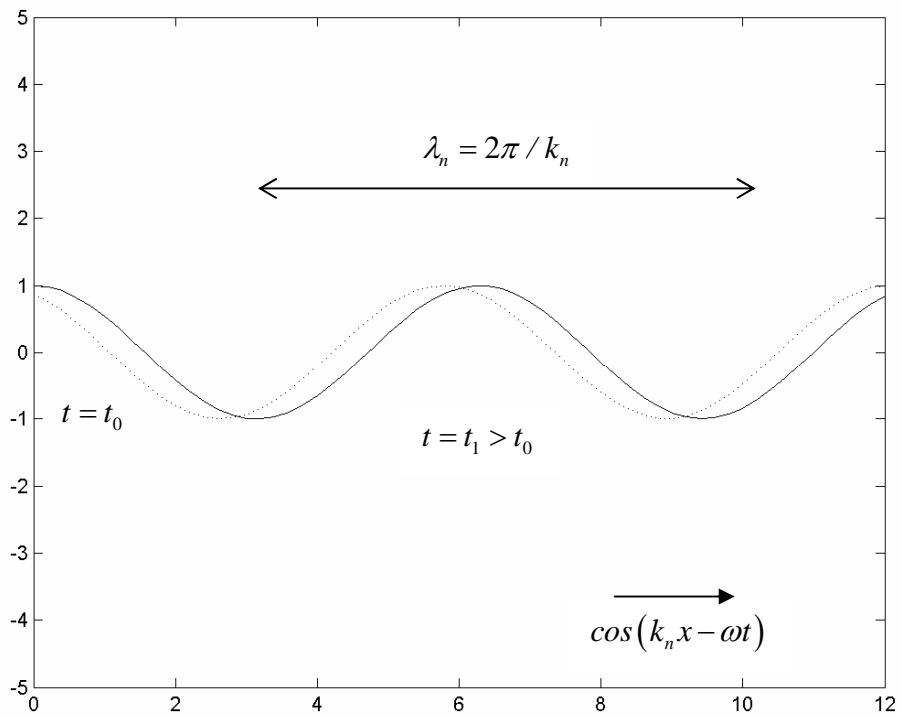
(α) Η συναρτησιακή δομή των όρων αυτών είναι γενικώς της μορφής: $\exp(\pm i k_n x) Z_n(z)$. Η μορφή αυτή μεταφερόμενη στο πεδίο του χρόνου γράφεται ως εξής

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{\pm i k_n x} Z_n(z) e^{-i \omega t} \right\} = \cos(\pm k_n x - \omega t) \quad (4)$$

Έτσι, κάθε ένας από τους N πρώτους όρους του αναπτύγματος της λύσεως αντιστοιχεί σε μορφή κυματικής διαταραχής, η οποία για δεδομένη χρονική στιγμή είναι οριζοντίως συνημιτονοειδής. Ανάλογα με το πρόσημο (\pm) στο όρισμα του συνημιτόνου στην εξ. (4), που αποτελεί και την συνάρτηση φάσεως της κάθε μορφής

$$\chi = \pm k_n \cdot x - \omega t \quad , \quad (5)$$

και με την βοήθεια του Σχήματος 6.7, προκύπτει για τους όρους στο πρώτο άθροισμα του δεξιού μέλους των σχέσεων (3α) και (3β) ότι αποτελούν κυματικές συνιστώσεις οι οποίες διαδίδονται προς τα θετικά ή τα αρνητικά του οριζοντίου άξονα, αντίστοιχα.



Σχήμα 6.7 Μετάδοση των μορφών της κυματικής διαταραχής και ερμηνεία του προστίμου (\pm) στη συνάρτηση της φάσεως $\chi = \pm k_n x - \omega t$.

(β) Για δεδομένη χρονική στιγμή ($t = \text{σταθερό}$) η εξάρτηση της κάθε μιας από τις πρώτες N κυματικές μορφές, Εξισ. (3), στην οριζόντια διάσταση (δηλαδή κατά τη διεύθυνση του x άξονα) είναι περιοδική, με μήκος κύματος που δίδεται από τη σχέση, βλ. Σχήμα 6.4,

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \quad . \quad (6)$$

Συνεπώς, οι ρίζες του υποσυνόλου των θετικών ιδιοτιμών του κατακορύφου προβλήματος $\{k_n\}_{n=0,1,\dots,N}$ αποτελούν ταυτόχρονα τους οριζόντιους κυματαριθμούς των αντιστοίχων ιδιομορφών $\exp(ik_n x)Z_n(z)$. Επειδή οι ιδιομορφές αυτές παραμένουν φραγμένες και μη μηδενικές καθ' όλο το διάστημα $x \in (-\infty, \infty)$, συγχρόνως δε αντιστοιχούν σε κυματικές μορφές που διαδίδονται με διεύθυνση προς τα θετικά ή τα αρνητικά του x -άξονα ονομάζονται *διαδιδόμενες ιδιομορφές (propagating modes)*.

(iii) Η συναρτησιακή δομή των όρων στο δεύτερο άθροισμα στο δεξί μέλος των σχέσεων (3α) και (3β) στην περίπτωση της θετικής ημιάπειρης λωρίδας ($x > a$) είναι της μορφής

$$\exp(-|k_n| x) Z_n(z), \quad (7\alpha)$$

ενώ στην περίπτωση της αρνητικής ημιάπειρης λωρίδας ($x < a$) είναι της μορφής

$$\exp(|k_n| x) \cdot Z_n(z) . \quad (7\beta)$$

Οι όροι αυτοί για $x \rightarrow \infty$ στην θετική λωρίδα, και για $x \rightarrow -\infty$ στην αρνητική λωρίδα, αποσβένονται εκθετικά. Για τον λόγο αυτό οι αντίστοιχες ιδιομορφές της λύσεως $\{\exp(\pm |k_n| \cdot x) Z_n(z)\}_{n=N+1, N+2, \dots}$ ονομάζονται *αποσβενύμενες ιδιομορφές (evanescent modes)*.

(iv) Από τα γενικά αναπτύγματα της λύσης στην θετική και στην αρνητική ημιάπειρη λωρίδα, Εξισώσεις (3α) και (3β), αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του κυματικού πεδίου στο άπειρο:

Θετική ημιάπειρη λωρίδα ($x > a$)

$$\varphi(x, z) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \{A_n \exp(i k_n x) + B_n \exp(-i k_n x)\} Z_n(z) \quad (8\alpha)$$

Αρνητική ημιάπειρη λωρίδα ($x < a$)

$$\varphi(x, z) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \sum_{n=0}^N \{A_n \exp(i k_n x) + B_n \exp(-i k_n x)\} Z_n(z) \quad (8\beta)$$

Ειδικά στην περίπτωση των επιφανειακών κυμάτων (βαρύτητας) έχουμε μόνο μία διαδιδόμενη ιδιομορφή ($N=0$). Έτσι οι ανωτέρω σχέσεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του κυματικού πεδίου στο άπειρο απλουστεύονται ως ακολούθως:

Θετική ημιάπειρη λωρίδα ($x > a$)

$$\varphi(x, z) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \{A_0 \exp(i k_0 x) + B_0 \exp(-i k_0 x)\} Z_0(z) \quad (9\alpha)$$

Αρνητική ημιάπειρη λωρίδα ($x < a$)

$$\varphi(x, z) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \{A_0 \exp(i k_0 x) + B_0 \exp(-i k_0 x)\} Z_0(z) \quad (9\beta)$$

Από τις Εξισ. (8) και (9) συνάγουμε ότι στο άπειρο το κυματικό πεδίο συμπεριφέρεται ως υπέρθεση επιπέδων, αρμονικών, προοδευτικών κυματισμών, οι οποίοι διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

6.6 Η γενική αναπαράσταση της λύσεως του προβλήματος σε εξωτερικό κυλινδρικό χωρίο. Κυλινδρικά κύματα

Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με την κατασκευή της γενικής αναπαράστασης της λύσεως του χρονικά αρμονικού γραμμικοποιημένου προβλήματος $\Phi(r, z; t) = \text{Re} \{ \varphi(r, z; k, \mu) \exp(-i\omega t) \}$, όπου χρησιμοποιήθηκε και η ιδιότητα ανεξαρτησίας του πεδίου από γωνία αζιμουθίου θ , στο εξωτερικό κυλινδρικό χωρίο $K_a = \{(r, \theta, z), r \geq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -h \leq z \leq 0\}$, οριζοντίως σταθερών παραμέτρων, βλ. Σχήμα 6.2.

Η διαφορική διατύπωση του προβλήματος γράφεται στην ακόλουθη μορφή

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} > 0, \quad (x, z) \in \widehat{K}_a, \quad (1\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \varphi = 0, \quad \mu = \frac{\omega^2}{g} > 0, \quad z = 0, \quad (1\beta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad (1\gamma)$$

όπου $k(z) = \frac{\omega}{c(z)}$ η παράμετρος των εσωτερικών (ακουστικών) κυμάτων, $\mu = \frac{\omega^2}{g}$ η παράμετρος των επιφανειακών κυμάτων (βαρύτητας), και $\widehat{K}_a = \{(r, z), r \geq a, -h \leq z \leq 0\}$.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, οι ανωτέρω παράμετροι, όπως και η γεωμετρία των συνόρων, υποτίθενται οριζοντίως αμετάβλητες. Οι ανωτέρω εξισώσεις συμπληρώνονται από την απαίτηση του φραγμένου για το κυματικό πεδίο και τις παραγώγους του στο άπειρο

$$|\varphi| < C_1, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| < C_2, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| < C_3, \quad \text{για } r \rightarrow \infty, \quad (1\delta)$$

όπου C_1, C_2, C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για την επίλυση του ανωτέρ προβλήματος είναι η ακόλουθη:

1. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών θα κατασκευάσουμε την γενική λύση του προβλήματος που απαρτίζεται από τις Εξισώσεις (1α), (1β) και (1γ).
2. Από το σύνολο των λύσεων του ανωτέρω μερικού προβλήματος θα επιλέξουμε τις λύσεις εκείνες οι οποίες, επιπλέον, ικανοποιούν την απαίτηση φραγμένου (1δ).

Διαδικασία χωρισμού μεταβλητών:

Θεωρούμε το ακόλουθο μερικό πρόβλημα:

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (r, z) \in \widehat{K}_a \quad (2\alpha)$$

$$\varphi_{,z} - \mu\varphi = 0, \quad \text{στην ελεύθερη επιφάνεια } z = 0 \quad (2\beta)$$

$$\varphi_{,z} = 0, \quad \text{στον πυθμένα } z = -h \quad (2\gamma)$$

Στην συνέχεια, αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\varphi(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad . \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την μορφή (3) στην εξίσωση Helmholtz (2α) παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$R(r) \cdot Z(z) \cdot \left\{ \frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z) + k^2(z) Z(z)}{Z(z)} \right\} = 0, \quad (4)$$

από την οποία συνάγουμε ότι για $R(r) \neq 0$ και $Z(z) \neq 0$ θα πρέπει να ισχύει

$$-\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{Z''(z) + k^2(z) \cdot Z(z)}{Z(z)} = k_n^2 . \quad (5)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση k_n δηλώνει τις σταθερές χωρισμού μεταβλητών οι οποίες, όπως ήδη έχει αναφερθεί, θεωρούνται μιγαδικές σταθερές ($k_n \in C$), βλ. Εδαφ. 4.3 και 4.4. Αντικαθιστώντας την μορφή (3) στις συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας (2α) και πυθμένα (2β) λαμβάνουμε

$$R(r) \{Z'(z) - \mu Z(z)\} = 0, \quad z = 0 \quad , \quad (6)$$

και

$$R(r)Z'(z) = 0, \quad z = -h \quad , \quad (7)$$

αντιστοίχως.

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις ο τόνος (') δηλώνει παραγωγή της συναρτήσεως ως προς την μεταβλητή από την οποία εξαρτάται. Από το πρώτο τμήμα της εξισώσεως (5) παράγεται εύκολα η ακόλουθη οριζόντια εξίσωση

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + k_n^2 \cdot R(r) = 0 . \quad (8)$$

Από το δεύτερο τμήμα της εξισώσεως (5), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (6) και (7), καταλήγουμε στο ίδιο κατακόρυφο πρόβλημα ιδιοτιμών όπως στην περίπτωση της ημιάπειρης λωρίδας A_a , βλ. Εξισ. (9), Εδαφ. 4.2. Η επίλυση του κατακορύφου προβλήματος ιδιοτιμών (δηλαδή, η εύρεση των συνόλων $\{k_n\}_{n=0,1,\dots}$, $\{Z_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$) και οι ιδιότητες του παρουσιάστηκαν αναλυτικά στα Εδάφια 4.3 και 4.4 του παρόντος Κεφαλαίου.

Με βάση τον διαχωρισμό του συνόλου των ιδιοτιμών $\{k_n^2\}$ στο πεπερασμένο υποσύνολο των θετικών ιδιοτιμών και στο απειροσύνολο των αρνητικών ιδιοτιμών, είμαστε σε θέση να

προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά των αντιστοίχων λύσεων της οριζοντίου εξίσωσης (9). Από την μαθηματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι η δευτεροτάξια απλή διαφορική εξίσωση (9)

- (i) στην περίπτωση $k_n^2 > 0$, αντιστοιχεί στην εξίσωση Bessel μηδενικής τάξεως, η οποία έχει την ακόλουθη γενική λύση

$$R(r) = aJ_0(k_n r) + bY_0(k_n r) = AH_0^{(1)}(k_n r) + BH_0^{(2)}(k_n r), \quad (9\alpha)$$

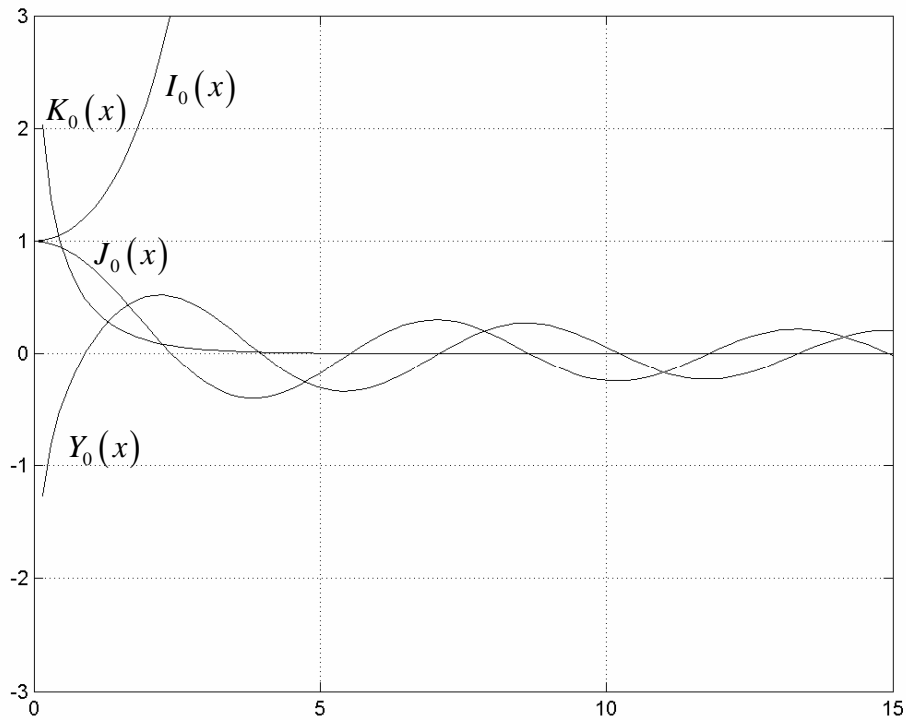
και

- (ii) στην περίπτωση $k_n^2 < 0$, αντιστοιχεί στην τροποποιημένη εξίσωση Bessel μηδενικής τάξεως, η οποία έχει την ακόλουθη γενική λύση

$$R(r) = aK_0(|k_n|r) + bI_0(|k_n|r), \quad (9\beta)$$

όπου a , b και A , B σταθεροί (απροσδιόριστοι) συντελεστές, και $H_0^{(1)}(x)$ και $H_0^{(2)}(x)$ είναι οι συναρτήσεις Hankel μηδενικής τάξεως πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα, βλ. π.χ. Abramowitz & Stegun (1972).

Στις ανωτέρω σχέσεις $J_0(x)$ και $Y_0(x)$ είναι οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel μηδενικής τάξεως, και $K_0(x)$ και $I_0(x)$ είναι οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τροποποιημένης εξίσωσης Bessel μηδενικής τάξεως, βλ. π.χ. Abramowitz & Stegun (1972). Οι συναρτήσεις αυτές εικονίζονται στο Σχ. 6.8.



Σχήμα 6.8 Οι συναρτήσεις Bessel $J_0(x)$ και $Y_0(x)$, και $K_0(x)$ και $I_0(x)$.

Μαλιστα δε ισχύουν οι ακόλουθες συνδετικές σχέσεις

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + i Y_0(x), \quad H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - i Y_0(x), \quad (10\alpha)$$

$$K_0(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix), \quad I_0(x) = -i J_0(ix), \quad x \in R \quad (10\beta)$$

Από την γνωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά των ανωτέρω συναρτήσεων $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $K_0(x)$ και $I_0(x)$ για μεγάλες τιμές του ορίσματος x είμαστε σε θέση να δώσουμε φυσική ερμηνεία στον κάθε όρο που εμφανίζεται στις σχέσεις (9). Πράγματι, για $x \gg 1$ ισχύουν οι ακόλουθες ασυμπτωτικές εκφράσεις, βλ., π.χ., Abramowitz & Stegun (1972),

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (11\alpha)$$

και

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x), \quad I_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(x) \quad (11\beta)$$

Εξ' όλων των ανωτέρω καταλήγουμε τελικώς ότι η γενική λύση της οριζοντίου εξίσωσης στην περίπτωση $k_n^2 > 0$ είναι

$$R_n(r) = A_n H_0^{(1)}(k_n r) + B_n H_0^{(2)}(k_n r), \quad \text{για } n = 0, 1, \dots, N \quad (12\alpha)$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ανωτέρω μορφής για μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις είναι

$$R_n(r) = A_n \sqrt{\frac{\pi}{2k_n r}} \exp\left(i\left(k_n r - \frac{\pi}{4}\right)\right) + B_n \sqrt{\frac{\pi}{2k_n r}} \exp\left(-i\left(k_n r - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (12\beta)$$

και αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό από ένα εξερχόμενο προοδευόντα κυλινδρικό κυματισμό (με κατεύθυνση διάδοσης προς μεγαλύτερες οριζόντιες αποστάσεις r) και από ένα εισερχόμενο προοδευόντα κυματισμό (με κατεύθυνση διάδοσης προς μικρότερα r). Το πλάτος και των δύο κυματισμών εξασθενεί γεωμετρικά, δηλαδή με ρυθμό αντιστρόφως ανάλογο του εμβαδού της κυλινδρικής επιφάνειας σε κάθε ακτίνα r . Επειδή οι ιδιομορφές $R_n(r) Z_n(z)$, για $n = 0, 1, \dots, N$, αντιστοιχούν σε διαδιδόμενες κυματομορφές ονομάζονται *διαδιδόμενες ιδιομορφές (propagating modes)*.

Οι λύσεις της μορφής $I_0(|k_n| r)$ που εμφανίζονται στην Εξίσωση (9β) δεν ικανοποιούν την απαίτηση φραγμένου, Εξισ. (1δ), όπως εύκολα προκύπτει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της τροποποιημένης συναρτήσεως $I_0(x)$ για μεγάλες τιμές του ορίσματος (βλ. και Εξισ. (11β)). Ο μόνος τρόπος να ικανοποιηθεί η απαίτηση φραγμένου είναι να τεθεί $b=0$ στην Εξισ. (9β).

Επομένως, η γενική λύση της οριζοντίου εξισώσεως στην περίπτωση $k_n^2 < 0$ θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$R_n(r) = a_n K_0(|k_n| r) = A_n H_0^{(1)}(k_n r) , \quad (13\alpha)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και η συνδετική σχέση (10β). Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ανωτέρω μορφής για μεγάλες οριζόντιες αποστάσεις προκύπτει με εφαρμογή της Εξισ. (9β)

$$R_n(r) = -i A_n \sqrt{\frac{2}{\pi |k_n| r}} \exp(-|k_n| r) . \quad (13\beta)$$

Έτσι στην περίπτωση $n > N$ (δηλαδή όταν $k_n^2 < 0$) οι προκύπτουσες ιδιομορφές $R_n(r) Z_n(z)$ αντιστοιχούν σε εκθετικά αποσβενόμενους κυλινδρικούς κυματισμούς, οι οποίοι δεν μεταφέρουν κυματική ισχύ (δηλαδή πρόκειται περί αμιγώς στασίμων κυματομορφών). Κατ' αυτήν την έννοια, οι ιδιομορφές $R_n(r) Z_n(z)$, για $n > N$ ονομάζονται *αποσβενόμενες ιδιομορφές (evanescent modes)*.

Με βάση όλα τα ανωτέρω, η γενική αναπαράσταση της λύσεως στο εξωτερικό κυλινδρικό χωρίο $K_a = \{(r, \theta, z), r \geq a, 0 \leq \theta < 2\pi, -h \leq z \leq 0\}$, θα δίνεται από την σχέση

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^N (A_n H_0^{(1)}(k_n r) + B_n H_0^{(2)}(k_n r)) Z_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n H_0^{(1)}(k_n r) Z_n(z) \quad (14)$$

Από τα γενικά αναπτύγματα της λύσης στο εξωτερικό κυλινδρικό χωρίο, Εξισώσεις (3α) και (3β), αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του κυματικού πεδίου στο άπειρο:

$$\varphi(r, z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (A_n H_0^{(1)}(k_n r) + B_n H_0^{(2)}(k_n r)) Z_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{n=0}^N \left(\frac{A_n e^{i(k_n r - \frac{\pi}{4})} + B_n e^{-i(k_n r - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{k_n}} \right) Z_n(z) . \quad (15)$$

Ειδικά στην περίπτωση των επιφανειακών κυμάτων (βαρύτητας) έχουμε μόνο μία διαδιδόμενη ιδιομορφή ($N=0$). Έτσι, οι ανωτέρω σχέσεις για την γενική αναπαράσταση του κυματικού πεδίου και την ασυμπτωτική συμπεριφορά του στο άπειρο απλουστεύονται ως ακολούθως:

$$\varphi(r, z) = (A_0 H_0^{(1)}(k_0 r) + B_0 H_0^{(2)}(k_0 r)) Z_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_0^{(1)}(k_n r) Z_n(z), \quad (16\alpha)$$

και

$$\varphi(r, z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (A_0 H_0^{(1)}(k_0 r) + B_0 H_0^{(2)}(k_0 r)) Z_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left(\frac{A_0 e^{i(k_0 r - \frac{\pi}{4})} + B_0 e^{-i(k_0 r - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{k_0}} \right) Z_0(z), \quad (16\beta)$$

αντιστοίχως.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications
 Coddington, E.A., Levinson, N., 1955, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill.
 Morse, P.M., Feshbach, H., 1953, *Methods of Theoretical Physics*, Mc Graw-Hill.

**Ανομοιογενείς κυματοδηγοί με μεταβαλλόμενα σύνορα
Κυματοδήγηση στο θαλάσσιο περιβάλλον**

7.1 Η μέθοδος συζευγμένων ιδιομορφών για τη διάδοση επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας σε γενική βαθυμετρία

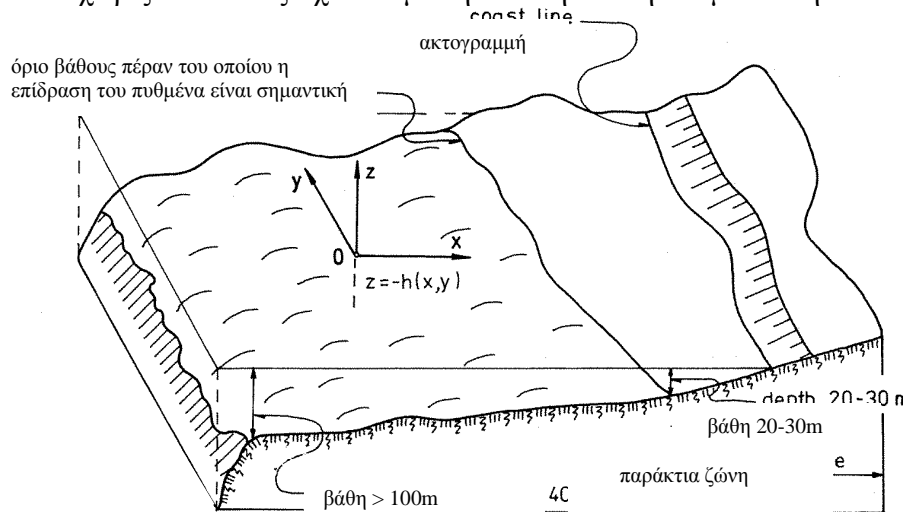
7.2 Ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον:

“A coupled-mode method for acoustic propagation and scattering in inhomogeneous ocean waveguides”, *Proc. ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2014*, June 8-13, 2014, San Francisco, California

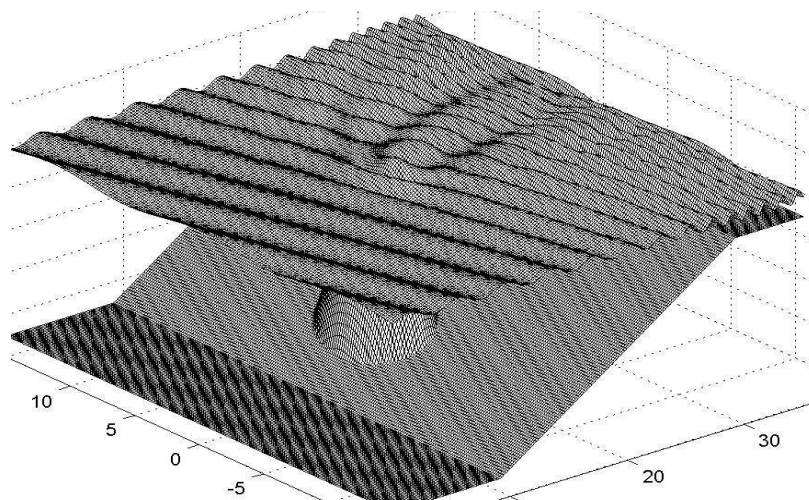
7.1 Διάδοση υδάτινων κυματισμών βαρύτητας σε γενική βαθυμετρία

7.1.1 Εισαγωγικά

Η διάδοση υδάτινων κυματισμών βαρύτητας σε περιβάλλον μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, βλ. Σχ.1 και 2, και η εξέταση των φαινομένων ανάκλασης-διάθλασης-περίθλασης από την αλληλεπίδραση με τον θαλάσσιο πυθμένα, είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που βρίσκει σημαντικές εφαρμογές. Αν και οι μη γραμμικές επιδράσεις καθίστανται σημαντικές καθώς προσεγγίζεται η ακτογραμμή, μια συνεπής γραμμική λύση θεωρείται πολύ χρήσιμη, παρέχοντας πολλές πληροφορίες σχετικά με το πεδίο των κυματισμών και τις επιδράσεις τους στο παράκτιο περιβάλλον και στις κατασκευές. Επιπλέον, η γραμμική θεωρία χρησιμεύει ως σημείο εκκίνησης για οποιοδήποτε ασθενώς μη γραμμικό μοντέλο. Στο παρόν μέρος, παρουσιάζεται ένα συνεπές μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών που αναπτύχθηκε αρχικά από τους Athanassoulis & Belibassakis (1999) και επεκτάθηκε στις τρεις διαστάσεις από τους Belibassakis et al (2001), το οποίο αντιμετωπίζει πολύ αποτελεσματικά το γραμμικό πρόβλημα διάδοσης, χωρίς απλουστεύσεις σχετικά με την κατακόρυφη δομή του πεδίου κύματιςμών και χωρίς υποθέσεις σχετικά με την κλίση και την καμπυλότητα του πυθμένα.



Σχ.1 Διάδοση κυματισμών από την ανοικτή θάλασσα προς την ακτή (Massel 1989)



Σχ.2 Διάδοση κυματισμών πάνω από κεκλιμένο πυμένα με τη παρουσία πεπερασμένου σκεδαστή (υποθαλάσσιος ύφαλος), βλ. Dingemans 1997, Belibassakis et al 2001)

Θεωρητικές πτυχές του προβλήματος διάδοσης κυματισμών μικρού πλάτους (και μικρής κλίσης της ελεύθερης επιφάνειας), οι οποίες αφορούν κυρίως αποτελέσματα μοναδικότητας της λύσης έχουν παρουσιαστεί, υπό διάφορες υποθέσεις, από τους Vainberg & Maz'ja (1973), Fitz-Gerald (1976), Gerald & Grimshaw (1979), Simon & Ursell (1984), Kuznetsov (1991,1993) και άλλους, και σχετική περιγραφή διατίθεται στο σύγγραμμα Evans & Kuznetsov (1997). Εξάλλου, είναι διαθέσιμες σήμερα αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού που βασίζονται σε πεπερασμένα στοιχεία, συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις, υβριδικές τεχνικές. βλέπε, π.χ., Mei (1978, 1983), Euvrard et al. (1981), Yeung (1982), Porter & Chamberlain (1997). Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί γενικές αριθμητικές τεχνικές που βασίζονται σε διακριτοποίηση τοπογραφίας ή σε μετασχηματισμό του χωρίου, π.χ., Devillard et al. (1988), Rey (1992) και Evans & Linton (1994). Ωστόσο, το υπολογιστικό κόστος αυτών των γενικών τεχνικών είναι υψηλό, ιδιαίτερα για διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις και στις τρεις διαστάσεις. Λόγω αυτού του γεγονότος, έχει δοθεί έμφαση στην ανάπτυξη προσεγγιστικών εξισώσεων που μοντελοποιούν τα βασικά χαρακτηριστικά και, επομένως, είναι καλύτερα προσαρμοσμένα για την διάδοση κυμάτων μεγάλης απόστασης.

Ένα ειδικό χαρακτηριστικό των υδάτινων κυματισμών είναι ότι *ο χώρος διάδοσης δεν συμπίπτει με τον φυσικό χώρο*. Ενώ ο τελευταίος είναι το πραγματικό χωρίο (μια λωρίδα μεταβαλλόμενων χαρακτηριστικών), η διάδοση λαμβάνει χώρα στο οριζόντιο επίπεδο (επιφάνεια του νερού). Αυτό αποτελεί και την εκδήλωση του επιφανειακού χαρακτήρα των υδάτινων κυματισμών, και οδηγεί στην αναδιατύπωση του προβλήματος διάδοσης ως μια μη-τοπική κυματική εξίσωση στον οριζόντιο χώρο. Στην περίπτωση του γραμμικοποιημένου προβλήματος, όπου εστιάζουμε στην παρούσα εργασία, η κατάλληλη μη-τοπική εξίσωση μπορεί να λάβει τη μορφή μιας ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (Fitz-Gerald 1976), ή ψευδο-διαφορικής εξίσωσης (Miles 1977, Craig & Sulem 1993). Μια άλλη δυνατότητα, η οποία θα συζητηθεί λεπτομερώς στην παρούσα εργασία, είναι να αναδιατυπωθεί το πρόβλημα ως ένα απειρο-διάστατο σύστημα οριζόντιων εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές. Μια σαφής συνέπεια του μη τοπικού χαρακτήρα του προβλήματος των υδάτινων κυμάτων στο χώρο διάδοσης είναι ότι κάθε μοντέλο μιας εξίσωσης στην οριζόντια κατεύθυνση δεν μπορεί να αναπαραστήσει όλα τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Παρ' όλα αυτά, λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος, έχουν προταθεί και μελετηθεί πληθώρα μοντέλων μιας εξίσωσης, καθένα με το αντίστοιχο εύρος εφαρμογής του και τα πλεονεκτήματά του.

Ιστορικά, ο Eckart (1952) πρότεινε ένα μοντέλο τύπου μιας εξίσωσης για ενδιάμεσο βάθος νερού. Ο Berkoff (1972, 1976) πρότεινε ένα ελαφρώς πιο γενικό μοντέλο, που αναφέρεται ως εξίσωση ήπιας κλίσης. Και οι δύο συγγραφείς χρησιμοποίησαν προκαθορισμένες κατακόρυφες κατανομές του δυναμικού κύματος και εφάρμοσαν μια διαδικασία ολοκλήρωσης προκειμένου να ληφθούν προσεγγιστικές εξισώσεις στον χώρο διάδοσης. Άλλες παραδοχές παρόμοιων ή βελτιωμένων μοντέλων τύπου μιας εξίσωσης, έχουν παρουσιασθεί από τους Smith & Sprinks (1975), Lozano & Meyer (1976), Booij (1981), Radder & Dingemans (1985,1986), Massel (1993). Σχετική συζήτηση υπάρχει στις εργασίες/συγγράμματα των Mei (1983), Massel (1989), Miles (1991), Porter & Chamberlain (1997), καθώς και Dingemans (1997). Σε γενικές γραμμές, οι εξισώσεις ήπιας κλίσης μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές για κλίσεις/πυθμένα έως και 1:3 (Booij 1983, Berkhoff et al., 1982) και μερικές από αυτές, όπως οι κατάλληλα τροποποιημένες από τους Kirby (1986) για τη μελέτη φαινομένων συντονισμού Bragg, που συμβαίνει όταν ένα διαδιδόμενο κύμα δέχεται ενός πυθμένα με πτυχώσεις. Τέτοια προβλήματα έχουν μελετηθεί με ασυμπτωτικές τεχνικές από τους Davies & Heathershaw (1984), Mei (1985) και Hara & Mei (1987). Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των περισσότερων μοντέλων ήπιας κλίσης είναι ότι, παρά τον

κατά προσέγγιση χαρακτήρα τους, είναι σε θέση να ικανοποιήσουν τη διατήρηση της ροής της κυματικής ισχύος κατά τη διάδοση σε ανομοιογενή περιβάλλοντα.

Ο βασικός περιορισμός, που είναι εγγενής σε κάθε μοντέλο τύπου μιας εξίσωσης, είναι ότι η κατακόρυφη δομή του πεδίου κύματος δίνεται από μια συγκεκριμένη κατανομή. Αυτός ο περιορισμός εισάγει σφάλματα όταν η τοπογραφία του πυθμένα είναι περίπλοκη και το βάθος είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε το πεδίο ταχύτητας να αλληλεπιδρά ισχυρά με τον πυθμένα. Η βελτίωση των προβλεπτικών ικανοτήτων των μοντέλων τύπου ήπιας κλίσης μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μια γενικότερη κατανομή για τη κατακόρυφη δομή του πεδίου κυματισμών. Οι Massel (1993) και Porter & Staziker (1995) παρουσίασαν τέτοιες βελτιώσεις, που ονομάζονται εκτεταμένες εξισώσεις ήπιας κλίσης, όπου το κατακόρυφο προφίλ του δυναμικού κύματος σε οποιαδήποτε οριζόντια θέση αναπαρίσταται από σειρά τοπικών ιδιομορφών που περιλαμβάνουν την διαδιδόμενη και τις αποσβενόμενες ιδιομορφές. Τα πλάτη των ιδιομορφών αποτελούν άγνωστες ποσότητες του συστήματος, και υπολογίζονται, χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση Galerkin (Massel 1993) ή μια μεταβολική αρχή (Porter & Staziker 1995). Με αυτό το τρόπο αποκτάται ένα άπειρο σύνολο συζευγμένων εξισώσεων ως προς τα άγνωστα πλάτη των ιδιομορφών, βλ. Porter & Chamberlain (1997). Παρόμοια συστήματα έχουν επίσης αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται εκτενώς στο πλαίσιο της υδροακουστικής, π.χ., Boyles (1984) και Fawcett (1992).

Οι αναπαραστάσεις τοπικών ιδιομορφών που προτάθηκαν από τους Massel (1993) και Porter & Staziker (1995), ικανοποιούν την γραμμικοποιημένη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας αλλά διαθέτουν μηδενική κατακόρυφη παράγωγο στο τοπικό βάθος. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πλήρης στη περίπτωση επίπεδου πυθμένα και έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος διάδοσης του κυματισμού του νερού σε υποθαλάσσιο σκαλοπάτι (βλέπε π.χ. Newman 1965, Miles 1967, Mei & Black 1969) ή ακολουθία σκαλοπατιών (Devillard et al., 1988, O'Hare & Davies 1992, 1993, Rey 1992). Ωστόσο, για συνεχώς μεταβαλλόμενη βαθυμετρία η ανωτέρω τεχνική είναι ασυμβίβαστη με τη συνθήκη του Neumann σε κεκλιμένο πυθμένα, καθώς κάθε μία από τις κατακόρυφες ιδιομορφές παραβιάζει τη συνθήκη μη εισχώρησης στον πυθμένα και το ίδιο συμβαίνει και με τη συνολική υπέρθεση των ιδιομορφών. Το γεγονός αυτό έχει δύο σημαντικές συνέπειες. Πρώτον, το πεδίο ταχύτητας (κάθετη και εφαπτόμενη ταχύτητα) κοντά στο πυθμένα δεν αναπαρίσταται σωστά και, η ενέργεια του διαδιδόμενου κυματισμού δεν διατηρείται. Επίσης, η σύγκλιση της σειράς τοπικών ιδιομορφών στη λύση του προβλήματος είναι αργή. Αυτές οι αρνητικές επιπτώσεις διορθώνονται με τον εμπλουτισμό της σειράς τοπικών ιδιομορφών για την αναπαράσταση του δυναμικού κύματος με έναν πρόσθετο όρο, ο οποίος ονομάζεται ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα.

Στην συνέχεια το πλήρες, γραμμικοποιημένο, πρόβλημα συνοριακών τιμών διατυπώνεται στο πεδίο συχνότητας. Δεδομένου ότι η λωρίδα νερού εκτείνεται στο άπειρο στις οριζόντιες κατευθύνσεις, γίνεται παραδοχή ότι στο βάθος σε μεγάλες αποστάσεις καθίσταται σταθερό (αν και μπορεί να είναι διαφορετικό σε διαφορετικές κατευθύνσεις). Στη συνέχεια, το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως πρόβλημα μετάδοσης στο ενδιάμεσο φραγμένο χωρίο μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, όπου εστιάζεται το ενδιαφέρον μας για τη μελέτη των φαινομένων διάθλασης-ανάκλασης-περίθλασης. Αυτό επιτρέπει τη διατύπωση του υδροδυναμικού προβλήματος με ισοδύναμη μεταβολική αρχή. Ακολούθως περιγράφεται η πλήρης αναπαράσταση του δυναμικού ταχύτητας, που θα χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με την μεταβολική αρχή. Στην συνέχεια περιγράφεται ο εμπλουτισμός της σειράς τοπικών ιδιομορφών με ένα πρόσθετο όρο (ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα), επιτρέποντας την ακριβή ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης στον πυθμένα και τη διατήρηση της κυματικής

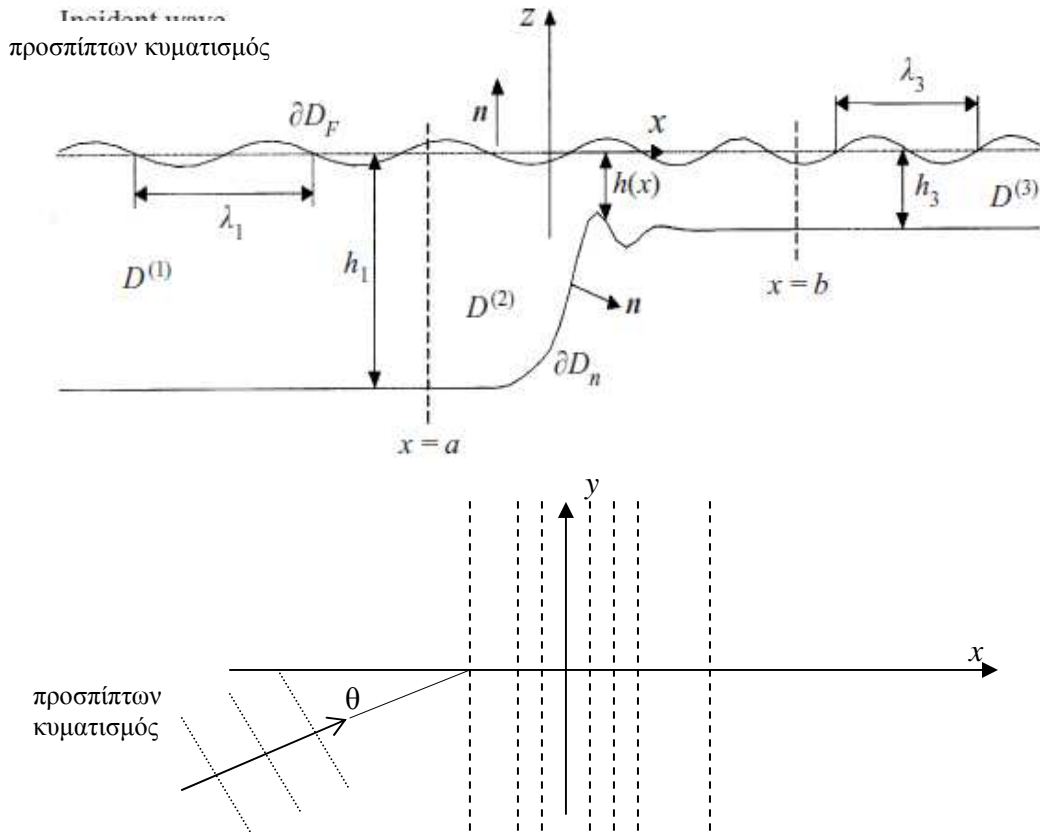
ενέργειας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών ως προς τα άγνωστα πλάτη, μαζί με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, και η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης με την περικοπή της εμπλουτισμένης σειράς τοπικών ιδιομορφών σε ένα πεπερασμένο αριθμό όρων διατηρώντας της διαδιδόμενη ιδιομορφή, την ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα και έναν επαρκή αριθμό αποσβενόμενων ιδιομορφών που απαιτούνται για την επίτευξη αριθμητικής σύγκλισης. Παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορα επιλεγμένα παραδείγματα και δείχνεται η σημαντική βελτίωση στη σύγκλιση που επιτυγχάνεται με το παρόν μοντέλο. Επιπλέον, με τη βοήθεια μιας συστηματικής αριθμητικής διερεύνησης, διαπιστώνεται ότι στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, λίγοι όροι στην εμπλουτισμένη αναπαράσταση είναι επαρκείς για να υπολογισθεί με ακρίβεια το πεδίο ταχύτητας σε όλο το χωρίο έως και (συμπεριλαμβανομένων) των συνόρων.

Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του παρουσιαζόμενου μοντέλου είναι ότι, αν και είναι σε θέση να περιγράψει το πλήρες γραμμικό πρόβλημα, μπορεί φυσικά να απλουστευθεί σε μοντέλα ήπιας κλίσης σε υποπεριοχές όπου το επιτρέπουν οι φυσικές συνθήκες, ελαττώνοντας σημαντικά το απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος

7.1.2. Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε μια λωρίδα υγρού μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 3. Το χωρίο D_{3D} φράσσεται εκ των άνω από την ελεύθερη επιφάνεια $\partial D_{F,3D}$ και κάτωθεν από τον αδιαπέρατο πυθμένα $\partial D_{\Pi,3D}$. Η βαθυμετρία περιγράφεται από τη συνάρτηση βάθους νερού $h(x)$ η οποία μπορεί να παρουσιάζει μια γενική μεταβολή σε ένα ενδιάμεσο τμήμα, από αρχικό βάθος h_1 στην περιοχή πρόσπτωσης του κύματος σε ένα τελικό βάθος h_3 στη περιοχή διάδοσης του κύματος. Χάριν απλότητας θεωρούμε εδώ ότι η επιφάνεια του θαλάσσιου πυθμένα είναι ανεξάρτητη από την εγκάρσια μεταβλητή, δηλαδή ο πυθμένας χαρακτηρίζεται από παράλληλες ισοβαθείς. Δεν επιβάλεται περιορισμός ως προς τη κλίση πυθμένα και έτσι το μοντέλο που θα περιγραφεί στη συνέχεια επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής αντιστοίχων μοντέλων-εξισώσεων τύπου ήπιας κλίσης πυθμένα (mild slope equations).

Το πεδίο διεγείρεται από ένα αρμονικό μονοχρωματικό προσπίπτοντα κυματισμό (παράλληλο επίπεδο κύμα), το οποίο διαδίδεται με κατεύθυνση ως προς τις ισοβαθείς. Στην παρούσα εργασία, όλα τα χαρακτηριστικά μήκη, δηλ. το μήκος κύματος, το μήκος μεταβολής του πυθμένα και το βάθος, θεωρούνται συγκρίσιμα. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος ρηχότητας h/λ δεν θεωρείται ούτε αρκετά μεγάλος (> 0.5) ούτε αρκετά μικρός (< 0.07), αποκλείοντας την δυνατότητα εφαρμογής ασυμπτωτικών μεθόδων στα πλαίσια θεώρησης βαθέως ή ρηχού νερού, αντίστοιχα.



Σχήμα 3. Διάδοση αρμονικών κυματισμών σε περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας.

Πριν προχωρήσουμε στη λεπτομερέστερη διατύπωση του προβλήματος θα εισάγουμε κάποια γεωμετρικά μεγέθη και συμβολισμούς. Εισάγεται ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, με αρχή σε κάποιο σημείο της μέσης στάθμης νερού (στην περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας), όπου ο άξονας z έχει φορά προς τα πάνω και ο άξονας y είναι παράλληλος με τις ισοβαθείς, Σχήμα 3. Το τριδιάστατο χωρίο D_{3D} είναι της μορφής $D_{3D} = D \times R$, όπου D το αντίστοιχο χωρίο στο κατακόρυφο επίπεδο και $R = (-\infty, +\infty)$. Με βάση αυτό

$$D_{3D} = \{(x, y, z): (x, y) \in R^2, -h(x) < z < 0\}, \quad D = \{(x, z): x \in R, -h(x) < z < 0\}. \quad (2.1)$$

Η συνάρτηση $h(x)$ δηλώνει το τοπικό βάθος του νερού μετρούμενο από την αδιατάρακτη (μέση) στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας. Θεωρείται συνεχής και λεία συνάρτηση

$$h(x) \in C^2(R), \quad \text{supp}\{h'(x)\} \subseteq (a, b), \quad (2.2)$$

$$h(x) = h(a) = h_1 \quad \text{για } x \leq a, \quad h(x) = h(b) = h_3 \quad \text{για } x \geq b, \quad (2.3)$$

όπου $C^2(R)$ δηλώνει το χώρο των διπλά συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $\text{supp}\{h'(x)\}$ δηλώνει το φορέα στήριξης της συνάρτησης κλίσεως πυθμένα δηλαδή όλα τα σημεία x για τα οποία $f'(x) \neq 0$. Η παρούσα θεωρία επεκτείνεται και σε περιοχές που περιλαμβάνουν ασυνέχειες βαθυμετρίας, όπως υποθαλάσσια σκαλοπάτια, με την εισαγωγή

καταλλήλων κατακορύφων διαχωριστικών επιφανειών (διεπιφανειών) και συνθηκών συναρμογής.

Το τρισδιάστατο χωρίο D_{3D} διαχωρίζεται σε τρία υποχωρία $D_{3D}^{(i)} = D^{(i)} \times R$, $i = 1, 2, 3$, τα οποία ορίζονται ως ακολούθως: $D_{3D}^{(1)}$ είναι το υποχωρίο σταθερού βάθους h_1 για $x < a$, $D_{3D}^{(3)}$ είναι το υποχωρίο επίσης σταθερού βάθους h_3 για $x > b$, και το $D_{3D}^{(2)}$ είναι το ενδιάμεσο υποχωρίο μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των $D_{3D}^{(1)}$ και $D_{3D}^{(3)}$. Τα υποχωρία αυτά $D^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, ορίζονται ως ακολούθως:

$$D^{(i)} = \left\{ (x, z) : \begin{cases} x < a, -h_1 < z < 0, & i=1 \\ a < x < b, -h(x) < z < 0, & i=2 \\ x > b, -h_3 < z < 0, & i=3 \end{cases} \right\} \quad (2.4)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $h_1 > h_3$, δηλαδή το υποχωρίο $D^{(1)}$ αντιστοιχεί στην περιοχή βαθύτερου νερού, όπου θα οριστεί ο προσπίπτων κυματισμός, και $D^{(3)}$ το υποχωρίο ρηχότερου νερού, προς το οποίο διαδίδεται ο κυματισμός. Ο παραπάνω διαχωρισμός αυτός ισχύει και για τις συνοριακές επιφάνειες $\partial D_{F,3D} = \partial D_F \times R$ και $\partial D_{H,3D} = \partial D_H \times R$. Έτσι, οι γραμμές (καμπύλες) ∂D_F και ∂D_H διαχωρίζονται αντίστοιχα σε τρία τμήματα η κάθε μια, $\partial D_F = \partial D_F^{(1)} \cup \partial D_F^{(2)} \cup \partial D_F^{(3)}$, και $\partial D_H = \partial D_H^{(1)} \cup \partial D_H^{(2)} \cup \partial D_H^{(3)}$. Επίσης, θεωρούμε τις κατακόρυφες διεπιφάνειες $\partial D_{I,3D}^{(12)} = \partial D_I^{(12)} \times R$ και $\partial D_{I,3D}^{(23)} = \partial D_I^{(23)} \times R$, με τις οποίες ξεχωρίζουν το υποχωρίο $D_{3D}^{(1)}$ από το υποχωρίο $D_{3D}^{(2)}$, και, το $D_{3D}^{(2)}$ από το $D_{3D}^{(3)}$, αντίστοιχως. Παρατηρούμε, στο Σχήμα 3 ότι τα $\partial D_I^{(12)}$ και $\partial D_I^{(23)}$ είναι κατακόρυφα διαστήματα μεταξύ πυθμένα και επιφάνειας του νερού στις θέσεις $x = a$ και $x = b$.

Μετά την εισαγωγή του ανωτέρω συμβολισμού, προχωρούμε στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Υποθέτοντας ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και το πεδίο ταχύτητας είναι μικρές ποσότητες (αυτό διατυπώνεται πληρέστερα με την απαίτηση η κλίση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας να είναι παντού μικρή), μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις της θεωρίας διάδοσης υδάτινων κυματισμών, βλ., π.χ. Stoker (1957) ή Wehausen & Laitone (1960) ή Mei (1983). Στη συνέχεια, υποθέτοντας το πεδίο ταχύτητας είναι αστρόβιλο και χρονικά αρμονικό (με συχνότητα την ίδια με αυτήν του προσπίπτοντος κυματισμού), τότε αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα δυναμικό ταχύτητας της μορφής

$$\Phi(x, y, z; t) = \text{Re} \left\{ -\frac{igH}{2\omega} \varphi(x, z; \mu) \exp(iyk_0^{(1)} \sin \theta_1) \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (2.5a)$$

όπου $H/2$ το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας του προσπίπτοντος κυματισμού, θ_1 η διεύθυνση διάδοσης του κύματος στην περιοχή $D^{(1)}$, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\mu = \omega^2/g$ η παράμετρος συχνότητας και $i = \sqrt{-1}$. Η παράμετρος $k_0^{(1)}$ είναι ο κυματαριθμός

του προσπίπτοντος κύματος στην περιοχή $D^{(1)}$ σταθερού βάθους h_1 , και συνδέεται με την κυκλική συχνότητα ω με την σχέση διασποράς

$$\mu h_1 = k_0^{(1)} h_1 \tanh(k_0^{(1)} h_1) \quad . \quad (2.5\beta)$$

Η συνάρτηση $\varphi = \varphi(x, z; \mu)$, στην Εξ. (2.5), είναι το μιγαδικό δυναμικό στο κατακόρυφο χωρίο D , και στην συνέχεια θα συμβολίζεται απλά ως $\varphi(x, z)$. Με βάση τα ανωτέρω το πρόβλημα συνοριακών τιμών που αφορά την διάδοση των αρμονικών κυματισμών πάνω από τη περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας που εξετάζεται αποτελείται από τις παρακάτω εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες

$$\nabla^2 \varphi - q^2 \varphi = 0, \quad q = k_0^{(1)} \sin \theta, \quad (x, z) \in D, \quad (2.6\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \mu \varphi = 0, \quad \mu = \frac{\omega^2}{g} > 0, \quad (x, z) \in \partial D_F, \quad (2.6\beta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (x, z) \in \partial D_{II}, \quad (2.6\gamma)$$

και συμπληρώνεται με τις ακόλουθες συνθήκες στο άπειρο ($x \rightarrow \pm\infty$) οι οποίες εξασφαλίζουν τις ακόλουθες ιδιότητες

- (i) στην περιοχή $x \rightarrow -\infty$ η λύση συμπεριφέρεται ως υπέρθεση του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κυματισμού (με το ίδιο μήκος κύματος):

$$\varphi(x, z) \rightarrow \left(A_0 \exp(ik_0^{(1)} \cos \theta_1) + A_R \exp(-ik_0^{(1)} \cos \theta_1) \right) \cosh(k_0^{(1)}(z + h_1)) / \cosh(k_0^{(1)} h_1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.7)$$

- (ii) στην περιοχή $x \rightarrow +\infty$ η λύση συμπεριφέρεται ως αρμονικός διαδιδόμενος κυματισμός:

$$\varphi(x, z) \rightarrow A_T \exp(ik_0^{(3)} \cos \theta_3) \cosh(k_0^{(3)}(z + h_3)) / \cosh(k_0^{(3)} h_3), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.8\alpha)$$

με γωνία διεύθυνσης διάδοσης θ_3 στην περιοχή σταθερού βάθους h_3 που καθορίζεται από την απαίτηση περιοδικότητας της λύσης κατά την εγκάρσια y -διεύθυνση

$$k_0^{(3)} \sin \theta_3 = q = k_0^{(1)} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_3 = \sin^{-1}(q/k_0^{(3)}). \quad (2.8\beta)$$

Οι ποσότητες $k_0^{(1)}$ και $k_0^{(3)}$, στις ανωτέρω εξισώσεις ικανοποιούν τις συνθήκες: $\mu h_i = k_0^{(i)} h_i \tanh(k_0^{(i)} h_i)$, στις 2 ημι-άπειρες λωρίδες $D^{(i)}$, $i = 1, 3$.

Οι συντελεστές A_0, A_R στην Εξ. (2.7), και ο αντίστοιχος A_T στην Εξ. (2.8) αποτελούν τους παραστατικούς μιγάδες του δυναμικού του προσπίπτοντος, ανακλώμενου και διαδιδόμενου δυναμικού αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής μοναδιαίου μέτρου $A_0 = \exp(i\psi_0)$ καθορίζει τη διέγερση του υδροδυναμικού προβλήματος, όπου ψ_0 δηλώνει τη φάση του προσπίπτοντος κυματισμού. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών, Εξ. (2.6), (2.7) και (2.8), θα αναφέρεται συλλογικά ως $\mathcal{P}(D, \mu, A_0)$. Οι χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους που εμπλέκονται (άμεσα ή έμμεσα) στο προαναφερθέν πρόβλημα είναι: τα δύο βάθη των μακρινών πεδίων, τα αντίστοιχα μήκη κύματος, καθώς και το μήκος της διακύμανσης του πυθμένα, και το μέσο πλάτος των πτυχώσεων αυτού. Από τα ανωτέρω μεγέθη μπορούμε να σχηματίσουμε διάφορες αδιάστατες παραμέτρους, οι σημαντικότεροι από τις οποίες είναι: οι λόγοι ρηχότητας h_i/λ_i , $i = 1, 3$, η μέση και η μέγιστη κλίση του πυθμένα $s_{\text{mean}}, s_{\text{max}}$, και ο λόγος ρήγωσης h_3/h_1 . Στην παρούσα εργασία όλοι αυτοί οι αδιάστατοι αριθμοί θεωρούνται ότι έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Δηλαδή, δεν θα εφαρμοστούν ασυμπτωτικές υποθέσεις για αυτές.

7.1.3 Αναπαράσταση του δυναμικού κύματος στις δύο ημιάπειρες λωρίδες

Το πρόβλημα $\mathcal{P}(D, \mu, A_0)$ μπορεί να αναδιατυπωθεί ως πρόβλημα μετάδοσης στο ενδιαμέσο φραγμένο χωρίο, με τη βοήθεια της ακόλουθης γενικής αναπαράστασης του δυναμικού κύματος στις ημιάπειρες λωρίδες και (βλέπε π.χ. Miles 1967, Mei & Black 1969, Massel 1993):

$$\varphi^{(1)}(x, z) = \left(A_0 \exp(ik_0^{(1)} \cos \theta_1) + A_R \exp(-ik_0^{(1)} \cos \theta_1) \right) Z_0^{(1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)} Z_n^{(1)}(z) \exp(k_n^{(1)}(x-a)),$$

$$(x, z) \in D^{(1)} \quad (2.9)$$

$$\varphi^{(3)}(x, z) = A_T \exp(ik_0^{(3)} \cos \theta_3) Z_0^{(3)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(3)} Z_n^{(3)}(z) \exp(k_n^{(3)}(b-x)), (x, z) \in D^{(3)}. \quad (2.10)$$

Οι όροι $\left(A_0 \exp(ik_0^{(1)} \cos \theta_1) + A_R \exp(-ik_0^{(1)} \cos \theta_1) \right) Z_0^{(1)}(z)$ and $A_T \exp(ik_0^{(3)} \cos \theta_3) Z_0^{(3)}(z)$ στις Εξ. (2.9) and (2.10), καλούνται *διαδιδόμενες μορφές*, ενώ οι υπόλοιποι όροι ($n = 1, 2, \dots$) είναι οι *αποσβενόμενες μορφές*, αντίστοιχα. Στις σχέσεις (2.9) and (2.10) οι παράμετροι $\{ik_0^{(i)}, k_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots\}$, $i = 1, 3$, και οι κατακόρυφες συναρτήσεις $\{Z_n^{(i)}(z), n = 0, 1, 2, \dots\}$, $i = 1, 3$, είναι, αντίστοιχα, οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις που λαμβάνονται ως λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων *Sturm-Liouville*

$$\frac{d^2 Z^{(i)}(z)}{dz^2} + (k^{(i)})^2 Z^{(i)}(z) = 0, \quad -h_i < z < 0, \quad (2.11\alpha)$$

$$\frac{dZ^{(i)}(0)}{dz} - \mu Z^{(i)}(0) = 0, \quad \frac{dZ^{(i)}(-h_i)}{dz} = 0, \quad (2.11\beta, \gamma)$$

που λαμβάνονται με χωρισμό μεταβλητών στις ημιάπειρες λωρίδες $D^{(i)}$, $i = 1, 3$. Οι ιδιοτιμές $\{i k_0^{(i)}, k_n^{(i)}\}$ λαμβάνονται ως ρίζες της εξίσωσης διασποράς (στα αντίστοιχα βάθη)

$$\mu h_i = -k^{(i)} h_i \tan(k^{(i)} h_i), \quad i = 1, 3, \quad (2.12)$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις $\{Z_n^{(i)}(z), n = 0, 1, 2, \dots\}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$Z_0^{(i)}(z) = \frac{\cosh(k_0^{(i)}(z + h_i))}{\cosh(k_0^{(i)} h_i)}, \quad Z_n^{(i)}(z) = \frac{\cos(k_n^{(i)}(z + h_i))}{\cos(k_n^{(i)} h_i)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 3. \quad (2.13)$$

Η πληρότητα των αναπαραστάσεων (2.9) and (2.10) προκύπτει από τις ιδιότητες των κανονικών προβλημάτων ιδιοτιμών, βλ., π.χ., Coddington and Levinson, (1955, Section 7.4). Επίσης, η ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών (2.9) and (2.10) στα κατακόρυφα διαστήματα $[-h_i, 0]$, $i = 1, 3$, στα αντίστοιχα δυναμικά $\varphi^{(1)}$ και $\varphi^{(3)}$ εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι ικανοποιούν τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με τις ιδιοσυναρτήσεις $Z_n^{(i)}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, αντίστοιχα.

Θεωρώντας ως δεδομένο του προβλήματος την τιμή του συντελεστή A_0 του προσπίπτοντος κυματικού δυναμικού, τα πεδία $\varphi^{(1)}$ και $\varphi^{(3)}$ στα ημιάπειρα χωρία καθορίζονται πλήρως και μοναδικά από τους υπόλοιπους συντελεστές των σειρών (2.9) $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, και (2.10) $A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, αντίστοιχα. Έχοντας αυτό υπόψη γράφουμε στην συνέχεια:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(1)}(x, z; A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}) \quad \text{και} \quad \varphi^{(3)} = \varphi^{(3)}(x, z; A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in \mathbb{N}}),$$

Εκφράζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την παραμετρική εξάρτηση των πεδίων αυτών από τους συντελεστές $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ και τις χωρικές μεταβλητές (x, z) στην κάθε ημιάπειρη λωρίδα.

7.2 Αναδιατύπωση του $\mathcal{P}(D, \mu, A_0)$ ως πρόβλημα μετάδοσης

Εκμεταλλευόμενοι τις αναπαραστάσεις (2.9) και (2.10) το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ισομερώς ως πρόβλημα κυματικής μετάδοσης στο φραγμένο χωρίο $D^{(2)}$, ως εξής:

Πρόβλημα $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$: Με δεδομένα τα $A_0 = \exp(i\theta_0)$ και $\mu = \omega^2/g > 0$, και τις αναπαραστάσεις (2.9) και (2.10) στις ημιάπειρες λωρίδες $D^{(1)}$ και $D^{(3)}$, να βρεθούν οι συντελεστές $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, και η συνάρτηση $\varphi^{(2)}(x, z)$, στο $D^{(2)}$, που ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, μαζί με τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες συναρμογής:

$$\nabla^2 \varphi^{(2)} - q^2 \varphi^{(2)} = 0, \quad q = k_0^{(1)} \sin \theta, \quad \text{στο } D^{(2)}, \quad (2.14\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} - \mu \varphi^{(2)} = 0, \quad (x, z) \in \partial D_F^{(2)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} = 0, \quad (x, z) \in \partial D_H^{(2)}, \quad (2.14\beta, \gamma)$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} = -\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}}, \quad (x, z) \in \partial D_I^{(12)}, \quad (2.14\delta, \epsilon)$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} = -\frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}}, \quad (x, z) \in \partial D_I^{(23)}, \quad (2.14\sigma\tau, \zeta)$$

όπου $n^{(i)} = (n_x^{(i)}, n_z^{(i)})$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial D^{(i)}$ με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του αντίστοιχου υποχωρίου $D^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$; Βλ. Σχ.3. Το ανωτέρω πρόβλημα θα αναφέρεται στη συνέχεια ως το **πρόβλημα μετάδοσης κυματισμών** $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$ και είναι ισοδύναμο του αρχικού προβλήματος $\mathcal{P}(D, \mu, A_0)$. Το πρόβλημα μετάδοσης επιδέχεται ισοδύναμης μεταβολικής διατύπωσης (π.χ., Bai & Yeung 1974, Mei & Chen 1975, 1976, Mei 1978, Aranha et al. 1979), η οποία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στη συνέχεια.

7.3 Μεταβολική διατύπωση του $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$

Θεωρούμε ότι τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi^{(1)}$ and $\varphi^{(3)}$, αναπαριστώμενα από τις Εξ. (2.9) και (2.10), καθορίζονται πλήρως από τους συντελεστές $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}$ and $A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N}$, ενώ για το δυναμικό στην ενδιάμεση περιοχή $\varphi^{(2)}$ αυτό θεωρείται μέσω του συνόλου των τιμών του $\varphi^{(2)}(x, z)$, σε κάθε σημείο του χωρίου αυτού, $(x, z) \in D^{(2)}$. Πάνω σε αυτά τα στοιχεία ορίζουμε το ακόλουθο συναρτησιακό ενεργειακού-τύπου:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\varphi^{(2)}, A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}, A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N} \right) &= \frac{1}{2} \int_{D^{(2)}} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dV - \frac{1}{2} \mu \int_{\partial F^{(2)}} (\varphi^{(2)})^2 dS + \\ &+ \int_{\partial I^{(12)}} \left(\varphi^{(2)} - \frac{1}{2} \varphi^{(1)}(A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}) \right) \cdot \frac{\partial \varphi^{(1)}(A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N})}{\partial n^{(1)}} dS + \\ &+ \int_{\partial I^{(23)}} \left(\varphi^{(2)} - \frac{1}{2} \varphi^{(3)}(A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N}) \right) \cdot \frac{\partial \varphi^{(3)}(A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N})}{\partial n^{(3)}} dS + \\ &- A_o A_R J^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου dV και dS είναι τα διαφορικά του χωρίου και των συνόρων του, αντίστοιχα, και A_0 είναι το δεδομένο μιγαδικό πλάτος (ουσιαστικά η φάση) του προσπίπτοντος αρμονικού κύματος, και $J^{(1)}$ είναι η ακόλουθη σταθερά του προβλήματος

$$J^{(1)} = 2k_0^{(1)} \int_{z=-h_1}^{z=0} \left(Z_0^{(1)}(z) \right)^2 dz. \quad (3.2)$$

Υπό την παρούσα μοντελοποίηση, οι βαθμοί ελευθερίας του υδροδυναμικού συστήματος που μελετάται είναι οι εξής:

- (α) οι τιμές του άγνωστου δυναμικού $\varphi^{(2)}$, σε όλα τα σημεία στο εσωτερικό του $D^{(2)}$,
- (β) οι τιμές του άγνωστου δυναμικού $\varphi^{(2)}$, σε όλα τα σημεία πάνω στο σύνορο του $\partial D^{(2)} = \partial D_F^{(2)} \cup \partial D_H^{(2)} \cup \partial D_I^{(12)} \cup \partial D_I^{(23)}$,
- (γ) οι (αριθμήσιμα άπειροι) συντελεστές $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}$, της αναπαράστασης του δυναμικού $\varphi^{(1)}$ στην αριστερή ημι-άπειρη λωρίδα, και
- (δ) οι (αριθμήσιμα άπειροι) συντελεστές $A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N}$, της αναπαράστασης του δυναμικού $\varphi^{(3)}$ στην δεξιά ημι-άπειρη λωρίδα.

Η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$ δίδεται ακολούθως

Θεώρημα A: Η συνάρτηση $\varphi^{(2)}(x, z)$, $(x, z) \in D^{(2)}$ και οι συντελεστές $A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}$ και $A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N}$ αποτελούν λύση του προβλήματος $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$, υπό την προϋπόθεση ότι καθιστούν το συναρτησιακό \mathcal{F} που δίνεται από την Εξ.(3.1), στάσιμο, δηλαδή .

$$\delta \mathcal{F} \left(\varphi^{(2)}, A_R, \{C_n^{(1)}\}, A_T, \{C_n^{(3)}\} \right) = 0. \quad (3.3\alpha)$$

Απόδειξη: Υπολογίζοντας τη πρώτη μεταβολή $\delta \mathcal{F}$ του ανωτέρω συναρτησιακού (βλ., π.χ., Bai & Yeung 1974, Mei & Chen 1975)¹, η μεταβολική εξίσωση (3.3α) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & - \int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta \varphi^{(2)} dV + \int_{\partial D_H^{(2)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_F^{(2)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} - \mu \varphi^{(2)} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \\ & + \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \\ & + \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right) dS - \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x} \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.3\beta)$$

¹ Λεπτομέρειες παρέχονται στο Παράρτημα Α.

Έτσι, η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού \mathcal{F} έχει εκφραστεί συναρτήσει των μεταβολών: (i) $\delta\varphi^{(2)}$ στο χωρίο $D^{(2)}$ (όρος πρώτος), (ii) $\delta\varphi^{(2)}$ στο σύνορο $\partial D^{(2)}$ (όροι δεύτερος έως πέμπτος), (iii) $\delta(\partial\varphi^{(1)}/\partial x)$ στο αριστερό σύνορο συναρμογής $\partial D_I^{(12)}$ (όρος έκτος), and (iv) $\delta(\partial\varphi^{(3)}/\partial x)$ στο δεξιό σύνορο συναρμογής $\partial D_I^{(23)}$ (όρος έβδομος). Οι δύο συναρτήσεις $\partial\varphi^{(i)}/\partial x$, $i=1,3$, που εμφανίζονται στους δυο τελευταίους όρους, αναπαρίστανται μέσω των αναπτυγμάτων τους σε σειρά όπως προκύπτει από την παραγωγή των Εξ. (2.9) και (2.10). Συνεπώς, οι μεταβολές $\delta(\partial\varphi^{(1)}/\partial x)$ και $\delta(\partial\varphi^{(3)}/\partial x)$ εκφράζονται, τελικά, συναρτήσει των μεταβολών δA_R , $\{\delta C_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ and δA_T , $\{\delta C_n^{(3)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, των συντελεστών A_R και A_T , αντιστοίχως.

Στη συνέχεια εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τα συνήθη εργαλεία του λογισμού μεταβολών (e.g., Gelfand and Fomin 1963, ch. 36, ή Rectorys 1977, ch.22). Κατ' αρχάς, υποθέτουμε ότι όλες οι μεταβολές στην Εξ. (3.3β) μηδενίζονται εκτός από τις συνεχώς απειριζόμενες ποσότητες (continuously infinite values) του $\delta\varphi^{(2)}(x,z)$ στο $D^{(2)}$. Έτσι, η Εξ. (3.3β) γράφεται

$$\int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta\varphi^{(2)} dV = 0. \quad (3.4)$$

Για τυχούσα μεταβολή $\delta\varphi^{(2)}(x,z)$, παρατηρούμε ότι η Εξ. (3.4) επάγει την εξίσωση Laplace (2.14α). Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της Εξ. (3.3β) «παραβλέπεται» (ακυρώνεται, εκπίπτει, διαγράφεται;;;). Περαιτέρω, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, υποθέτοντας πως μόνο μία από τις ακόλουθες μεταβολές,

$$\delta\varphi^{(2)} \text{ στο } \partial D_{II}^{(2)}, \quad \delta\varphi^{(2)} \text{ στο } \partial D_F^{(2)}, \quad \delta\varphi^{(2)} \text{ στο } \partial D_I^{(12)}, \quad \delta\varphi^{(2)} \text{ στο } \partial D_I^{(23)},$$

δέχεται τυχούσες τιμές κάθε φορά, ενώ οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Έτσι, λαμβάνουμε τις Εξ. (2.14β), (2.14γ), (2.14ε), (2.14ζ), αντιστοίχως. Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα, η μεταβολική εξίσωση (3.3β) μεταπίπτει στην

$$\int_{\partial D_I^{(12)}} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right) dS - \int_{\partial D_I^{(23)}} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)}) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x} \right) dS = 0. \quad (3.5)$$

Διαφορίζοντας την Εξ. (2.9) λαμβάνουμε μια αναπαράσταση με τη μορφή σειράς για τη μεταβολή

$$\delta \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}(a,z)}{\partial x} \right) = \delta A_R (-ik_0 \exp(-ik_0 a)) Z_0^{(1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta C_n^{(1)} k_n Z_n^{(1)}(z), \quad (3.6)$$

ενώ διαφορίζοντας την Εξ. (2.10), λαμβάνουμε μια ανάλογη έκφραση για το $\delta(\partial\varphi^{(3)}/\partial x)$ στη θέση $x = b$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα σε συνδυασμό με την ανεξαρτησία των μεταβολών $\delta A_R, \delta C_n^{(1)}, \delta A_T, \delta C_n^{(3)}$, συνάγεται ότι η Εξ. (3.5) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο διακριτό σύνολο εξισώσεων:

$$\int_{-h_i}^0 (\varphi^{(2)} - \varphi^{(i)}) Z_n^{(i)}(z) dz = 0, \quad i = 1, 3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Τότε, λόγω της L^2 -πληρότητας των συστημάτων $\{Z_n^{(i)}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ στα διαστήματα $(-h_i, 0)$, $i = 1, 3$, αντιστοίχως, οι Εξ. (3.7) οδηγούν στις Εξ. (2.14δ) and (2.14στ), όπου η ισότητα νοείται κατά την ασθενή (L^2) έννοια. Υπό την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 3$, έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους μέχρι και το σύνορο, οι ισότητες $\varphi^{(2)}(a, z) - \varphi^{(1)}(a, z) = 0$ και $\varphi^{(2)}(b, z) - \varphi^{(3)}(b, z) = 0$ ισχύουν και κατά την ισχυρή έννοια.

Ως εκ τούτου, η ισοδυναμία της μεταβολικής εξίσωσης (3.3) και του προβλήματος $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$ έχειδειχθεί και η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Σημείωση: Επί τη βάσει του Θεωρήματος A, στο σημείο στασιμότητας του συναρτησιακού \mathcal{F} ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες, Εξ. (2.14). Αντικαθιστώντας αυτές στην έκφραση (3.1) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green για τη μετατροπή του χωρικού ολοκληρώματος επί του $D^{(2)}$ σε ολοκληρώματα επί των συνόρων του, $\partial D^{(2)}$, καταλήγουμε, μετά από κάποια άλγεβρα στην τιμή $\mathcal{F} = -A_o A_R J^{(1)}$, για το συναρτησιακό στο σημείο στασιμότητας, δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι η τιμή αυτή είναι ανάλογη προς το πλάτος του επ' αριστερά ανακλώμενου κύματος.

Εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον της, η χρησιμότητα της παραπάνω μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος, έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να επιλέξουμε οποιαδήποτε αναπαράσταση για το άγνωστο δυναμικό $\varphi^{(2)}$ στο $D^{(2)}$. Με αυτό τον τρόπο, μπορεί να κατασκευαστεί μια ποικιλία αλγορίθμων για την αριθμητική λύση του υπό μελέτη κυματικού προβλήματος. Μία δυνατή επιλογή, η οποία επιτρέπει την αντιμετώπιση προβλημάτων υδάτινων κυμάτων σε θαλάσσια περιβάλλοντα, χωρίς περιορισμούς για την κλίση ή την καμπυλότητα του πυθμένα, θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

7.4 Αναπαράσταση της λύσης με χρήση σειράς τοπικών ιδιομορφών

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε και θα σχολιάσουμε μια ειδική αναπαράσταση του κυματικού δυναμικού $\varphi^{(2)}(x, z)$ στο υποχωρίο $D^{(2)}$ μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, ακολουθώντας τη μέθοδο εργασίας που πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Pierce (1965) για προβλήματα υδροακουστικής. Εκτοτε, η τεχνική αυτή έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα στα πλαίσια της υδροακουστικής (π.χ., Boyles, 1984 και Fawcett, 1992), ακολούθως δε, και για τα υδάτινα κύματα (Massel, 1993, Porter & Staziker, 1995, Porter & Chamberlain, 1997).

Δεδομένης της συνάρτησης βαθυμετρίας (τοπικού βάθους) $h(x)$, $x \in R$, και της παραμέτρου κύματος $\mu = \omega^2/g > 0$, μπορούμε να διατυπώσουμε και να επιλύσουμε την τοπική σχέση διασποράς σε κάθε θέση $x \in [a, b]$:

$$\mu h(x) = -k(x)h(x) \cdot \tan[k(x)h(x)], \quad a \leq x \leq b, \quad (4.1)$$

λαμβάνοντας, έτσι, τις τοπικές ιδιοτιμές $\{ik_o(x), k_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, και τις τοπικές κατακόρυφες ιδιοσυναρτήσεις

$$Z_0(z; x) = \frac{\cosh[k_o(x)(z + h(x))]}{\cosh(k_o(x) \cdot h(x))}, \quad Z_n(z; x) = \frac{\cos[k_n(x)(z + h(x))]}{\cos(k_n(x) \cdot h(x))}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Οι ανωτέρω ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις συγκροτούν την λύση του ακόλουθου τοπικού κατακόρυφου προβλήματος Sturm-Liouville (βλ.,.. Εξ. (2.9), (2.10)):

$$\frac{\partial^2 Z(z; x)}{\partial z^2} + (k(x))^2 Z(z; x) = 0, \quad -h(x) < z < 0, \quad (4.3\alpha)$$

$$\frac{\partial Z(0; x)}{\partial z} - \mu Z(0; x) = 0, \quad \frac{\partial Z(-h(x); x)}{\partial z} = 0. \quad (4.3\beta, \gamma)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις ανωτέρω εξισώσεις η εξάρτηση από την οριζόντια θέση x είναι παραμετρικής φύσης. Συνεπώς, το πρόβλημα Sturm-Liouville, Εξ. (4.3), πρέπει να θεωρείται ως μια οικογένεια προβλημάτων, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μια τιμή της οριζόντιας παραμέτρου x . Οι χαρακτηρισμοί τοπικές ιδιοτιμές (*local eigenvalues*) και τοπικές ιδιοσυναρτήσεις (*local eigenfunctions*) χρησιμοποιούνται ακριβώς για να τονίσουν το γεγονός αυτό.

Με βάση την γενική θεωρία των προβλημάτων Sturm-Liouville, π.χ., Titchmarsh (1962, Ch.1), Higgins (1977, Ch. 4), το σύνολο των συναρτήσεων $\{Z_n(z; x)\}_{n=0,1,\dots}$ που εξαρτώνται από την κατακόρυφη μεταβλητή z συγκροτούν ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα στο $L^2(-h(x), 0)$, για κάθε τιμή $x \in [a, b]$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακόλουθη L^2 -αναπαράσταση του (άγνωστου) κυματικού δυναμικού $\phi^{(2)}$ στο $D^{(2)}$:

$$\phi^{(2)}(x, z) = \varphi_0(x)Z_0(z; x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) Z_n(z; x), \quad (4.4)$$

όπου $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, είναι οι συντελεστές του γενικευμένου κατά Fourier αναπτύγματος του $\phi^{(2)}(x, z)$ συναρτήσεως της L^2 -βάσης $Z_n(z; x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, για κάθε $x \in [a, b]$. Αυτή η αναπαράσταση του κυματικού δυναμικού $\phi^{(2)}$ θα ονομάζεται αναπαράσταση τοπικών ιδιομορφών (*the standard local-mode representation*).

Κατ' αναλογίαν των Εξ. (2.9), (2.10), ο πρώτος όρος $\varphi_0(x) Z_0(z; x)$ της σειράς (4.4) θα ονομάζεται *διαδιδόμενη ιδιομορφή (propagating mode)*, ενώ οι εναπομείναντες όροι $\varphi_n(x) Z_n(z; x)$, $n = 1, 2, \dots$, θα ονομάζονται *αποσβενόμενες (ή μη-διαδιδόμενες) ιδιομορφές (evanescent modes, non-propagating modes)*. Οι συναρτήσεις $Z_n(z; x)$ αντιπροσωπεύουν την κατακόρυφη δομή της n -οστής ιδιομορφής. Η συνάρτηση $\varphi_n(x)$ περιγράφει την οριζόντια συμπεριφορά της n -οστής ιδιομορφής και θα αναφέρεται ως το *μυγαδικό πλάτος* της (*complex amplitude*).

Η ιδιότητα (4.3β) των τοπικών κατακορύφων ιδιοσυναρτήσεων συνεπάγεται ότι το κυματικό δυναμικό $\varphi^{(2)}(x, z)$, οριζόμενο στην Εξ. (4.4), ικανοποιεί ταυτοτικά την συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, Εξ. (2.14β). Άρα, η χρήση της ανωτέρω αναπαράστασης μέσω τοπικών ιδιομορφών και ιδιοσυναρτήσεων καθιστά τη συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας μια *ουσιώδη συνθήκη (essential condition)* της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος, η οποία παρουσιάστηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Από αριθμητικής απόψεως, αυτό αποδεικνύεται ως ευεργετική ιδιότητα της αναπαράστασης (4.4). Εξάλλου, η συνάρτηση $\varphi^{(2)}(x, z)$, οριζόμενη μέσω της (4.4), είναι ασύμβατη με την συνοριακή συνθήκη πυθμένα εάν $dh(x)/dx \neq 0$.² Διότι, αν διαφορίσουμε την (4.4) ως προς z και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (4.3γ) των τοπικών κατακορύφων ιδιοσυναρτήσεων, λαμβάνουμε

$$\left[\partial \varphi^{(2)}(x, z) / \partial z \right]_{z=-h(x)} = 0, \quad a < x < b, \quad (4.5)$$

Η οποία αντιφάσκει με την (2.14γ) στην περίπτωση κεκλιμένου πυθμένα. Η αντίφαση αυτή διαταράζει την διατήρηση της ενέργειας. Τη απουσία κάποιου μηχανισμού απωλειών (απορρόφησης) ενέργειας, η μέση κυματική ισχύς $P(x)$, που μεταδίδεται μέσω οποιασδήποτε κατακόρυφης τομής η οποία εκτείνεται από τον πυθμένα $z = -h(x)$ μέχρι τη μέση στάθμη ηρεμίας $z = 0$, πρέπει να είναι σταθερή, ή, ισοδύναμα, $dP(x)/dx = 0$. Η ποσότητα $dP(x)/dx$ μπορεί να εκφρασθεί αναλυτικά με χρήση του κυματικού δυναμικού $\varphi(x, z)$, στη μορφή²

$$\begin{aligned} \frac{dP(x)}{dx} &= -\frac{\rho g^2 H^2}{8\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \operatorname{Im} \left\{ \left[\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\partial D_{\pi}} \right\} = \\ &= \frac{\rho g^2 H^2}{8\omega} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{dh}{dx} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=-h(x)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου με φ^* δηλώνεται ο μυγαδικός συζυγής του φ . Αντικαθιστώντας, το δυναμικό By $\varphi^{(2)}$ από την Εξ. (4.4) στην Εξ. (4.6), λαμβάνουμε

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{\rho g^2 H^2}{8\omega} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{dh}{dx} \varphi^{(2)*} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} \right]_{z=-h(x)} \right\},$$

² Λεπτομέρειες υπάρχουν στο Παράρτημα Β.

το οποίο είναι οπωσδήποτε μη-μηδενικό σε κάθε θέση της περιοχής μεταβαλλόμενου βάθους πυθμένα, αφού, σε αυτήν την περίπτωση, $dh/dx \neq 0$ και $\text{and } \varphi^{(2)*}(\partial\varphi^{(2)}/\partial x) \neq 0$. Μόνο στην περίπτωση, πυθμένα ήπιας κλίσης, δηλαδή, όταν $|dh/dx|/(k_0h) \ll 1$, η απόκλιση αναμένεται να είναι μικρή και, συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αναπαράσταση (4.4) προσεγγιστικά ισχύει. Το ελάττωμα της αναπαράστασης μέσω τοπικών ιδιομορφών έχει επίσης σχολιαστεί (χωρίς όμως να αντιμετωπισθεί) από τους Rutherford & Hawker (1981) στα πλαίσια εφαρμογών υδροακουστικής. Η άρση του μειονεκτήματος αυτού της μεθόδου με αναπαράσταση μέσω τοπικών ιδιομορφών είναι ο κύριος σκοπός του παρόντος.

Το μειονέκτημα της αναπαράστασης (4.4) στην περίπτωση κεκλιμένου πυθμένα έγκειται στο γεγονός ότι η απειροσειρά που εμφανίζεται στο δεξιά μέλος δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-h(x), 0]$. Υπενθυμίζεται εδώ ότι το ανάπτυγμα σε σειρά χρησιμοποιώντας όρους $Z_n(z; x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, μιας οποιασδήποτε C^2 - συνάρτησης $f(z)$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-h(x), 0]$ μόνον αν η $f(z)$ ικανοποιεί ταυτόχρονα και τις δυο συνοριακές συνθήκες (4.3β,γ), βλ. π.χ. Coddington & Levinson (1955, ch. 7.4). Σε άλλη περίπτωση, αν η $f(z)$ δεν ικανοποιεί μια εκ των συνοριακών συνθηκών (4.3β, γ), η σύγκλιση καθίσταται ομοιόμορφη μόνο σε υποδιαστήματα της μορφής $[-h(x) + \varepsilon, -\varepsilon]$, και το όριο της σειράς στο $z = 0$ ή στο $z = -h(x)$ μπορεί να μην συμπίπτει με την ακραία τιμή (ή τις ακραίες τιμές) της $f(z)$. Συνεπώς, η αναπαράσταση (4.4) είναι ακατάλληλη για το χειρισμό του προβλήματος συνοριακών τιμών $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$, το οποίο επιβάλλει μια συνοριακή συνθήκη στην κατακόρυφη θέση $z = -h(x)$, ασύμβατη με την συμπεριφορά στο σύνορο των συναρτήσεων βάσης. Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να μεταβάλλουμε καταλλήλως το ανάπτυγμα σε σειρά της συνάρτησης που αναπαριστούμε, εξασφαλίζοντας ότι η τροποποιημένη σειρά ικανοποιεί ακριβώς τις απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες και στα δύο άκρα του κατακόρυφου διαστήματος, δηλαδή, στις θέσεις $z = 0$ και $z = -h(x)$.

7.4.1 Εμπλουτισμένη αναπαράσταση τοπικών ιδιομορφών

Σε αυτό το υποεδάφιο, θα παρουσιάσουμε την τροποποίηση του ανάπτυγματος (4.4) ώστε να εξασφαλίζεται η ομοιόμορφη σύγκλιση της προκύπτουσας σειράς στο κλειστό διάστημα $[-h(x), 0]$. Η βασική ιδέα είναι να αφαιρεθεί μια κατάλληλη συνάρτηση The basic idea is to $\varphi_{-1}^{(2)}(x, z)$ από το κυματικό δυναμικό $\varphi^{(2)}(x, z)$, έτσι ώστε η διαφορά

$$f^{(2)}(x, z) = \varphi^{(2)}(x, z) - \varphi_{-1}^{(2)}(x, z) \quad (4.7)$$

να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial f^{(2)}(x, z)}{\partial z} - \mu f^{(2)}(x, z) = 0, \quad z = 0, \quad \frac{\partial f^{(2)}(x, z)}{\partial z} = 0, \quad z = -h(x), \quad (4.8\alpha, \beta)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Οι συνοριακές συνθήκες (4.8α,β) είναι ταυτόσημες με τις (4.3β,γ), που ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις βάσεις $Z_n(z; x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Επομένως, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f^{(2)}(x, z)$ συναρτήσει των $Z_n(z; x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, δηλαδή,

$$f^{(2)}(x, z) \equiv \varphi^{(2)}(x, z) - \varphi_{-1}^{(2)}(x, z) = \varphi_0(x) Z_0(z; x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) Z_n(z; x), \quad (4.9)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-h(x), 0]$. Βέβαια, οι συντελεστές $\varphi_n(x)$ που εμφανίζονται στην Εξ. (4.9) διαφέρουν από τους αντίστοιχους συντελεστές που εμφανίζονται στην Εξ. (4.4).

Ακολούθως, θα κατασκευάσουμε μια αποδεκτή αναπαράσταση για τη συνάρτηση $\varphi_{-1}^{(2)}(x, z)$. Μια πιθανή επιλογή είναι

$$\varphi_{-1}^{(2)}(x, z) = \varphi_{-1}(x) Z_{-1}(z; x), \quad (4.10)$$

όπου η $Z_{-1}(z; x)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε λεία συνάρτηση του z στο $[-h(x), 0]$ υπό τον όρο ότι ικανοποιεί τις συνθήκες

$$Z_{-1}(z=0; x) = 0, \quad \partial Z_{-1}(z=0; x) / \partial z = 0, \quad (4.11\alpha, \beta)$$

$$Z_{-1}(z=-h(x); x) = 0, \quad \partial Z_{-1}(z=-h(x); x) / \partial z = 1 m^{-1}, \quad (4.11\gamma, \delta)$$

για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε η $\varphi_{-1}(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_{-1}(x) = \left[\partial \varphi^{(2)} / \partial z \right]_{z=-h(x)}. \quad (4.12)$$

(Μια ειδική βολική μορφή της συνάρτησης $Z_{-1}(z; x)$ δίνεται από την Εξ. (6.1)). Η Εξίσωση (4.12) αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε η $f^{(2)}(x, z)$ να ικανοποιεί την Εξ. (4.8b) υπό τις συνθήκες (4.10) και (4.11). Μολαταύτα, η Εξ. (4.12) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $\varphi_{-1}(x)$, αφού η παράγωγος $\partial \varphi^{(2)} / \partial z$ για $z = -h(x)$ δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Όντως, η Εξ. (4.12) μας παρέχει τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης $\varphi_{-1}(x)$, την οποία όμως, θα πάρουμε μαζί με όλες τις υπόλοιπες συναρτήσεις πλατών $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, με χρήση της μεταβολικής εξίσωσης. Επισημαίνουμε επίσης εδώ, ότι ο όρος $\varphi_{-1}(x) Z_{-1}(z; x)$, υπό τις συνθήκες (4.11α,β,γ) για την $Z_{-1}(z; x)$, ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και δεν επηρεάζει την τιμή του κυματικού δυναμικού ούτε πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια ούτε πάνω στον πυθμένα στην περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας.

Συμπερασματικά, έχουμε καταλήξει στην ακόλουθη αναπαράσταση για το κυματικό δυναμικό στην περιοχή $D^{(2)}$:

$$\varphi^{(2)}(x, z) = \varphi_{-1}(x) Z_{-1}(z; x) + \varphi_0(x) Z_0(z; x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) Z_n(z; x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \varphi_n(x) Z_n(z; x), \quad (4.13)$$

η οποία, συγκρινόμενη με την Εξ. (4.4), περιέχει τον επιπρόσθετο όρο $\varphi_{-1}(x) Z_{-1}(z; x)$. Αυτός ακριβώς είναι ο όρος διόρθωσης που απαιτείται ώστε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα, Εξ. (2.14γ). Αυτός ο όρος θα καλείται, πλέον, *ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα (sloping-bottom mode)* και η (4.13) θα αναφέρεται ως *εμπλουτισμένη αναπαράσταση τοπικών ιδιομορφών (enhanced local-mode representation)*.

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό του χώρου $A(D^{(2)})$ των επιτρεπτών συναρτήσεων για την συνάρτηση $\varphi^{(2)}(x, z)$, η οποία θα χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τη μεταβολική αρχή του προβλήματος $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$, που διατυπώνεται στο Θεώρημα Α. Ο χώρος συναρτήσεων, που ορίζεται ως ακολούθως

$$A(D^{(2)}) = \left\{ \psi(x, z) \in C^2(D^{(2)}) \cap C^1(\bar{D}^{(2)}) : \partial\psi/\partial z - \mu\psi = 0 \text{ on } \partial D_F^{(2)} \right\}^3, \quad (4.14)$$

είναι πιο περιορισμένος από εκείνον που θεωρήθηκε κατά την διατύπωση και την απόδειξη του Θεωρήματος Α, μια και όλα τα μέλη του ικανοποιούν εκ των προτέρων την συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Αυτή η αποτελεσματικότερη επιλογή των επιτρεπτών συναρτήσεων $\varphi^{(2)}(x, z)$ καθίσταται εφικτή μέσω της αναπαράστασης (4.13), η οποία επαναδιατυπώνεται ακριβέστερα στο ακόλουθο:

Θεώρημα Β [Το θεώρημα αναπαράστασης]: Κάθε συνάρτηση $\psi(x, z) \in A(D^{(2)})$ επιδέχεται κατά μοναδικό τρόπο ανάπτυγμα σε σειρά της μορφής:

$$\psi(x, z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \psi_n(x) Z_n(z; x), \quad a \leq x \leq b, \quad -h(x) \leq z \leq 0, \quad (4.15)$$

όπου οι συναρτήσεις βάσης $Z_n(z; x)$ δίνονται από τις Εξ. (4.2) και (6.1), for $n=0, 1, 2, \dots$, και $n=-1$, αντιστοίχως, και οι $\psi_n(x)$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις πλατών ανήκουσες στο $C^2((a, b)) \cap C^1([a, b])$. Η αναπαράσταση (4.15), όπως επίσης και οι όροι προς όρο παράγωγοί της, συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο κλειστό χωρίο $\bar{D}^{(2)} = \{(x, z), \quad a \leq x \leq b, \quad -h(x) \leq z \leq 0\}$.

7.5 Το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών

Ας επαναθεωρήσουμε τη μεταβολική αρχή που εμφανίζεται στο Θεώρημα Α, υποθέτοντας ότι $\varphi^{(2)}(x, z) \in A(D^{(2)})$. Τότε, μέσω της εμπλουτισμένης αναπαράστασης (4.13) (δες επίσης και

³ Στην Εξ. (4.14) $C^2(D^{(2)})$ είναι ο χώρος συναρτήσεων στο ανοικτό χωρίο $D^{(2)}$ που έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, και $C^1(\bar{D}^{(2)})$ ο χώρος συναρτήσεων στο κλειστό χωρίο $\bar{D}^{(2)}$ ($= D^{(2)} \cup \partial D^{(2)}$) που είναι συνεχείς και διαθέτουν συνεχή πρώτη παράγωγο έως και το σύνορο $\partial D^{(2)}$.

το Θεώρημα Β), το συναρτησιακό $\mathcal{F}\left(\varphi^{(2)}, A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}, A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N}\right)$, οριζόμενο στην Εξ. (3.1), μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο της ακόλουθης μορφής

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \left(\begin{array}{c} b \\ \varphi_{-1}(x), \\ a \end{array}, \left\{ \begin{array}{c} b \\ \varphi_n(x) \\ a \end{array} \right\}_{n=0,1,2,\dots}, A_R, \{C_n^{(1)}\}_{n \in N}, A_T, \{C_n^{(3)}\}_{n \in N} \right), \quad (5.1)$$

όπου η γραφή του a άνωθεν και του b κάτωθεν της συνάρτησης δείχνει το εύρος τιμών της ψευδομεταβλητής x (βοηθητική μεταβλητή) σύμφωνα με το συμβολισμό κατά Volterra. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος που συνδέονται με το επιτρεπτό κυματικό δυναμικό, δηλαδή, $\varphi^{(2)}(x, z)$ στο $D^{(2)}$ (εσωτερικά σημεία) και $\varphi^{(2)}(x, z)$ στο $\partial D^{(2)}$ (συνοριακές τιμές πυθμένα) περιγράφονται ισοδυνάμως από τα πλάτη $\varphi_n(x)$, $x \in (a, b)$, $n = -1, 0, 1, \dots$, των ιδιομορφών. Άρα, η νέα πληρέστερη καταγραφή των βαθμών ελευθερίας, που αναδύεται λόγω της αναπαράστασης (4.13), έχει ως εξής:

- (i) το αριθμήσιμο σύνολο (απειροσύνολο) των μιγαδικών συναρτήσεων πλάτους $\{\varphi_n(x)\}_{n=-1,0,1,\dots}$, επί όλων των τιμών $x \in (a, b)$,
 - (ii) το αριθμήσιμο σύνολο (απειροσύνολο) $\{\varphi_n(a)\}_{n=0,1,\dots}$ στη θέση $x = a$, δηλαδή, των συνοριακών τιμών των πλατών στην αριστερή κατακόρυφη διεπιφάνεια,
 - (iii) το αριθμήσιμο σύνολο (απειροσύνολο) $\{\varphi_n(b)\}_{n=0,1,\dots}$ στη θέση $x = b$, δηλαδή, των συνοριακών τιμών των πλατών στην δεξιά κατακόρυφη διεπιφάνεια,
- και τέλος, το σύνολο των συντελεστών $\{A_R, C_n^{(1)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ και $\{A_T, C_n^{(3)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, όπως αυτοί ορίζονται στα στοιχεία (γ) και (δ) της καταγραφής που ακολουθεί τον ορισμό του συναρτησιακού \mathcal{F} , Εξ. (3.1) και (3.2).

Ιδιαίτερα, για την περίπτωση του πλάτους της ιδιομορφής κεκλιμένου πυθμένα $\varphi_{-1}(x)$, υιοθετούνται οι ακόλουθες συνθήκες άκρων

$$\varphi_{-1}(a) = \varphi_{-1}(b) = 0, \quad \text{και} \quad \varphi'_{-1}(a) = \varphi'_{-1}(b) = 0, \quad (5.2)$$

οι οποίες, επάγονται από την Εξ. (4.12) και τις υποθέσεις λειότητας για τη συνάρτηση βαθυμετρίας $h(x)$: δεξ Εξ. (2.2) και (2.3).

Η χρήση ενός διαφορετικού (ισοδύναμου) συνόλου βαθμών ελευθερίας του συστήματος στη μεταβολική αρχή οδηγεί σε ένα διαφορετικό (ισοδύναμο) σύνολο εξισώσεων για το ίδιο πρόβλημα $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$, με την μορφή ενός συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών (Coupled-Mode System) ως προς τα άγνωστα μιγαδικά πλάτη $\varphi_n(x)$, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, του πεδίου στην ενδιάμεση περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας.

7.5.1 Παραγωγή του συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών (CMS)

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οποιαδήποτε επιτρεπτή συνάρτηση $\varphi^{(2)}$ ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, Εξ. (2.14b), το τρίτο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της Εξ. (3.3b) αμελείται. Περαιτέρω, υποθέτοντας ότι όλες οι μεταβολές, εκτός της $\delta\varphi^{(2)}(x, z)$ στο $D^{(2)} \cup \partial D_H^{(2)}$, είναι μηδενικές, τα τελευταία τέσσερα ολοκληρώματα της Εξ. (3.3b) επίσης αμελούνται, κι έτσι λαμβάνουμε

$$-\int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta\varphi^{(2)} dV + \int_{\partial D_H^{(2)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \right) \delta\varphi^{(2)} dS = 0. \quad (5.3)$$

Εισάγοντας, στην ανωτέρω εξίσωση την αναπαράσταση (4.13) για το $\varphi^{(2)}$, και την εξ αυτής της τελευταίας επαγόμενη έκφραση

$$\delta\varphi^{(2)}(x, z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \delta\varphi_n(x) Z_n(z; x), \quad (x, z) \in D^{(2)} \cup \partial D_H^{(2)}, \quad (5.4)$$

για τη μεταβολή της, $\delta\varphi^{(2)}$, χρησιμοποιώντας επιπλέον, τελικά, και τη γεωμετρική σχέση

$$\left(n_x^{(2)}, n_z^{(2)} \right) = -(h'(x), 1) / \sqrt{1 + (h'(x))^2}, \quad (x, z) \in \partial D_H^{(2)}, \quad (5.5)$$

λαμβάνουμε τη μεταβολική εξίσωση:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} \int_{x=a}^{x=b} \delta\varphi_m(x) \left[\sum_{n=-1}^{\infty} a_{mn}(x) \varphi_n''(x) + b_{mn}(x) \varphi_n'(x) + c_{mn}(x) \varphi_n(x) \right] dx = 0, \quad (5.6)$$

όπου το τονούμενο μέγεθος αναφέρεται στην παραγωγή ως προς x .

Οι από το x -εξαρτώμενοι συντελεστές $a_{mn}(x)$, $b_{mn}(x)$ και $c_{mn}(x)$ δίνονται στον Πίνακα 1. Τα σύμβολα $\|\cdot\|$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle$, που εμφανίζονται στον Πίνακα 1, επισημαίνουν τη νόρμα και το εσωτερικό γινόμενο του χώρου $L^2(-h(x), 0)$, όπου η ολοκλήρωση πάντοτε πραγματοποιείται συναρτήσει της κατακόρυφης μεταβλητής $z \in [-h(x), 0]$. Για την παραγωγή των Εξ. (5.6) χρησιμοποιήθηκαν, επίσης, οι ιδιότητες (4.3α) και (4.3γ) της τοπικής κατακόρυφης βάσης $\{Z_n(x, z)\}_{n=0,1,\dots}$. Αφού οι μεταβολές $\delta\varphi_m(x)$, $m = -1, 0, 1, \dots$ είναι τυχούσες, ανεξάρτητες μεταβολές, η Εξ. (5.6) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο απειροσύστημα

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{mn}(x) \varphi_n''(x) + b_{mn}(x) \varphi_n'(x) + c_{mn}(x) \varphi_n(x) = 0, \quad a < x < b, \quad m = -1, 0, 1, \dots, \quad (5.7)$$

το οποίο θα καλείται *σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών των οριζοντίων εξισώσεων (coupled-mode system of horizontal equations)*. Από την ως άνω παραγωγή του, είναι φανερό ότι το σύστημα (5.7) σχετίζεται τόσο με την εξίσωση Laplace (πεδιακή εξίσωση) όσο και με την

συνοριακή συνθήκη πυθμένα. Αυτή η πρόσθετη ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα είναι που επιτρέπει την ταυτόχρονη ικανοποίηση και των δύο εξισώσεων.

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω, ας εξετάσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις που περιλαμβάνονται στην Εξ. (5.7). Στην περίπτωση που ο κεκλιμένος πυθμένας αμελείται, λαμβάνουμε την επεκταμένη εξίσωση ήπιας κλίσης (σύστημα εξισώσεων, extended mild-slope equation), όπως παράχθηκε από τους Massel (1993) και Porter & Staziker (1995). Αν, επιπροσθέτως, όλες οι αποσβενόμενες ιδιομορφές παραλειφθούν και η αναπαράσταση απομείνει μόνο με την διαδιδόμενη ιδιομορφή ($n=0$), η Εξ. (5.7) μεταπίπτει στην τροποποιημένη εξίσωση ήπιας κλίσης, που παράχθηκε από τους Massel (1993) και Chamberlain & Porter (1995).

7.5.2 Συνοριακές συνθήκες για τα πλάτη των ιδιομορφών

Μια και το σύστημα (5.7) είναι ισοδύναμο με την Εξ. (5.3), κρατώντας το δεύτερο καθίσταται το πρώτο ταυτότητα. Έτσι, η μεταβολική εξίσωση (3.3β) απλοποιείται και γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \\ & + \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right) dS - \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x} \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Υποθέτοντας ότι όλες οι μεταβολές στην Εξ. (5.8), εκτός της $\delta \varphi^{(2)}$ πάνω στο $\partial D_I^{(12)}$, κρατούνται μηδενικές, λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS = 0. \quad (5.9)$$

Η κάθετη παράγωγος $\partial \varphi^{(1)} / \partial n^{(1)}$ του κυματικού δυναμικού πάνω στο αριστερό σύνορο συναρμογής $\partial D_I^{(12)}$ υπολογίζεται με κατά όρους διαφορίση της σειράς (2.9), ως προς την οριζόντια συντεταγμένη, ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(1)}(x=a, z)}{\partial n^{(1)}} & \equiv \frac{\partial \varphi^{(1)}(x=a, z)}{\partial x} = \left(ik_0^{(1)} A_0 \exp(ik_0^{(1)} a) - ik_0^{(1)} A_R \exp(-ik_0^{(1)} a) \right) Z_0^{(1)}(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{(1)} C_n^{(1)} Z_n^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Από την άλλη, με χρήση των Εξ. (4.13) και (5.2), λαμβάνουμε,

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}(x=a, z)}{\partial n^{(2)}} \equiv - \frac{\partial \varphi^{(2)}(x=a, z)}{\partial x} = - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(a) Z_n(z; a), \quad (5.11)$$

και

$$\delta\varphi^{(2)}(x=a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\varphi_n(a) Z_n(z; a), \quad -h_1 \leq z \leq 0. \quad (5.12)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (5.10), (5.11) και (5.12) στην Εξ. (5.9), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \delta\varphi_m(a) \int_{z=-h_1}^0 \left\{ \left(ik_0^{(1)} A_0 \exp(ik_0^{(1)} a) - ik_0^{(1)} A_R \exp(-ik_0^{(1)} a) \right) Z_0^{(1)}(z) - \varphi_0'(a) Z_0(z; a) \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n^{(1)} C_n^{(1)} Z_n^{(1)}(z) - \varphi_n'(a) Z_n(z; a) \right) Z_m(z; a) dz = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Καθώς το $x \rightarrow a + 0$, η $h(x) \rightarrow h_1$ κατά C^2 -έννοια και, συνεπώς, η τοπική βάση $\{Z_n(z; x)\}_{n=0,1,\dots}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη βάση $\{Z_n^{(1)}(z)\}_{n=0,1,\dots}$ της αριστερής ημιάπειρης λωρίδας για $z \in [h_1, 0]$. Εκμεταλλευόμενοι αυτήν την ιδιότητα σε συνδυασμό με την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $Z_n^{(1)}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, και την «τυχειότητα» των μεταβολών $\delta\varphi_n(a)$, λαμβάνουμε από την Εξ. Το ακόλουθα σύστημα συνθηκών στη θέση $x = a$:

$$\varphi_0'(a) = ik_0^{(1)} \left(A_0 \exp(ik_0^{(1)} a) - A_R \exp(-ik_0^{(1)} a) \right), \quad \varphi_n'(a) = k_n^{(1)} C_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.14a,b)$$

Ας συνεχίσουμε τώρα θεωρώντας ότι όλες οι μεταβολές στην Εξ. (5.8), εκτός της $\delta(\partial\varphi^{(1)}/\partial x)$ επί του $\partial D_I^{(12)}$, μηδενίζονται. Με βάση αυτό, λαμβάνουμε

$$\int_{\partial D_I^{(12)}} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \delta \left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} \right) dS = 0. \quad (5.15)$$

Η μεταβολή $\delta(\partial\varphi^{(1)}/\partial x)$ πάνω στο $\partial D_I^{(12)}$, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την Εξ. (5.10):

$$\delta \left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} \right)_{\partial D_I^{(12)}} = -ik_0^{(1)} \exp(-ik_0^{(1)} a) Z_0^{(1)}(z) \delta A_R + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^{(1)} Z_n^{(1)}(z) \delta C_n^{(1)}. \quad (5.16)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (5.16), (4.13), και (2.9) στην Εξ. (5.15), και χρησιμοποιώντας την (5.2), παίρνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \int_{z=-h_1}^0 \left\{ \left(A_0 \exp(ik_0^{(1)} a) + A_R \exp(-ik_0^{(1)} a) \right) Z_0^{(1)}(z) - \varphi_0(a) Z_0(z; a) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{(1)} Z_n^{(1)}(z) - \varphi_n(a) Z_n(z; a) \right) \times \\ \times \left\{ -ik_0^{(1)} \exp(-ik_0^{(1)} a) Z_0^{(1)}(z) \delta A_R + \sum_{m=1}^{\infty} k_m^{(1)} Z_m^{(1)}(z) \delta C_m^{(1)} \right\} dz = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι $\{Z_n(z; x)\}_{n=0,1,\dots} \rightarrow \{Z_n^{(1)}(z)\}_{n=0,1,\dots}$ καθώς $x \rightarrow a + 0$, σε συνδυασμό με την ορθογωνιότητα των $Z_n^{(1)}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, και το αυθαίρετο των μεταβολών των συντελεστών $\{\delta A_R, \delta C_n^{(1)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, από την Εξ. (5.17) λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα συνθηκών για τη θέση $x = a$,

$$\varphi_0(a) = A_0 \exp(ik_0^{(1)}a) + A_R \exp(-ik_0^{(1)}a), \quad \varphi_n(a) = C_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.18\alpha, \beta)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, σε συνδυασμό με τους όρους της Εξ. (5.8) που ορίζονται επί του δεξιά ορίου συναρμογής $\partial D_I^{(23)}$, λαμβάνουμε ακόλουθο σύστημα συνθηκών για τη θέση $x = b$:

$$\varphi_0(b) = A_T \exp(ik_0^{(3)}b), \quad \varphi_n(b) = C_n^{(3)} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.19\alpha, \beta)$$

$$\varphi_0'(b) = ik_0^{(3)} A_T \exp(ik_0^{(3)}b), \quad d\varphi_n(b)/dx = -k_n^{(3)} C_n^{(3)} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.20\alpha, \beta)$$

Πράγματι, οι άγνωστοι συντελεστές $A_R, C_n^{(1)}, n = 1, 2, \dots$ ($A_T, C_n^{(3)}, n = 1, 2, \dots$) μπορούν να παραληφθούν από τις Εξ. (5.14), (5.18) (Εξ. (5.19), (5.20)), οδηγώντας σε συνοριακές συνθήκες Robin για τα φ_0 και φ_n , $n = 1, 2, \dots$ στη θέση $x = a$ ($x = b$). Ανακεφαλαιώνοντας τα αποτελέσματα ανωτέρω μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα Γ [Το σύστημα συζευγμένων ιδιομορφών]: Η μεταβολική εξίσωση (3.3) και, επομένως, το πρόβλημα διάδοσης $\mathcal{P}_T(D^{(2)}, \mu, A_0)$, είναι ισοδύναμα με το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{mn}(x) \varphi_n''(x) + b_{mn}(x) \varphi_n'(x) + c_{mn}(x) \varphi_n(x) = 0, \quad a < x < b, \quad m = -1, 0, 1, \dots \quad (5.21)$$

με $a < x < b$, το οποίο συμπληρώνεται με τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$\varphi_{-1}(a) = \varphi_{-1}'(a) = 0, \quad \varphi_{-1}(b) = \varphi_{-1}'(b) = 0, \quad (5.22\beta, \beta')$$

$$\varphi_0(a) + ik_0^{(1)} \varphi_0(a) = 2ik_0^{(1)} A_0 \exp(ik_0^{(1)}a), \quad \varphi_n'(a) - k_n^{(1)} \varphi_n(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.22\gamma, \gamma')$$

$$\varphi_0'(b) - ik_0^{(3)} \varphi_0(b) = 0, \quad \varphi_n'(b) + k_n^{(3)} \varphi_n(b) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.22\delta, \delta')$$

Οι συντελεστές $A_R, C_n^{(1)}, A_T, C_n^{(3)}$ υπολογίζονται με χρήση των εξισώσεων:

$$A_R = \left(\varphi_0(a) - A_0 \exp(ik_0^{(1)}a) \right) \exp(ik_0^{(1)}a), \quad C_n^{(1)} = \varphi_n(a), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.23\alpha, \alpha')$$

$$A_T = \varphi_0(b) \exp(-ik_0^{(3)}b), \quad C_n^{(3)} = \varphi_n(b), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.23\beta, \beta')$$

Παρατηρήσεις: (i) Η διατύπωση με τη μορφή του συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών, Εξ. (5.21), (5.22), προσφέρει μείωση κατά μια της διάστασης του αρχικού προβλήματος, Εξ. (2.14), ελαττώνει τις διαστάσεις του αρχικού προβλήματος κατά μία, Eqs. (2.14), με κόστος την ολοκλήρωση ενός απειροσυστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές. (ii) Παρά τη σύζευξη των διαφορικών εξισώσεων, οι συνοριακές συνθήκες (5.22) είναι ασύζευκτες. (iii) Η διέγερση του συστήματος από το προσπίπτον κύμα εμφανίζεται μόνο στη συνοριακή συνθήκη (5.22γ). (iv) Κάτω από τις υποθέσεις λειότητας, Εξ. (2.2), όλοι οι συντελεστές $a_{mn}(x)$, $b_{mn}(x)$, $c_{mn}(x)$ του συστήματος είναι συνεχείς συναρτήσεις του x και μπορούν να υπολογισθούν μέσω της λύσης του τοπικού (κατακόρυφου) προβλήματος ιδιοτιμών. (v) Ασυνέχειες της $h(x)$ ή $h'(x)$ μπορούν να αντιμετωπισθούν εισάγοντας καταλλήλως την αποσύνθεση του χωρίου μαζί με συνθήκες συναρμογής συνόρου στα σημεία ασυνέχειας, βλ., Porter & Chamberlain (1997). (vi) Η παρούσα θεωρία μπορεί να επεκταθεί άμεσα και στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε προσπίπτοντες κυματισμούς και από τις δυο και από τις δύο κατευθύνσεις ($\pm \infty$) ταυτόχρονα, όπως επίσης και στην περίπτωση πλαγίως προσπιπτόντων κυματισμών.

Η θεωρητική διερεύνηση του συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών, δηλαδή, η επιλογή κατάλληλου χώρου συναρτήσεων, η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης και άλλες ιδιότητες της τελευταίας αποτελούν πολύ ενδιαφέροντα θέματα για περαιτέρω διερεύνηση.

7.6 Διακριτοποίηση και υπολογιστικά παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται το διακριτό σχήμα για την αριθμητική λύση του συστήματος συζευγμένων ιδιομορφών (CMS) και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα διάδοσης υδάτινων κυματισμών για διάφορες τιμές των εμπλεκόμενων παραμέτρων. Επίσης, παρουσιάζονται αποτελέσματα από συγκριτικούς υπολογισμούς που λήφθηκαν με τη χρήση της παρούσας μεθόδου (εμπλουτισμένη σειρά τοπικών ιδιομορφών), σε σύγκριση με την αντίστοιχη αναπαράσταση χωρίς τον πρόσθετο όρο κεκλιμένου πυθμένα (Massel 1993, Porter & Staziker 1995), καθώς και με χρήση της τροποποιημένη εξίσωση ήπιας κλίσης (Massel 1993, Champelrain & Porter 1995).

7.6.1 Διακριτοποίηση του συστήματος CMS

Προκειμένου να παρουσιασθεί με περισσότερες λεπτομέρειες το διακριτό σχήμα, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τη μορφή της ισομορφής κεκλιμένου πυθμένα που θα χρησιμοποιηθεί. Μια απλή σχετικά επιλογή που ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες είναι η ακόλουθη

$$Z_{-1}(z;x) = h(x) \left[\left(\frac{z}{h(x)} \right)^3 + \left(\frac{z}{h(x)} \right)^2 \right]. \quad (6.1)$$

Στη συνέχεια, η σειρά (3.20) περικόπτεται κρατώντας ένα πεπερασμένο αριθμό όρων (modes) $N_e + 2$, και λαμβάνεται η ακόλουθη προσέγγιση του κυματικού δυναμικού κύματος στο ενδιαμέσο χωρίο $D^{(2)}$ μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας

$$\varphi^{(2)}(x,z) = \sum_{n=-1}^{N_e} \varphi_n(x) Z_n(z;x). \quad (6.2)$$

Στην συνέχεια το διάστημα $[a,b]$ διακριτοποιείται σε N ισοδιαστήματα μήκους δx , χρησιμοποιώντας τη διαμέριση $x_i = -a + (i-1)\delta x, i = 1, 2, \dots, N+1$. Κατόπιν χρησιμοποιείται ένα σχήμα κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης για την προσέγγιση πρώτων και δεύτερων παραγώγων που εμφανίζονται στο σύστημα CMS τάξεως προσέγγισης $O(\delta x^2)$.

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η ακόλουθη διακριτή μορφή

$$\sum_{n=-1}^{N_e} a_{mn}(x_i) \delta^2 \varphi_n(x_i) + b_{mn}(x_i) \delta^1 \varphi_n(x_i) + c_{mn}(x_i) \varphi_n(x_i) = 0, \quad m = -1, 0, 1, \dots, N_e, \\ i = 2, 3, \dots, N, \quad (6.3)$$

όπου

$$\delta^1 \varphi(x_i) = \frac{1}{2} \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}))}{\delta x} \quad \text{και} \quad \delta^2 \varphi(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{\delta x^2}. \quad (6.4)$$

Το ανωτέρω διακριτοποιημένο σύστημα (6.3) συμπληρώνεται με τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος $x = x_1 = a$, και $x = x_{N+1} = b$. Ένα σχήμα εμπρός και πίσω πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας $O(\delta x^2)$ χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών Εξ.(5.21) και (5.22) και οι διακριτοποιημένες συνθήκες λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή με $A_0 = 1$ ($\theta_0 = 0$) και $a = 0$,

$$\left[-2 - 2 \beta_n^{(1)}(\delta x) - (\beta_n^{(1)})^2 (\delta x)^2 \right] \varphi_n(x_1) + 2\varphi_n(x_2) = -4\delta_{0n}\beta_n^{(1)}(\delta x), \quad x = x_1, \quad (6.5a)$$

$$2\varphi_n(x_N) + \left[-2 - 2 \beta_n^{(1)}(\delta x) - (\beta_n^{(1)})^2 (\delta x)^2 \right] \varphi_n(x_{N+1}) = 0, \quad x = x_{N+1}, \quad (6.5b)$$

όπου δ_{mn} το δέλτα του Kronecker, ενώ οι συντελεστές $\beta_n^{(1,3)}$ ορίζονται ως ακολούθως

$$\beta_n^{(1)} = \begin{cases} 0, & n = -1 \\ -ik_0^{(1)}, & n = 0 \\ k_n^{(1)}, & n \geq 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \beta_n^{(3)} = \begin{cases} 0, & n = -1 \\ ik_0^{(3)}, & n = 0 \\ -k_n^{(3)}, & n \geq 1 \end{cases}. \quad (6.6)$$

Κατ'αυτόν τον τρόπο το διακριτοποιημένο CMS σύστημα έχει προσεγγισθεί με ακρίβεια δεύτερης τάξης και καταλήγει στην μορφή ενός αλγεβρικού γραμμικού συστήματος ως προς τις κομβικές τιμές των πλατών των ιδιομορφών στο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε. Ο αντίστοιχος διακριτός πίνακας έχει διάσταση $N_d = (N_e + 2)(N + 1)$ και είναι κατά τμήματα τρι-διαγώνιος. Η διέγερση (δεξί μέλος του συστήματος) εμφανίζεται μόνο για τον όρο ($n=0$), στο αριστερό άκρο $x = a$ (Εξ. 6.5a).

7.6.2 Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

Πριν προχωρήσουμε σε μια λεπτομερή παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, εισάγουμε κάποια ορολογία. Οι συντμήσεις ER, SR και MMS θα χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για να υποδηλώσουν τα αποτελέσματα που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τη βελτιωμένη αναπαράσταση (Enhanced Representation, παρούσα μέθοδος), την τυπική αναπαράσταση (Standard Representation,) και την τροποποιημένη εξίσωση ήπιας κλίσης, (Modified Mild Slope representation), αντίστοιχα. Επίσης, οι ίδιοι όροι ER, SR, MMS, θα χρησιμοποιηθούν για να διακρίνουν τις φυσικές ποσότητες που υπολογίζονται με τη βοήθεια αντίστοιχων μεθόδων (π.χ., πλάτη ER κ.λπ.).

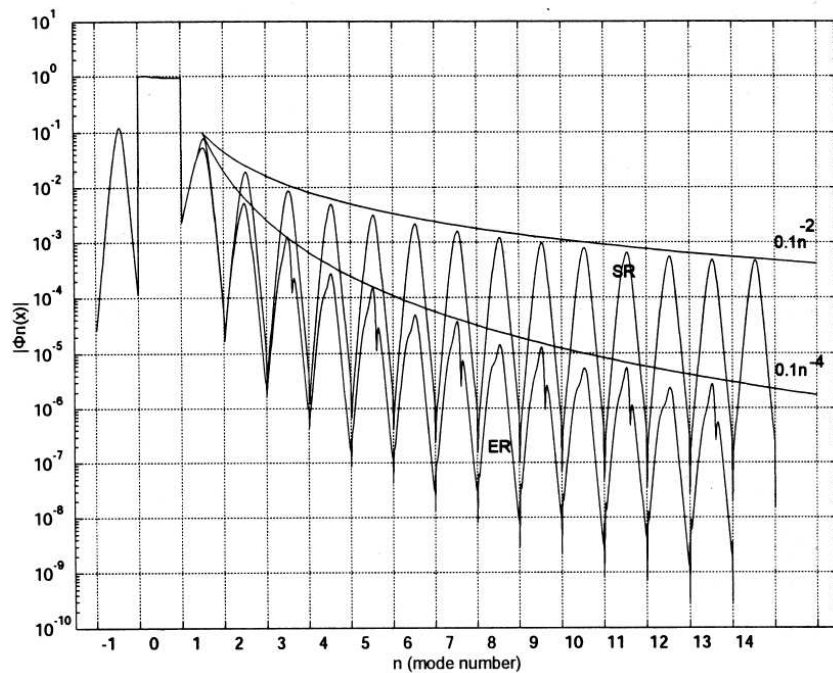
(i) Η περίπτωση ομαλής υποθαλάσσιας ρήχωσης

Αυτή η τοπογραφία έχει εξετασθεί από τον Massel (1993) προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση της κλίσης και της καμπυλότητας του πυθμένα στη λύση. Το περιβάλλον χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση βάρους

$$h(x) = h_m(x) = \begin{cases} h_1 = 6 \text{ m}, & x < a = 0, \\ \frac{h_1 + h_3}{2} - \frac{h_1 - h_3}{2} \tanh\left(3\pi\left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\right)\right), & a < x < b, \\ h_3 = 2 \text{ m}, & x > b = 20 \text{ m}, \end{cases} \quad (6.7)$$

η οποία αναπαριστά μια ομαλή, αλλά απότομη ρήγωση, με μέγιστη κλίση $s_{\max} = 0.94$ και μέση κλίση $s_{\text{mean}} = 0.2$. Ένα σκίτσο της γεωμετρίας του πυθμένα φαίνεται στο Σχ. 4 παρακάτω. Η γωνιακή συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος λαμβάνεται ως $\omega = 2 \text{ rad/sec}$, υποδηλώνοντας ότι και οι δύο λόγοι ρηχότητας $h_1/\lambda_1 = 0.4$ και $h_3/\lambda_3 = 0.17$ είναι εκτός των ορίων της θεωρίας βαθέως ή ρηχού ύδατος.

Στο Σχ. 4 παρουσιάζονται οι τα πλάτη των ιδιομορφών $|\varphi_n(x)|$, $a \leq x \leq b$, με χρήση τόσο της ER όσο και της SR. Ο οριζόντιος άξονας στο Σχήμα 4 είναι ένα πολλαπλό αντίγραφο του διαστήματος $[a, b]$. Στο n-οστό αντίγραφο του διαστήματος απεικονίζεται το πλάτος του n-στης ιδιομορφής. Για παράδειγμα, στο διάστημα που υποδεικνύεται από τον αριθμό 7, παρουσιάζεται το μέτρο $|\varphi_7(x)|$ στο διάστημα $x \in [a, b]$, όπως λαμβάνεται από το ER και SR, αντίστοιχα.



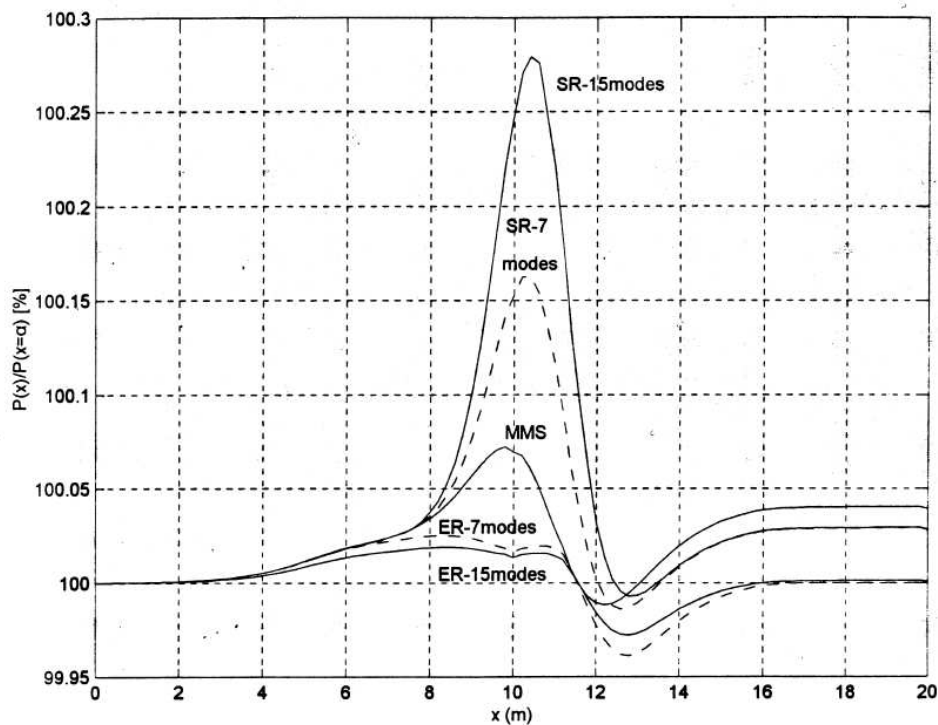
Σχήμα 4. Πλάτη των ιδιομορφών $|\varphi_n(x)|$, όπως υπολογίζονται με χρήση της SR και ER αναπαράστασης, για την περίπτωση περιβάλλοντος ομαλής ρήγωσης.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα που δείχνονται έχουν αποκτηθεί με υποδιαίρεση της περιοχής σε τμήματα και συγκράτησης καταστάσεων σε ER και τρόπους λειτουργίας σε SR, αντίστοιχα. Αυτή η επιλογή έγινε για να διατηρηθεί η ίδια διάσταση του διακριτού συστήματος στις δύο περιπτώσεις. Επίσης, στο ίδιο σχήμα, οι καμπύλες και οι γραμμές είναι σχεδιασμένες, οι οποίες δεσμεύουν τα μέγιστα των πλάτους των μεταφορικών λειτουργιών όπως λαμβάνονται από το ER και το SR, αντίστοιχα. Έτσι, αν υποθεθεί ότι αυτές οι καμπύλες οριοθέτησης παραμένουν έγκυρες για όλα τα n, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα εύρη ER

διασπών όπως, ενώ τα πλάσματα SR αποσυντίθενται όπως. (Οι αριθμητικές αποδείξεις υποστηρίζουν πλήρως αυτήν την εικασία · μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη είναι επίσης πολύ επιθυμητή). Ας σημειωθεί ότι ο ρυθμός αποσάθρωσης των SR-πλάτους δεν επαρκεί για να εξασφαλίσει την ομοιόμορφη σύγκλιση (μέχρι τον πυθμένα) της σειράς που αντιπροσωπεύει το πεδίο ταχύτητας, το οποίο έτσι μπορεί να συγκλίνει μόνο με την έννοια. Το πρόβλημα αυτό διορθώνεται μέσω της λύσης ER, δεδομένου ότι ο ρυθμός αποσύνθεσης των εύρους ER είναι, πράγμα που εξασφαλίζει την απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση έως και (και συμπεριλαμβανομένων) των ορίων.

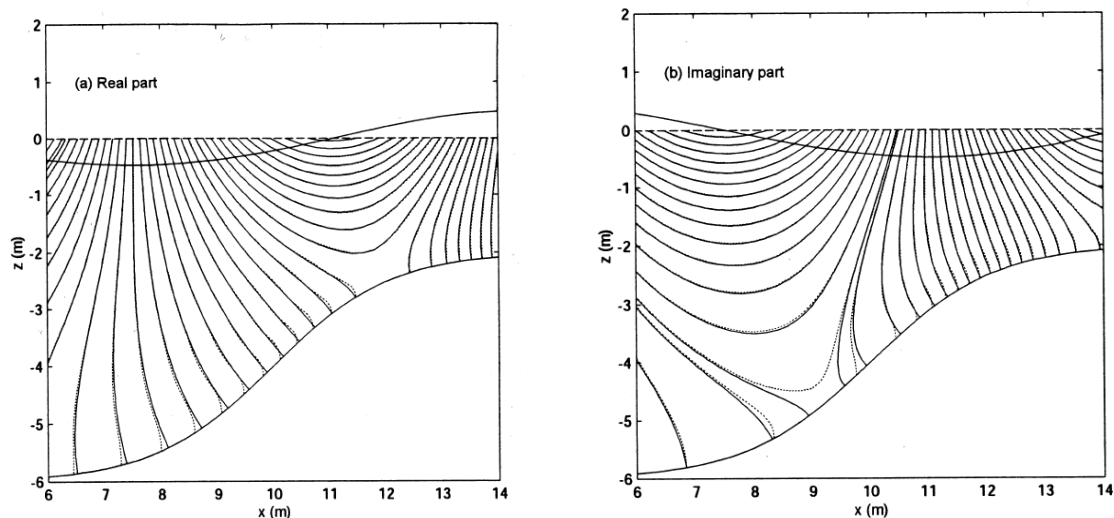
Τα παρατιθέμενα αριθμητικά αποτελέσματα λήφθηκαν μετά από διαμέριση του εύρους $b - a = 20m$ σε $N = 100$ τμήματα και διατηρώντας $N_e = 13$ ιδιομορφές (modes) στον ER και $N_e = 14$ ιδιομορφές (modes) στον SR, αντιστοίχως. Η επιλογή αυτή πραγματοποιήθηκε ώστε αν διατηρηθεί ίδια η διάσταση του διακριτού συστήματος ($N_d = 1515$) και στις δυο περιπτώσεις. Επίσης, στο ίδιο σχήμα, γράφονται οι καμπύλες $0.1n^{-4}$ και $0.1n^{-2}$, οι οποίες φράζουν τα μέγιστα των πλατών των συναρτήσεων των ιδιομορφών όπως αυτά λαμβάνονται από τα ER και SR, αντιστοίχως. Επομένως, υποθέτοντας πως αυτές οι καμπύλες φράγματος παραμένουν εν ισχύ για όλα τα n , μπορούμε να εικάσουμε ότι τα ER-πλάτη αποσβένονται κατά $O(n^{-4})$, ενώ τα SR-πλάτη αποσβένονται κατά $O(n^{-2})$. (Παρ' όλο που οι αριθμητικές ενδείξεις υποστηρίζουν πλήρως αυτήν την εικασία, μια αυστηρή μαθηματική απόδειξη είναι εξαιρετικά επιθυμητή). Ας σημειωθεί ότι ο ρυθμός απόσβεσης $O(n^{-2})$ των SR-πλατών δεν είναι επαρκής για να εξασφαλίσει την ομοιόμορφη σύγκλιση (μέχρι και τον πυθμένα) της σειράς που αναπαριστά το πεδίο ταχυτήτων, το οποίο, ακολούθως, μπορεί να συγκλίνει μόνο κατά την L^2 - έννοια. Το πρόβλημα αίρεται με χρήση της ER-λύσης, μια και ο ρυθμός απόσβεσης των ER-πλατών είναι $O(n^{-4})$, πράγμα που εξασφαλίζει την απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση ως τα (και πάνω στα) σύνορα.

Στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται η μεταβολή της κυματικής ροής ισχύος $P(x)$ μέσω μιας κατακόρυφης διατομής στην περιοχή της μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας. Το επίπεδο 100% του κατακόρυφου άξονα αντιστοιχεί στην τιμή οροφής της κυματικής ροής ισχύος, δηλαδή, την τιμή εισόδου στο χωρίο στη θέση $x=a$, η οποία θα πρέπει να διατηρείται σταθερή σε όλες τις οριζόντιες θέσεις, για όλα τα x . Τα αριθμητικά αποτελέσματα λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τα μοντέλα ER, SR και MMS. Τα αποτελέσματα μέσω των μεθόδων ER και MMS είναι σχεδόν/αρκούντως συμβατά με τη διατήρηση της ενέργειας (βλέπε, σχολιασμό στο Εδάφιο 4). Αντιθέτως, τα αποτελέσματα της SR-μεθόδου επιδεικνύουν μεγαλύτερη απόκλιση από την διατήρηση της ενέργειας και, μάλιστα, αυτή η απόκλιση αυξάνει με την αύξηση του αριθμού των αποσβενόμενων ιδιομορφών που λαμβάνονται υπ' όψιν. Αυτό το αναπάντεχο αποτέλεσμα είναι εκδήλωση της ασυμβατότητας της SR-μεθόδου με την συνοριακή συνθήκη κεκλιμένου πυθμένα: βλέπε, Εξ. (4.6).



Σχήμα 5. Μεταβολή της ροής κυματικής ισχύος $P(x)$, όπως υπολογίζεται με χρήση της SR και ER αναπαράστασης, για την περίπτωση περιβάλλοντος ομαλής ρήχωσης.

Στο Σχήμα 6 σχεδιάστηκαν οι ισοδυναμικές γραμμές (για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος) του κυματικού πεδίου στο υποχωρίο της μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, όπως υπολογίστηκαν με εφαρμογή του ER-μοντέλου. Το ύψος του προσπίπτοντος κύματος είναι $H = 1m$. Τα αποτελέσματα που απεικονίζονται στο σχήμα αυτό λήφθηκαν δεσμεύοντας έξι (6) αποσβενόμενες ιδιομορφές ($N_e = 6$) στην αναπαράσταση, αριθμός ικανοποιητικός για να επιτευχθεί αριθμητική σύγκλιση της λύσης. Τα απεικονιζόμενα χαρακτηριστικά του πεδίου στο Σχήμα 6 είναι λογικά και οι ισοδυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα το βαθυμετρικό προφίλ, ως οφείλουν. Αυτό το αποτέλεσμα δικαιολογεί την αρχική σύλληψη της έννοιας της ιδιομορφής κεκλιμένου πυθμένα, που αποτελεί κεντρική έννοια του παρόντος εδαφίου. Για την εξέταση των διαφορών στα αποτελέσματα που παρέχονται από την εφαρμογή των μοντέλων ER και SR, εστιάζουμε στην περιοχή μεταβαλλόμενου βάθους, όπως αυτή επισημαίνεται στο Σχήμα 4 με το βοηθητικό διακεκομμένο ορθογώνιο. Η κοινή απεικόνιση των ισοδυναμικών γραμμών και για τις δυο μεθόδους παρουσιάζεται στο Σχήμα 5. Το γεγονός ότι η SR-λύση ικανοποιεί την συνθήκη $\partial\phi^{(2)}/\partial z = 0$ στον πυθμένα φαίνεται εμφανώς σε αυτό το σχήμα: οι SR-γραμμές κάμπτονται και γίνονται κατακόρυφες κοντά στον πυθμένα, ανεξαρτήτως της κλίσης της βαθυμετρίας. Αυτή η εσφαλμένη εκτίμηση της ταχύτητας κοντά και πάνω στην επιφάνεια του πυθμένα είναι επίσης υπεύθυνη για την παραβίαση της αρχής διατήρησης ενέργειας..



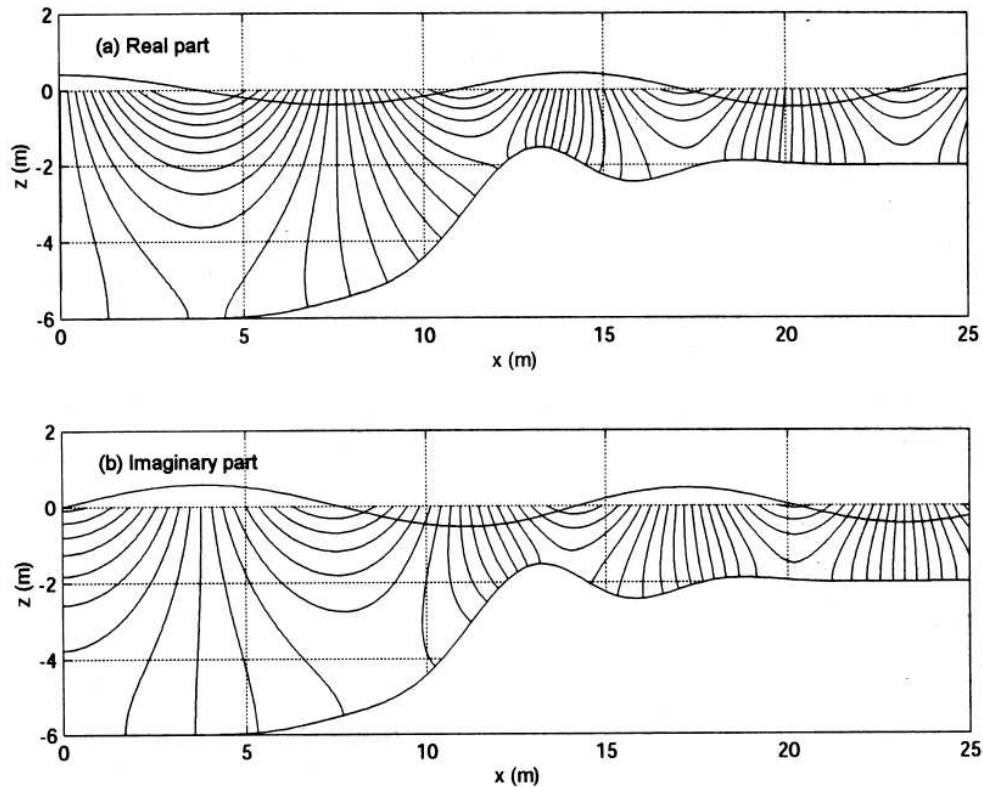
Σχήμα 6. Ισοδυναμικές γραμμές (πραγματικό και φανταστικό μέρος) πεδίου διαδιδόμενου κύματος πάνω από ομαλή ρήγωση, όπως υπολογίσθηκε με την ER αναπαράσταση. Η τροποποίηση της λύσης με χρήση της SR αναπαράστασης παρουσιάζεται με διακεκομμένη γραμμή.

(ii) Υποθαλάσσιος πυθμένας τύπου ρήγωσης με πτυχώσεις

Για την καλύτερη κατανόηση της αριθμητικής συμπεριφοράς της ER-λύσης, εστιάζουμε στην περίπτωση βαθυμετρίας με περιπλοκότερα χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα επάγεται από γεωμετρία πυθμένα που προκύπτει με χρήση της ακόλουθης συνάρτησης βαθυμετρίας

$$h(x) = h_m(x) + h_c(x) = h_m(x) + 0.67 \exp(-0.05(x - 12.5)^2) \cos(x - 12.5) \text{ m}, \quad (6.8)$$

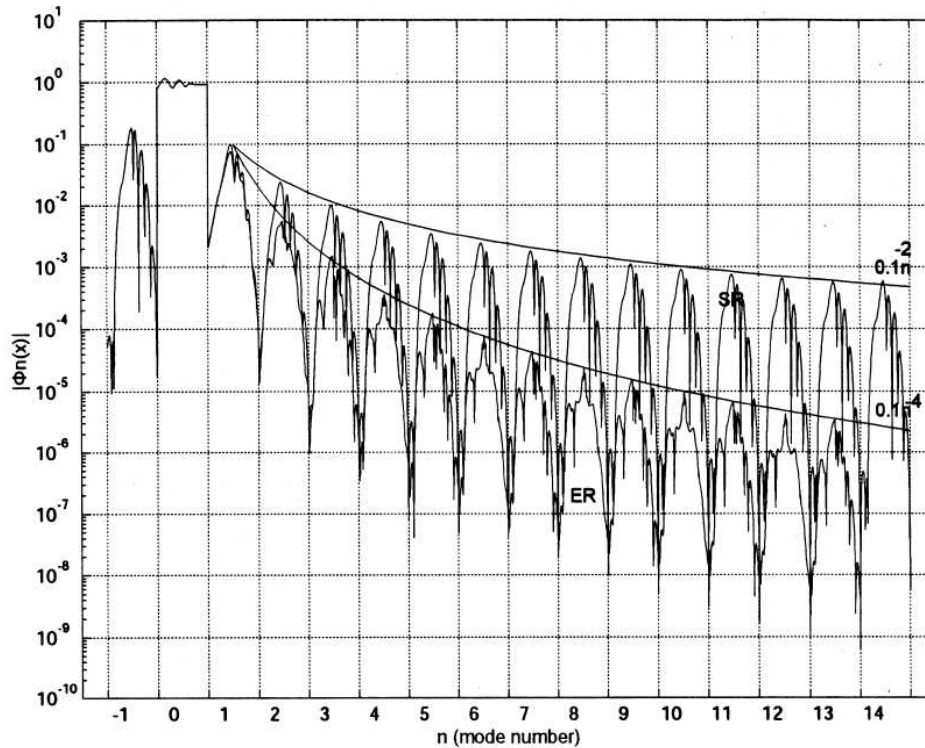
όπου το μέσο βάθος $h_m(x)$ αντιστοιχεί στην ομαλή ρήγωση οριζόμενη από την Εξ. (6.7), ενώ η $h_c(x)$ εκφράζει μια διαταραχή που διαμορφώνει πτυχώσεις πυθμένα, οι οποίες μηδενίζονται σταδιακά οδεύοντας προς το άκρο του υποχωρίου μεταβαλλομένης βαθυμετρίας. (Ένα σκαρίφημα της γεωμετρίας του πυθμένα φαίνεται στο Σχήμα 7). Η κυκλική συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος λαμβάνεται, όπως και πριν, ίση με $\omega = 2 \text{ rad/sec}$, και ο λόγος του μήκους κύματος των πτυχώσεων πυθμένα προς το μήκος κύματος του προσπίπτοντος αρμονικού κυματισμού είναι $\lambda/\lambda_1 \approx 0.42$. Η μέγιστη τιμή της κλίσης πυθμένα τοπικά υποτίθεται $s_{\max} \approx 1.2$ και θεωρείται πως την λαμβάνει στο μέσον περίπου της περιοχής μεταβαλλομένης βαθυμετρίας.



Σχήμα 7. Ισοδυναμικές γραμμές (πραγματικό και φανταστικό μέρος) πεδίου διαδιδόμενου κύματος πάνω από πυθμένα τύπου ρήχωσης με πτυχώσεις, όπως υπολογίζεται από τη παρούσα μέθοδο.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται οι ισοδυναμικές γραμμές (πραγματικό και φανταστικό μέρος) πεδίου διαδιδόμενου κύματος πάνω από πυθμένα τύπου ρήχωσης με πτυχώσεις, όπως υπολογίζεται από τη παρούσα μέθοδο. Παρατηρούμε την πολύ καλή απόδοση του πεδίου όπως έχει υπολογιστεί κρατώντας συνολικά 6 όρους. Και πάλι οι ισοδυναμικές γραμμές τέμνουν τον πυθμένα κάθετα πράγμα που ισοδυναμεί με τη πολύ καλή ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης εκεί.

Στο Σχήμα 8 παρουσιάζονται συγκριτικά τα μέτρα $|\varphi_n(x)|$ των συναρτήσεων πλάτους των ιδιομορφών για τις περιπτώσεις των μοντέλων ER και SR, αντιστοίχως. Η παρατηρούμενη πολυπλοκότητα των απεικονιζομένων χαρακτηριστικών των συναρτήσεων πλατών αντικατοπτρίζει την πολυπλοκότητα της επιλεχθείσας συνάρτησης βάθους. Παρόλα αυτά, οι καμπύλες $0.1 n^{-4}$ και $0.1 n^{-2}$ που φράζουν τα μέγιστα των πλατών για τα μοντέλα ER και SR, αντιστοίχως, παραμένουν πρακτικά οι ίδιες. Για την επιλεχθείσες γεωμετρικές διαμορφώσεις του πυθμένα, στα πλαίσια του παρόντος, εκτενή αριθμητικά αποτελέσματα παρέχουν την απόδειξη ότι οι πιο σημαντικές παράμετροι που ελέγχουν τις καμπύλες φράγματος των πλατών των ιδιομορφών είναι οι $h_1/\lambda_1, h_3/\lambda_3$ ή, για δεδομένη βαθυμετρία, η κυκλική συχνότητα ω . Τούτο απεικονίζεται λεπτομερέστερα στο Σχήμα 8, όπου οι καμπύλες οι οποίες φράζουν τα μέγιστα των πλατών σύμφωνα με το μοντέλο ER και SR, αντιστοίχως, σχεδιάζονται συναρτήσει του αριθμού των εμπλεκόμενων ιδιομορφών για τέσσερις (4) διαφορετικές τιμές κυκλικής συχνότητας, από $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ (που αντιστοιχεί σε συνθήκες ρηχού νερού και στα δυο άκρα) έως και $\omega = 4 \text{ rad/sec}$ (που αντιστοιχεί σε συνθήκες βαθιού νερού και στα δυο άκρα).



Σχήμα 8. Πλάτη των ιδιομορφών $|\varphi_n(x)|$, όπως υπολογίζονται με χρήση της SR και ER αναπαράστασης, για την περίπτωση περιβάλλοντος τύπου ρήχωσης με πτυχώσεις.

Από τη συστηματική διερεύνηση προκύπτει ότι καθώς οι $h_1/\lambda_1, h_3/\lambda_3$ αυξάνονται (προς το όριο βαθιού νερού, $h/\lambda \approx 0.5$, και πέραν αυτού) ή καθώς μειώνονται (προς το όριο ρηχού νερού, $h/\lambda \approx 0.07$, και πέραν αυτού) οι συντελεστές των καμπυλών που φράζουν τα πλάτη των ιδιομορφών μειώνονται, ενώ οι εκθέτες (που ελέγχουν το ρυθμό απόσβεσης) παραμένουν αμετάβλητοι.

(iii) Σκέδαση Bragg από διπλά περιοδικό πυθμένα

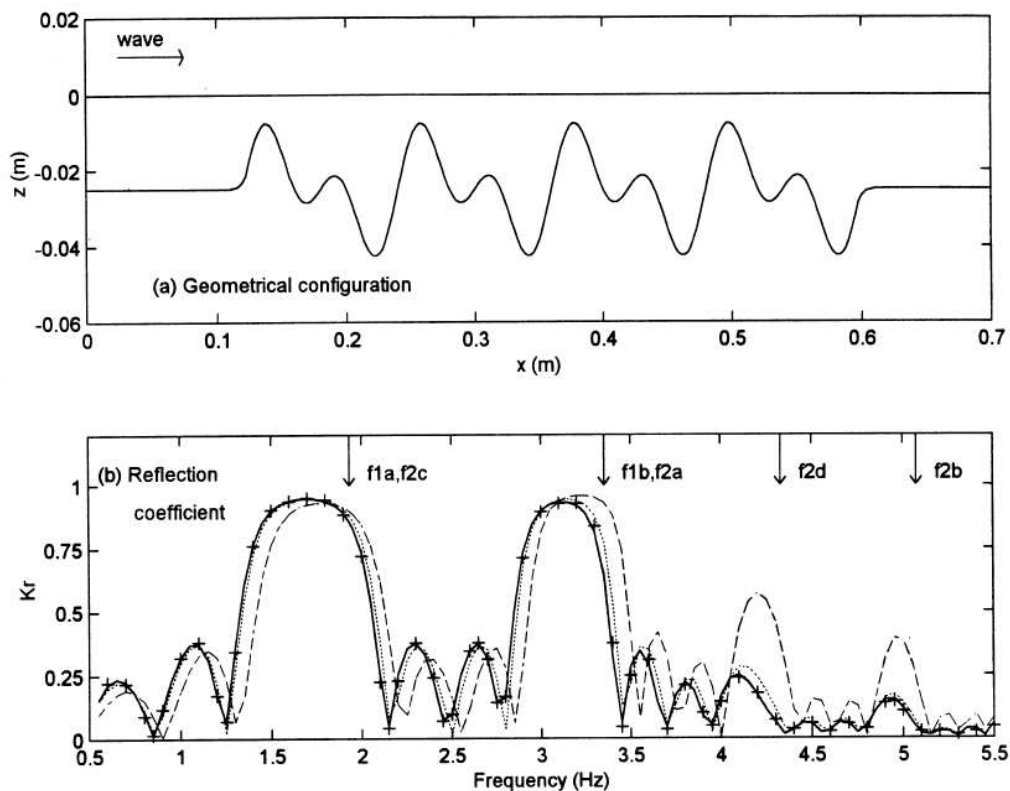
Ως τελευταίο παράδειγμα θεωρούμε ένα διπλά περιοδικό πυθμένα, που έχει μελετηθεί εκτενώς από τους Mei (1985) και Guazzelli et al. (1992), σε σχέση με τη φαινόμενα σκέδασης Bragg. Η γεωμετρία του πυθμένα ορίζεται από την ακόλουθη συνάρτηση βάθους (βλέπε επίσης Σχήμα 9)

$$h_b(x) = \begin{cases} 2.5cm, & x \leq 12cm \\ 2.5 - \sin(K_1(x-12)) - \sin(K_2(x-12)) cm, & 12cm < x < 60cm \\ 2.5cm, & x \geq 60cm \end{cases}, \quad (6.10)$$

όπου $K_1 = 0.52 cm^{-1}$ και $K_2 = 1.05 cm^{-1}$ είναι οι χαρακτηριστικοί κυματαριθμοί της θερούμενης βαθυμετρίας. Λόγω του ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για ανακλάσεις συντονισμού, στην περίπτωση αυτή εστιάζουμε στην υπολογισμό του συντελεστή ανάκλασης για διάφορες συχνότητες, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 9. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν ληφθεί με χρήση των αναπαραστάσεων ER και SR (εξαιρώντας την ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα) και του μοντέλου MMS. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν $N = 201$ σημεία για την οριζόντια διακριτοποίηση του χωρίου στην περιοχή μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας. Στο ίδιο

σχήμα απεικονίζονται επίσης αριθμητικά αποτελέσματα (που δείχνονται με σταυρούς), που ελήφθησαν από τους Guazzelli et al (1992) με κλιμακωτή προσέγγιση της γεωμετρίας του πυθμένα (staircase approximation).

Στην περίπτωση που μελετήθηκε, ο συντονισμός Bragg πρώτης τάξης, που αντιστοιχεί σε $0.5K_1$ and $0.5K_2$, συμβαίνει στις συχνότητες $f_{1a} = 1.93\text{Hz}$ και $f_{1b} = 3.35\text{Hz}$, αντίστοιχα. Ο συντονισμός Bragg δεύτερης τάξης, που αντιστοιχεί σε $K_1, K_2, 0.5(K_2 - K_1)$ και $0.5(K_2 + K_1)$, λαμβάνει χώρα στις συχνότητες $f_{2a} = 3.35\text{Hz}$, $f_{2b} = 5.07\text{Hz}$, $f_{2c} = 1.93\text{Hz}$ και $f_{2d} = 4.33\text{Hz}$, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση των μοντέλων ER και SR φαίνεται γενικά να είναι συγκρίσιμα. Ωστόσο, υπάρχει μια μετατόπιση συχνότητας δημιουργώντας αποκλίσεις σε ορισμένες περιοχές συχνότητας (π.χ., 1.9-2.2Hz, 3.25-3.4Hz, 4.2-4.35Hz). Ο συντελεστής ανάκλασης που υπολογίζεται από το μοντέλο MMS μετατοπίζεται περισσότερο προς τις υψηλότερες συχνότητες, με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται σημαντικές αποκλίσεις σε ευρύτερα διαστήματα συχνότητας (π.χ., 3.3-3.7Hz, 4.1-4.4Hz). Επιπλέον, μπορεί να παρατηρηθεί στο Σχ. 7 (κάτω) ότι οι προβλέψεις μοντέλου MMS του συντελεστή ανάκλασης διαφέρουν σημαντικά από εκείνες όλων των άλλων μεθόδων στη γειτονία των συχνότητων συντονισμού Bragg δεύτερης τάξης.

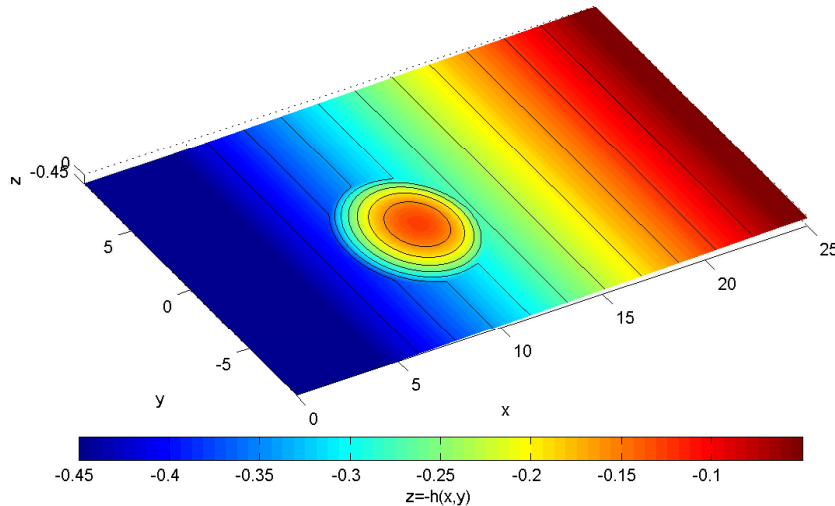


Σχήμα 9. Εξέταση φαινομένων σκέδασης Bragg από διπλά περιοδικό πυθμένα, και υπολογιζόμενος συντελεστής ανάκλασης.

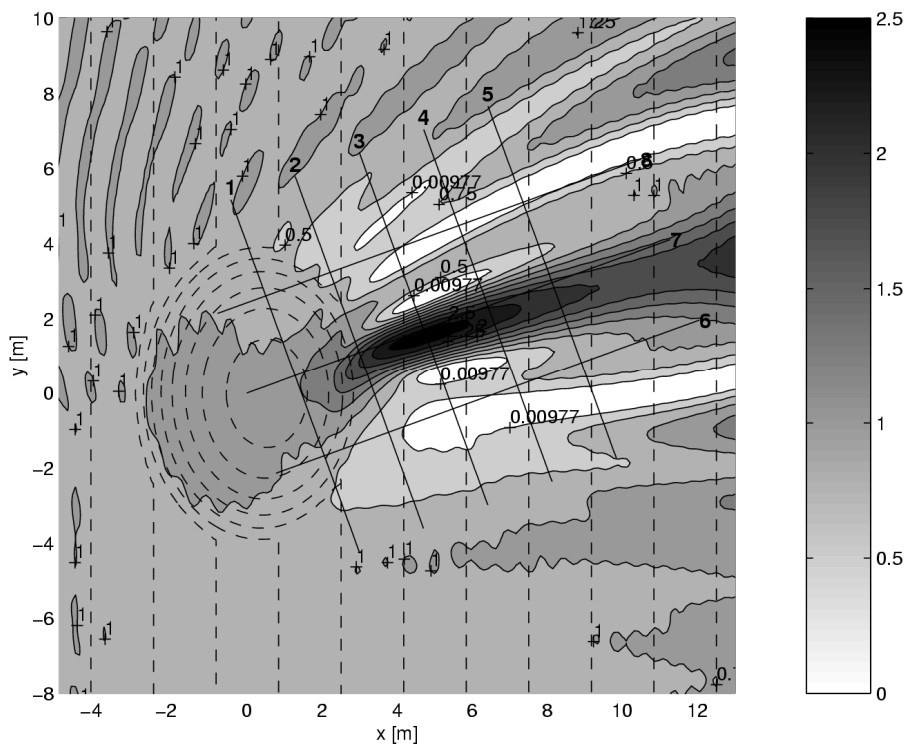
Γενικά, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο ER είναι σε άριστη συμφωνία με εκείνα που λαμβάνονται με τη μέθοδο της κλιμακωτής προσέγγισης. Αυτό αναμένεται επειδή και οι δύο μέθοδοι αντιμετωπίζουν το πλήρες γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή δεν εισάγουν απλουστευτικές υποθέσεις. Ωστόσο, σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων έγκειται στον υπολογισμό του πεδίου ταχύτητας κοντά και πάνω στην επιφάνεια του πυθμένα. Ενώ το μοντέλο ER μπορεί να προβλέψει μια ομαλή και ρεαλιστική προσέγγιση της εφαιπτομενικής

ταχύτητας πυθμένα, η μέθοδος κλιμακωτής προσέγγισης εισάγει τεχνητές γωνίες που καθιστούν την ταχύτητα κύματος τοπικά ιδιόμορφη.

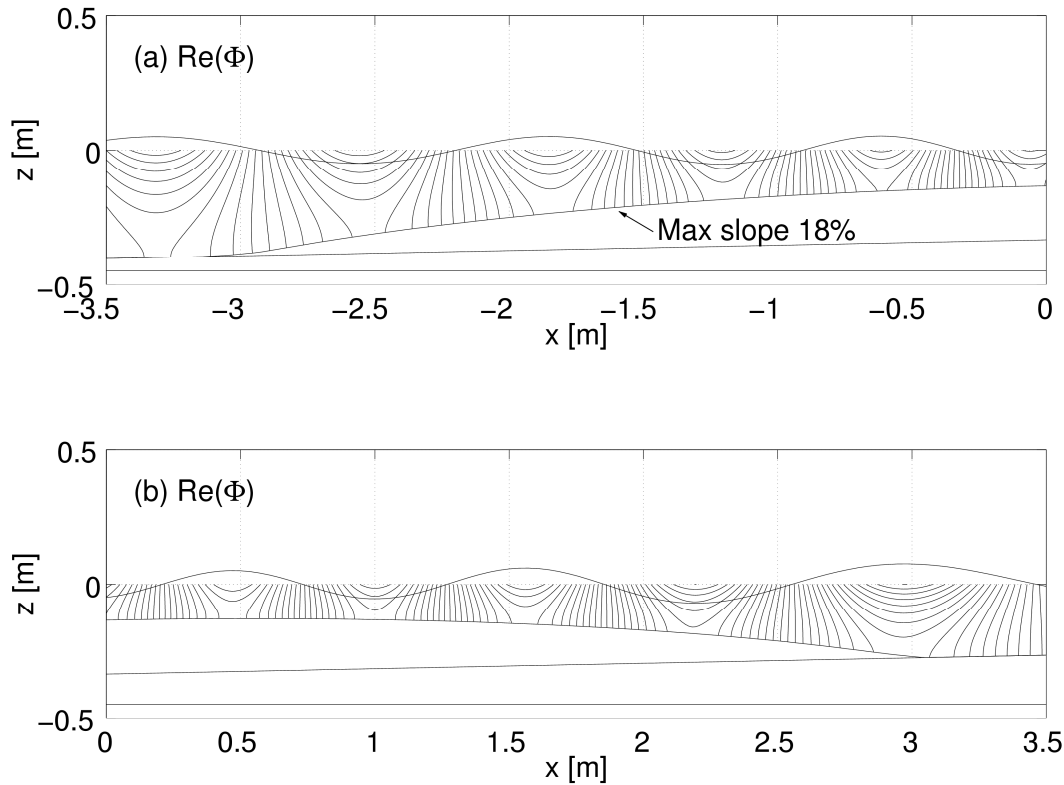
Τέλος, στα Σχήματα 10-15 παρουσιάζονται πρόσθετα αποτελέσματα από την επέκταση του παρόντος στις τρεις διαστάσεις και την εφαρμογή του σε διάφορες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπως κυματική διάδοση πάνω από ελλειπτικό ύφαλο που εδράζεται σε κεκλιμένο πυθμένα και σύγκριση με πειραματικές μετρήσεις (Berkhoff et al 1982), καθώς επίσης και για την πρόβλεψη διάδοσης κυματισμών πάνω από πραγματική τοπογραφία υποθαλάσσιου φαραγγιού στην περιοχή Scripps, California.



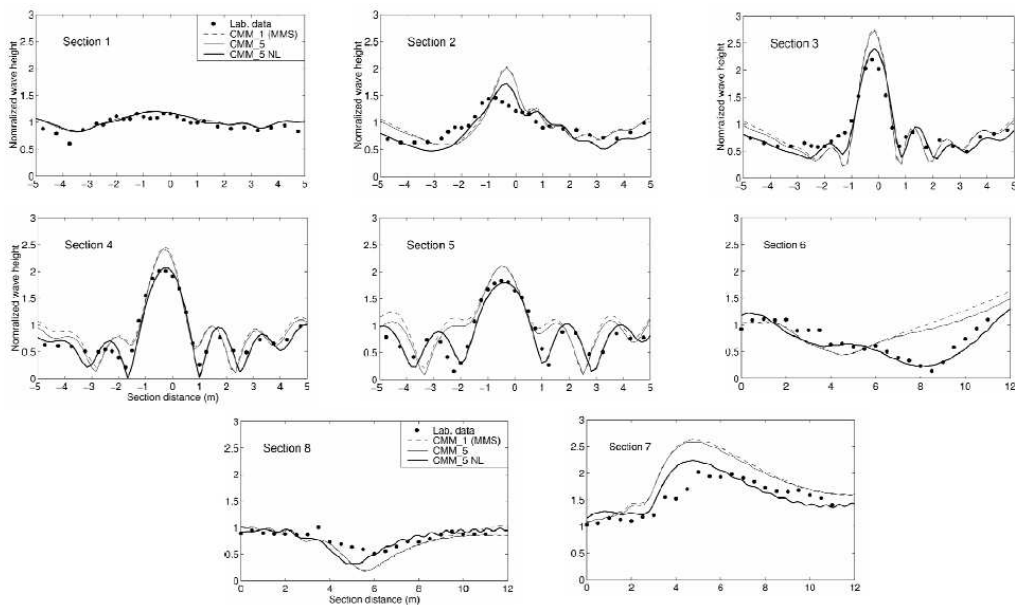
Σχήμα 10. Ελλειπτικός ύφαλος πάνω από κεκλιμένο πυθμένα (πείραμα Berkhoff).



Σχήμα 11. Συνολικό πεδίο στην ελεύθερη επιφάνεια πάνω από ελλειπτικό ύφαλο εδραζόμενο σε κεκλιμένο πυθμένα (πείραμα Berkhoff), όπως υπολογίζεται από τη παρούσα μέθοδο.



Σχήμα 12. Ελλειπτικός ύφαλος εδραζόμενος σε κεκλιμένο πυθμένα (πείραμα Berkhoff). Πεδίο σε κατακόρυφη διατομή κατά μήκος της κεντρικής γραμμής από όπως υπολογίζεται από τη παρούσα μέθοδο.



Σχήμα 13. Ελλειπτικός ύφαλος εδραζόμενος σε κεκλιμένο πυθμένα (πείραμα Berkhoff). Σύγκριση ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας με πειραματικές μετρήσεις στις διατομές 1-8 του Σχήματος 11.

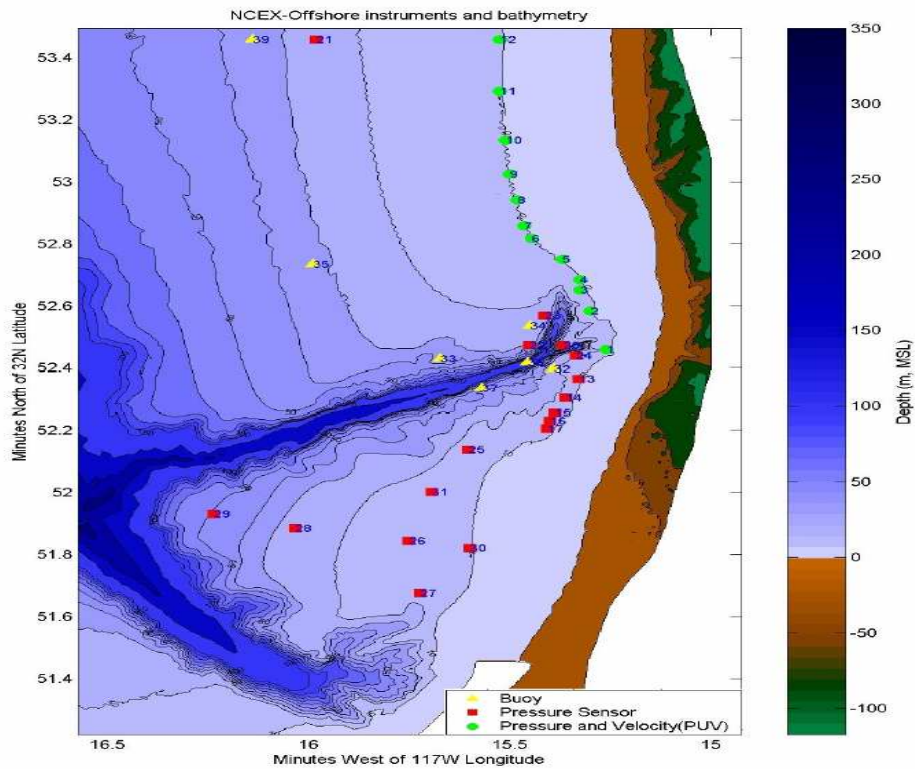
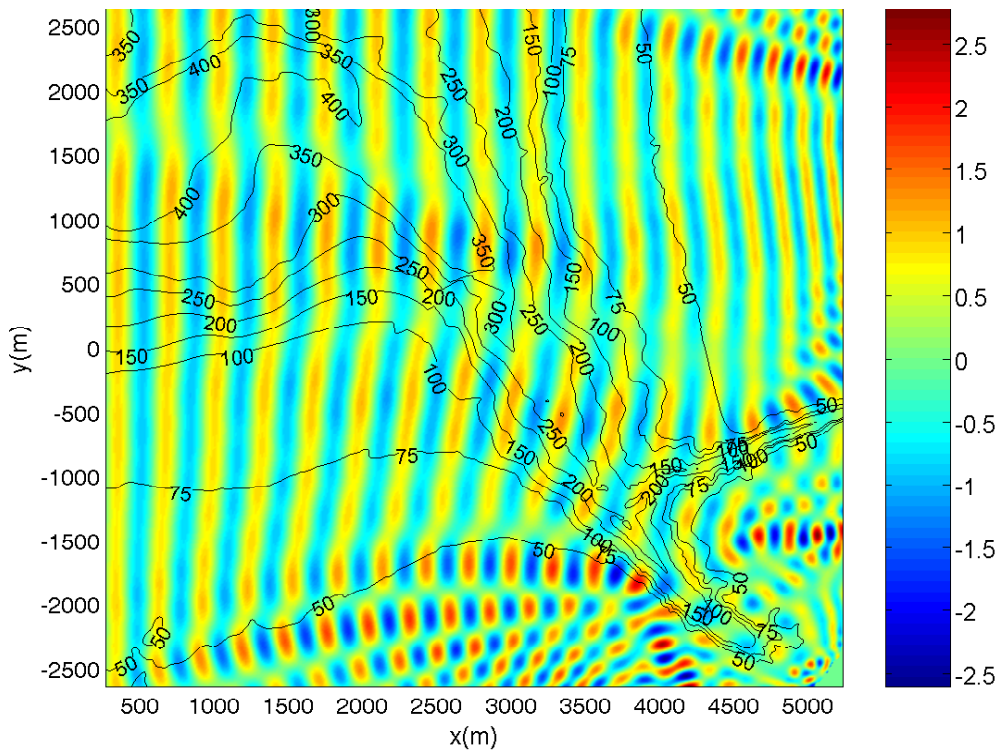


Figure 5. NCEX Instrument Array

Σχήμα 14. Βαθυμετρία υποθαλάσσιου φαραγγιού στο Scripps-California.



Σχήμα 15. Υπολογιζόμενο πεδίο στην περίπτωση προσπιπτόντος κυματισμού από τα δυτικά στη περιοχή του υποθαλάσσιου φαραγγιού στο Scripps-California.

7.7 Συμπεράσματα – πρόσθετο υλικό

Το μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών (CMS) που παρουσιάστηκε όντας ισοδύναμο με οποιοδήποτε άλλο πλήρες γραμμικό μοντέλο, παρουσιάζει ένα αριθμό πλεονεκτημάτων, όπως:

- (i) Μόνο λίγοι όροι (ιδιομορφές) είναι επαρκείς για τον ακριβή υπολογισμό του πεδίου κύματος σε ολόκληρη την εξεταζόμενη περιοχή. Έτσι, η παρούσα μέθοδος αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τον μη τοπικό χαρακτήρα του προβλήματος στον χώρο διάδοσης.
- (ii) Η βελτιωμένη αναπαράσταση και το σύστημα μπορεί φυσικά να απλουστευθεί είτε στην εξίσωση ήπιας κλίσης είτε στην τροποποιημένη σε υποπεριοχές όπου το επιτρέπουν οι φυσικές συνθήκες.
- (iii) Η παρούσα μέθοδος παρέχει πληροφορίες υψηλής ποιότητας σχετικά με την πίεση και την εφαπτομενική ταχύτητα στον πυθμένα, η οποία είναι χρήσιμη για τη μελέτη της ταλαντευόμενης οριακής στιβάδας πυθμένα και της απόσβεσης της ενέργειας των κυμάτων, καθώς και για την κίνηση της θαλάσσιας κλίνης και τη μεταφορά ιζημάτων σπουδές.
- (iv) Λόγω της πληρότητας της απεικόνισης του πεδίου ταχύτητας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή και την αποτελεσματική αριθμητική επεξεργασία της αντίστοιχης λειτουργίας του Green, το οποίο είναι το κύριο εργαλείο για τη μελέτη προβλημάτων αλληλεπίδρασης κύματος-σώματος σε περιοχές μεταβλητής βαθυμετρίας.

Το περιγραφέν μοντέλο διάδοσης υδάτινων κυματισμών σε γενική βαθυμετρία έχει παρουσιασθεί στην ακόλουθη εργασία:

Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., 1999, A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 389, pp275-301.

Περαιτέρω αποτελέσματα, συμπεριλαμβανομένων διαφόρων επεκτάσεων της μεθόδου και πληθώρα εφαρμογών παρέχονται στις παρακάτω εργασίες:

Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., Gerostathis, Th., 2001, A coupled-mode system for the refraction-diffraction of linear waves over steep three dimensional topography, *Applied Ocean Research*, Vol. 23, pp. 319-336.

Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., 2004, Three-dimensional Green's function of harmonic water-waves over a bottom topography with different depths at infinity, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 510, pp.267-302.

Gerostathis, T., Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., 2008, A coupled-mode model for the transformation of wave spectrum over steep 3d topography. A Parallel-Architecture Implementation, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, JOMAE*, Vol.130

Belibassakis, K.A., Gerostathis, Th., Athanassoulis, G.A., 2011, A coupled-mode model for water wave scattering by horizontal, non-homogeneous current in general bottom topography, *Applied Ocean Research*, Vol.33, pp. 384– 397

Belibassakis, 2012, Water-wave induced groundwater pressure and flow in variable bathymetry regions and sandy beaches by an enhanced coupled-mode model, *Ocean Engineering* Vol. 47, pp. 104–118.

Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., Gerostathis, Th., 2014, Directional wave spectrum transformation in the presence of strong depth and current inhomogeneities by means of coupled-mode model, *Ocean Engineering*, Vol. 87, 84–96.

7.8 Βιβλιογραφικές Αναφορές

- ARANHA J.A., MEI C.C. & YUE, D.K.P. 1979 Some properties of a hybrid element method for water waves. *Int. Journal Num. Methods Eng.*, 1627-1641.
- ATHANASSOULIS, G.A. & BELIBASSAKIS, K.A. 1997 Water wave Green's function for a 3D uneven bottom problem with different depths at $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$. *Proc. IUTAM Symposium on Computational Methods for Unbounded Domains*, July 27-31, 1997, University of Colorado at Boulder.
- ATHANASSOULIS, G.A. & MAKRAKIS, G.N. 1994 A function-theoretic approach to a two-dimensional transient wave-body interaction problem. *Applicable Analysis* 54 (3-4), 283-303.
- BAI, K.J. & YEUNG, R.W. 1974 Numerical Solution to free-surface flow problems. *Proc. of the 10th Naval Hydrodynamics Symposium*, Office of Naval Research, Cambridge, MA, 1974, pp. 609-641.
- BERKHOFF, J.C.W. 1972 Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Conf. Coastal Engng, Vancouver*, vol.2, pp. 471-490. ASCE
- BERKHOFF, J.C.W. 1976 Mathematical models for simple harmonic linear waves. Wave diffraction and refraction. PhD thesis, Techn. Univ. of Delft.
- BERKHOFF, J.C.W., BOOIJ, N. & RADDER, A.C. 1982 Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engng* 6, 255-279.
- BOOIJ, N. 1981 Gravity waves on water with non-uniform depth and current. PhD thesis, Techn. Univ. of Delft.
- BOOIJ, N. 1983 A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engng* 7, 191-203.
- BOYLES, C.A. 1984. *Acoustic Waveguides. Applications to oceanic science*. John Wiley & Sons.
- CHAMBERLAIN, P.G. & PORTER, D. 1995 The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 291, 393-407.
- CODDINGTON, E.A. & LEVINSON, N. 1995 *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw Hill, New York.
- CRAIG, W. & SULEM, G. 1993 Numerical simulation of gravity waves. *Journal of Comp. Physics* 108, 73-83.
- DAVIES, A.G., HEATHERSHAW, A.D. 1984 Surface-wave propagation over sinusoidal varying topography. *J. Fluid Mech.* 291, 419-433.
- DEVILLARD, P., DUNLOP, F., & SOUILLARD, B. 1988 Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.* 186, 521-538.
- DINGEMANS, M. 1997 *Water wave propagation over uneven bottoms*. World Scientific.
- ECKART, G. 1952 The propagation of gravity waves from deep to shallow water. In *Gravity Waves: (Proc. NBS Semicentennial Symp. on Gravity Waves, June 15-18, 1951)*, pp 156-175. Washington: National Bureau of Standards.
- EVANS, D.V. & KUZNETSOV, C.M. 1997 Ch. 4 in: *Gravity Waves in water of Finite Depth*, Ed. J.N. Hunt, Computational Mechanics Publications.
- EVANS, D.V. & LINTON, C.M. 1994 On step approximations for water-wave problems. *J. Fluid Mech.* 278, 229-249.
- FAWCETT, J.A. 1992 A derivation of the differential equations of coupled-mode propagation. *J. Ac. Soc. Am.* 92, 290-295.
- FITZ-GERALD, G.F. 1976 The reflexion of plane gravity waves travelling in water of variable depth. *Phil. Trans. of the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences* 284, 49-89.

- FITZ-GERALD, G.F. & GRIMSHAW R.H.J. 1979 A note on the uniqueness of small-amplitude water waves travelling in a region of varying depth. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 86, 511-519.
- GARIPOV, R.M. 1965 Nonsteady waves above an underwater ridge. *Soviet Physics, Fluid Mechanics* 10(2), 194-196.
- GELFAND, I.M. & FOMIN, S.V. 1963 *Calculus of variations*. Prentice-Hall.
- GUAZZELLI E., REY, V. & BELZONS, M. 1992 Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.* 245, 301-317.
- HARA, T. & MEI, G.C. 1987 Bragg scattering by periodic bars: theory and experiment" *J. Fluid Mech.* 178, 221-241.
- HIGGINS, J.R. 1977 *Completeness and basis properties of sets of special functions*. Cambridge University Press.
- KIRBY, J.T. 1986 A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.* 162, 171-186.
- KIRBY, J.T. 1986 On the gradual reflection of weakly nonlinear Stokes waves in regions with varying topography. *J. Fluid Mech.* 162, 187-209.
- KUZNETSOV, N.G., 1991 Uniqueness of a solution of a linear problem for stationary oscillations of a fluid. *Diff. Eqns* 27, 187-194.
- LENOIR, M. & TOUNSI, A. 1988 The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM J. Numer. Anal.* 25, 729-752.
- LOZANO, C. & MEYER, R.E. 1976 Leakage and response of wave-trapped by round islands. *Physics of Fluids* 19, 1075-1088.
- MASSEL, S. 1989 *Hydrodynamics of coastal zones*. Elsevier.
- MASSEL, S. 1993 Extended refraction-diffraction equations for surface waves. *Coastal Engng* 19, 97-126.
- MEI, C.C. 1978 Numerical methods in water-wave diffraction an radiation. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 10, 393-416.
- MEI, C.C. 1994 *The applied dynamics of ocean surface waves*. World Scientific.
- MEI, C.C. 1985 Resonant reflection of surface waves by periodic sandbars. *J. Fluid Mech.* 152, 315-335.
- MEI, C.C. & BLACK, J.L. 1969 Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth. *J. Fluid Mech.* 38, 499-511.
- MEI, C.C. & CHEN, H.S. 1975 Hybrid element method for water waves, *Proc. Symposium on Modeling Techniques, 2nd Annual Symposium of the Waterways Harbors and Coastal Eng*, vol.1, pp 63-81. ASCE.
- MEI, C.C. & CHEN, H.S. 1976 A hybrid element method for steady linearized free surface flows. *Inst. J. Num. Meth. Eng.* 10, 1153-1175.
- MILDER, M.D. 1977 A note on Hamilton's principle for surface waves. *J. Fluid Mech.* 83, 159-161.
- MILES, J.W. 1967 Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.* 28, 755-767.
- MILES, J.W. 1977 Hamilton's principle for surface waves. *J. Fluid Mech.* 83, 153-158.
- MILES, J.W. 1991 Variational approximations for gravity waves of variable depth. *J. Fluid Mech.* 232, 681-688.
- MOISEEV, N.N. 1964 Introduction to the theory of oscillations of liquid containing bodies. *Advances in Applied Mathematics*, 3, 233-289.
- MOISEEV, N.N. & RUMNIANTSEV, V.V. 1968 *Dynamic stability of bodies containing fluid*. Springer Verlag.
- NEWMAN, J.N. 1965 Propagation of water waves over an infinite step. *J. Fluid Mech.* 23, 399-415.

- O'HARE, T.J. & DAVIES, A.G. 1992 A new model for surface wave propagation over undulating topography. *Coastal Engng* 19, 251-266.
- O'HARE, T.J. & DAVIES, A.G. 1993 A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Applied Ocean Research* 15,1-12.
- PIERCE, A.D. 1965 Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. *J. Ac. Soc. Am.* 37, 19-27.
- PORTER, D. & STAZIKER, D.J. 1995 Extension of the mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* 300, 367-382.
- PORTER, D. & CHAMBERLAIN, P.G. 1997 Linear wave scattering by two-dimensional topography, Ch. 2 in: *Gravity Waves in water of Finite Depth*, Ed. J.N. Hunt, Computational Mechanics Publications.
- RADDER, A.G. & DINGEMANS, M.W. 1985 Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves. *Wave Motion* 7, 473-485.
- REKTORYS, K. 1977 *Variational Methods in Mathematics*. Science and Engineering, D. Reidel.
- REY, V. 1992 Propagation and local behaviour of normal incident gravity waves over varying topography. *Eur. J. Mech. B: Fluids* 11, 213-232.
- RUTHERFORD S.R. & HAWKER K.E. 1981 Consistent coupled mode theory of sound propagation for a class of nonseparable problems. *J. Ac. Soc. Am.* 70, 554-584
- SIMON, M.J. & URSELL, F. 1984 Uniqueness in linearized two-dimensional water-wave problems. *J. Fluid Mech.* 148, 137-154.
- SMITH, R. & SPRINKS, T. 1975 Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluid Mech.* 72, 373-384.
- STOKER, J.J. 1957 *Water Waves*. Interscience.
- TITCHMARSH, E.G. 1962 *Eigenfunction expansions*. Oxford at Calderon Press.
- VAINBERG, B.R. & MAZ'JA, V.G. 1973 On the problem of steady state oscillations of a fluid layer of variable depth. *Trans. Moscow Math. Soc* 28, 56-73.
- WEHAUSEN, J.N. & LAITONE, E.V. 1960 *Surface Waves*. Handbuch der Physik. Springer.
- YEUNG, R.W. 1982 Numerical methods in free-surface flows. *Ann Rev. Fluid Mech.* 14, 395-442.

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Α. Πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού \mathcal{F}

Για να υπολογίσουμε την πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού \mathcal{F} που ορίζεται από την Εξ. (3.1), το συναρτησιακό αποσυντίθεται στους ακόλουθους όρους, οι οποίοι ορίζονται στα διάφορα υποχωρία και στα σύνορά τους,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \mathcal{F}_{D^{(2)}}^{(2)}(\varphi^{(2)}) + \mathcal{F}_{\partial D_F^{(2)}}^{(2)}(\varphi^{(2)}) + \mathcal{F}_{\infty^-}^{(1)}(A_R) + \mathcal{F}_{\partial D_I^{(12)}}^{(12)}\left(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}\left(A_R, \left\{C_n^{(1)}\right\}_{n \in N}\right)\right) + \\ & + \mathcal{F}_{\partial D_I^{(23)}}^{(23)}\left(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}\left(A_T, \left\{C_n^{(2)}\right\}_{n \in N}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

In Eq.(A.1) the various components of \mathcal{F} are defined as follows:

$$\mathcal{F}_{D^{(2)}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_D (\nabla \varphi^{(2)})^2 dV, \quad \mathcal{F}_{\partial D_F^{(2)}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \mu \int_{\partial D_F^{(2)}} (\varphi^{(2)})^2 dS, \quad \mathcal{F}_{\infty^-}^{(1)} = -A_0 A_R J^{(1)}, \quad (\text{A.2,3,4})$$

$$\mathcal{F}_{\partial D_I^{(12)}}^{(12)} = \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\varphi^{(2)} - \frac{1}{2} \varphi^{(1)}\left(A_R, \left\{C_n^{(1)}\right\}_{n \in N}\right) \right) \frac{\partial \varphi^{(1)}\left(A_R, \left\{C_n^{(1)}\right\}_{n \in N}\right)}{\partial n^{(1)}} dS, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{F}_{\partial D_I^{(23)}}^{(23)} = \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\varphi^{(2)} - \frac{1}{2} \varphi^{(3)}\left(A_T, \left\{C_n^{(2)}\right\}_{n \in N}\right) \right) \frac{\partial \varphi^{(3)}\left(A_T, \left\{C_n^{(2)}\right\}_{n \in N}\right)}{\partial n^{(3)}} dS. \quad (\text{A.6})$$

Σε συμφωνία με την αποσύνθεση ανωτέρω, η μεταβολή $\delta \mathcal{F}$ του συναρτησιακού \mathcal{F} λαμβάνεται ως το άθροισμα των μεταβολών όλων των ανωτέρω όρων. Η μεταβολή $\delta \mathcal{F}_{D^{(2)}}^{(2)}$ του πρώτου όρου υπολογίζεται εύκολα και είναι:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_{D^{(2)}}^{(2)} &= \int_{D^{(2)}} (\nabla \varphi^{(2)}) (\nabla \delta \varphi^{(2)}) dV = - \int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta \varphi^{(2)} dV + \int_{\partial D^{(2)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS = \\ &= - \int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta \varphi^{(2)} dV + \int_{\partial D_F^{(2)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_{\text{II}}^{(2)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS + \\ &+ \int_{\partial D_I^{(12)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_I^{(23)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

όπου η μετάβαση στην τελική έκφραση της Εξ. (A.7) πραγματοποιείται με εφαρμογή του Θεωρήματος Green στις συναρτήσεις $\varphi^{(2)}$ και $\delta \varphi^{(2)}$ στο $D^{(2)}$. Οι μεταβολές του δεύτερου και τρίτου όρου, βλ. Εξ. (A.3) και (A.4), αντιστοίχως, δίνονται ως εξής,

$$\delta \mathcal{F}_{\partial D_F^{(2)}}^{(2)} = -\mu \int_{\partial D_F^{(2)}} \varphi^{(2)} \delta \varphi^{(2)} dS \quad (\text{A.8})$$

και

$$\delta \mathcal{F}_{\infty^-}^{(2)} = -A_0 \delta A_R J^{(1)}. \quad (\text{A.9})$$

Για να υπολογίσουμε τους δυο τελευταίους όρους τους συναρτησιακού, όπως αυτοί δίνονται από τις Εξς. (A.5) και (A.6), αντιστοίχως, πρέπει πρώτα να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα για το ολοκλήρωμα Green των δυο κυματικών δυναμικών στην ημι-λωρίδα. Έτσι, ας υποθέσουμε τις αρμονικές συναρτήσεις Φ, Ψ που ορίζονται στην αριστερά ημιάπειρη λωρίδα. Οι συναρτήσεις αυτές υποτίθεται πως ικανοποιούν την εξίσωση Laplace στο $D^{\infty-}$, τη γραμμικοποιημένη συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας πάνω στο σύνορο $\partial D_F^{\infty-} = \{(x, z): x < a, z = 0\}$ και την συνοριακή συνθήκη μη εισχώρησης στον πυθμένα στο στερεό σύνορο $\partial D_H^{\infty-} = \{(x, z): x < a, z = -h\}$. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε την ακόλουθη συμπεριφορά των συναρτήσεων Φ, Ψ στο άπειρο, $x \rightarrow -\infty$,

$$\Phi(x, z) = P_0 f(x, z) + P_R f^*(x, z), \quad \Psi(x, z) = p_0 f(x, z) + p_R f^*(x, z), \quad (\text{A.10})$$

όπου P_0, P_R, p_0, p_R είναι μιγαδικές σταθερές, $f(x, z)$ είναι οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση με φραγμένες παραγώγους, ενώ ο αστερίσκος συμβολίζει τον μιγαδικό συζυγή. Τότε, το ακόλουθο λήμμα ισχύει:

Λήμμα [Το ολοκλήρωμα Green των δυο κυματικών δυναμικών στην ημι-λωρίδα]: Υπό την υπόθεση ισχύος της συνθήκης (A.10) για την συμπεριφορά των δυο αρμονικών συναρτήσεων στο άπειρο, ισχύσει η ακόλουθη σχέση για το ολοκλήρωμα Green αυτών των κυματικών δυναμικών επί του δεξιά κατακόρυφου συνόρου $\partial D_I^{\infty-} = \{(x, z): x = a, -h < z < 0\}$:

$$\int_{\partial D_I^{\infty-}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = (-P_0 p_R + p_0 P_R) \cdot J^{\infty-}, \quad (\text{A.11})$$

όπου η $J^{\infty-}$ δίνεται από την σχέση

$$J^{\infty-} = 2 i \operatorname{Im} \left\{ \int_{\partial D_I^{\infty-}} \left(f \frac{df^*}{dx} \right) dS \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Στην Εξ. (A.12) με $\partial D_{\infty}^{\infty-}$ συμβολίζουμε οποιοδήποτε κατακόρυφο σύνορο σε μεγάλα αρνητικά $x = X < 0$ τα οποία διαχωρίζουν το $D^{\infty-}$ στο $\hat{D}^{\infty-} = \{(x, z): X < x < a, -h < z < 0\} \subset D^{\infty-}$ και στο συμπληρωματικό του σε σχέση με το $D^{\infty-}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Green για τις αρμονικές συναρτήσεις Φ, Ψ στο υποχωρίο $\hat{D}^{\infty-}$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τόσο την συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας επί του $\partial\hat{D}_F^{\infty-}$ όσο και την συνοριακή συνθήκη πυθμένα επί του $\partial\hat{D}_H^{\infty-}$ λαμβάνουμε

$$\int_{\partial D_i^{\infty-}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = - \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{A.13})$$

Εκμεταλλευόμενοι την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Φ, Ψ στο $x = -\infty$, Εξ. (A.10), και λαμβάνοντας υπ' όψιν and πως το κάθετο διάνυσμα στο $\partial\hat{D}^{\infty-}$ έχει κατεύθυνση προς τα αρνητικά x , το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ανωτέρω μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = - \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dS = \\ & = - \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left\{ (P_0 f + P_R f^*) (p_0 f_{,x} + P_R f_{,x}^*) - (p_0 f + P_R f^*) (P_0 f_{,x} + P_R f_{,x}^*) \right\} dS = \\ & = (-P_0 p_R + p_0 P_R) \int_{\partial D_x^{\infty-}} (f f_{,x}^* - f^* f_{,x}) dS = \\ & = 2i (-P_0 p_R + p_0 P_R) \operatorname{Im} \left\{ \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left(f \frac{df^*}{dx} \right) dS \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

και το Λήμμα αποδείχτηκε.

Παρατήρηση: Όταν $f(x, z) = \exp(ikx) Z_0(z)$, όπου $Z_0(z) = \cosh(k(z+h)) / \cosh(kh)$, τότε ο όρος $J^{\infty-}$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση,

$$J^{\infty-} = 2i \operatorname{Im} \left\{ \int_{\partial D_x^{\infty-}} \left(f \frac{df^*}{dx} \right) dS \right\} = 2k \int_{z=-h}^{z=0} (Z_0(z))^2 dz. \quad (\text{A.15})$$

Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να παραχθεί για τις αρμονικές συναρτήσεις Φ, Ψ , που ορίζονται στη δεξιά ημι-λωρίδα $D^{\infty+} = \{(x, z): x > b, -h < z < 0\}$.

Επί τη βάση του προηγούμενου λήμματος, προχωρούμε στον υπολογισμό των μεταβολών $\delta \mathcal{F}_{\partial D_1^{(12)}}^{(12)} \delta \mathcal{F}_{\partial D_1^{(23)}}^{(23)}$. Η μεταβολή $\delta \mathcal{F}_{\partial D_1^{(12)}}^{(12)}$ μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως,

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(12)}}^{(12)} &= \int_{\partial D_i^{(12)}} \delta \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} dS + \int_{\partial D_i^{(12)}} \varphi^{(2)} \frac{\partial (\delta \varphi^{(1)})}{\partial n^{(1)}} dS + \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D_i^{(12)}} \delta \varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} dS - \frac{1}{2} \int_{\partial D_i^{(12)}} \varphi^{(1)} \frac{\partial (\delta \varphi^{(1)})}{\partial n^{(1)}} dS
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της συνάρτησης $\varphi^{(1)}$ στο $D^{(1)}$ για $x \rightarrow -\infty$, όπως εμφανίζεται στην Εξ. (2.7), και με εφαρμογή του Λήμματος για τις συναρτήσεις $\delta \varphi^{(1)}$ και $\varphi^{(1)}$ επί του $\partial D_i^{(12)}$, ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της Εξ. (A.16) μετασχηματίζεται ως εξής

$$\int_{\partial D_i^{(12)}} \delta \varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} \cdot dS = \int_{\partial D_i^{(12)}} \varphi^{(1)} \frac{\partial (\delta \varphi^{(1)})}{\partial n} + A_0 \delta A_R J_\infty^{(1)} \quad . \tag{A.17}$$

Συνεπώς, η μεταβολή $\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(12)}}^{(12)}$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(12)}}^{(12)} = \int_{\partial D_i^{(12)}} \delta \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} dS + \int_{\partial D_i^{(12)}} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \frac{\partial (\delta \varphi^{(1)})}{\partial n^{(1)}} dS + A_0 \delta A_R J^{(1)}. \tag{A.18}$$

Ομοίως, η μεταβολή $\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(23)}}^{(23)}$, εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(23)}}^{(23)} &= \int_{\partial D_i^{(23)}} \delta \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} dS + \int_{\partial D_i^{(23)}} \varphi^{(2)} \frac{\partial (\delta \varphi^{(3)})}{\partial n^{(1)}} dS + \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D_i^{(23)}} \delta \varphi^{(3)} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} dS - \frac{1}{2} \int_{\partial D_i^{(23)}} \varphi^{(3)} \frac{\partial (\delta \varphi^{(3)})}{\partial n^{(3)}} dS
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Ακολουθώντας όμοια διαδικασία και εκμεταλλευόμενοι την Παρατήρηση 2, λαμβάνουμε τελικά,

$$\delta \mathcal{F}_{\partial D_i^{(23)}}^{(23)} = \int_{\partial D_i^{(23)}} \delta \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} dS + \int_{\partial D_i^{(23)}} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)}) \frac{\partial (\delta \varphi^{(3)})}{\partial n^{(3)}} dS \tag{A.20}$$

Συνδυάζοντας την αποσύνθεση (A.1) με τα ενδιάμεσα αποτελέσματα των Εξ. (A.7), (A.8), (A.9), (A.18) και (A.20), η μεταβολή του συναρτησιακού \mathcal{F} γράφεται, τελικά, ως εξής:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}_{D^{(2)}}^{(2)} = & - \int_{D^{(2)}} (\nabla^2 \varphi^{(2)}) \delta \varphi^{(2)} dV + \int_{\partial D_F^{(2)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} - \mu \varphi^{(2)} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_H^{(2)}} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} \delta \varphi^{(2)} dS + \\
& + \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}} + \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial n^{(3)}} \right) \delta \varphi^{(2)} dS + \\
& + \int_{\partial D_I^{(12)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} \right) \frac{\partial (\delta \varphi^{(1)})}{\partial n^{(1)}} dS + \int_{\partial D_I^{(23)}} \left(\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)} \right) \frac{\partial (\delta \varphi^{(3)})}{\partial n^{(3)}} dS. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Ροή κυματικής ισχύος μέσω κατακόρυφης διατομής

Έστω $\varphi = \varphi_R + i\varphi_I$ μια λύση του προβλήματος $\mathcal{P}(D, \mu, A_0)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green για τις συναρτήσεις φ_R και φ_I , σε οποιοδήποτε υποχωρίο $\Omega \subset D$ οριζόμενο ως το στρώμα ρευστού που περιέχεται μεταξύ δυο οποιονδήποτε κατακορύφων διατομών I_L and I_R , βλ., Σχήμα Β.1, λαμβάνουμε

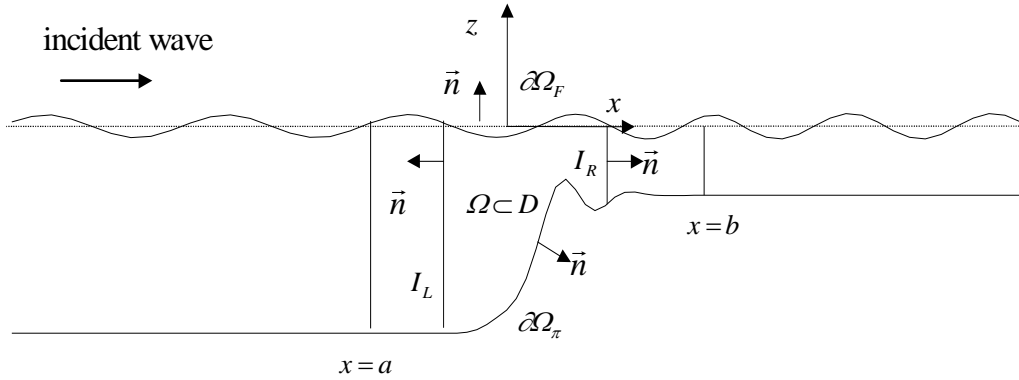
$$0 = \int_{\Omega} (\varphi_I \nabla^2 \varphi_R - \varphi_R \nabla^2 \varphi_I) dV = \int_{\partial \Omega} \left(\varphi_I \frac{\partial \varphi_R}{\partial n} - \varphi_R \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} \right) dS, \tag{B.1}$$

όπου $\partial \Omega = \partial \Omega_F \cup \partial \Omega_H \cup I_L \cup I_R$. Από τις συνοριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα, Εξ. (2.6β) και (2.6γ), the integrand of the right-hand side is zero at points $(x, z) \in \partial \Omega_F \cup \partial \Omega_H$. Συνεπώς, από την Εξ. (B.1) λαμβάνουμε

$$\int_{I_L \cup I_R} \left(\varphi_I \frac{\partial \varphi_R}{\partial n} - \varphi_R \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} \right) dS = \text{Im} \left\{ \int_{I_L \cup I_R} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \right\} = 0. \tag{B.2}$$

Μια και το κάθετο διάνυσμα έχει διεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω , Εξ. (B.2) μπορούμε, επίσης, να γράψουμε:

$$\text{Im} \left\{ \int_{I_1} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \right\} = \text{Im} \left\{ \int_{I_3} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \right\}. \tag{B.3}$$



Σχήμα Β.1 Χωρίο μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας

Η Εξ. (Β.3) εκφράζει το γνωστό αποτέλεσμα ότι η ποσότητα

$$\Pi(x) = \text{Im} \left\{ \int_{I(x)} \varphi^*(x,z) \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} dS \right\}, \quad (\text{B.4})$$

η οποία είναι ανάλογη προς τη μέση (ανά περίοδο) ροή κυματικής ισχύος (Stoker, 1957) από κατακόρυφη διατομή της μορφής $I(x) = \{(x,z): -h(x) < z < 0, x \in R\}$, πρέπει να διατηρείται. Το ανωτέρω αποτέλεσμα μπορεί, επίσης, να διατυπωθεί ως ακολούθως: ένα η συνάρτηση $\varphi(x,z)$, $(x,z) \in D$, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (2.6α), την συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας, Εξ. (2.6β), και την συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα, Εξ. (2.6c), τότε

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = 0, \quad x \in R. \quad (\text{B.5})$$

Παρατηρούμε εδώ ότι οι Εξς. (Β.4) και (Β.5) μπορούν να τύχουν περαιτέρω εκμετάλλευσης ούτως ώστε να λαμβάνεται μια σχέση μεταξύ τετραγώνων πλατών του αριστερά προσπίπτοντος, του αριστερά ανακλώμενου και του δεξιά διαδιδόμενου κύματος· βλ., π.χ., Wehausen & Laitone (1960, Sec. 17), Porter & Chamberlain (1997, Ch. 1).

Θα μελετήσουμε, στη συνέχεια, την παράγωγο της κυματικής ροής ισχύος $\Pi(x)$, Εξ. (Β.4), υπό την ασθενέστερη παραδοχή ότι η $\varphi(x,z)$ ικανοποιεί μόνο την εξίσωση Laplace και τη συνοριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Τότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα Newton-Leibniz για την παραγωγή υπό το ολοκλήρωμα λαμβάνουμε,

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \text{Im} \frac{d}{dx} \int_{z=-h}^0 \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = \text{Im} \left\{ \frac{dh}{dx} \left[\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=-h(x)} + \int_{z=-h}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz \right\} =$$

$$= \text{Im} \left\{ \left[\frac{dh}{dx} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=-h(x)} \right\} . \quad (\text{B.6})$$

όπου για τη μετάβαση στο αριστερά μέλος χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση Laplace και η συνοριακή συνθήκη ελευθερης επιφάνειας. Η Εξ. (B.6) μπορεί, επίσης, να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{d \Pi(x)}{dx} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dh(x)}{dx} \right)^2} \text{Im} \left\{ \varphi^*(x, -h(x)) \frac{\partial \varphi(x, -h(x))}{\partial n} \right\} , \quad (\text{B.7})$$

όπου με $\partial / \partial n$ δηλώνουμε διαφόριση κατά το κάθετο στην ∂D_{II} διάνυσμα με φορά προς τα έξω. Η τελευταία εξίσωση μας επιτρέπει να συσχετίσουμε το σφάλμα στη διατήρηση της ροής κυματικής ισχύος με το σφάλμα της ικανοποίησης της συνοριακής συνθήκης στον πυθμένα, υπό την υπόθεση ότι και τα σφάλματα που συσχετίζονται με την εξίσωση Laplace και την συνοριακή συνθήκη πυθμένα είναι αμελητέα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Αναλυτικές εκφράσεις συντελεστών του συστήματος CMS

Στο παρόν Παράρτημα καταγράφονται οι αναλυτικές εξισώσεις που παρέχουν τους συντελεστές του συστήματος εξισώσεων συζευγμένων ιδιομορφών, στην περίπτωση κατά την οποία η ακόλουθη μορφή

$$Z_{-1}(z; x) = h(x) \left(\left(\frac{z}{h(x)} \right)^3 + \left(\frac{z}{h(x)} \right)^2 \right),$$

Χρησιμοποιείται για την ιδιομορφή κεκλιμένου πυθμένα. Ο ορισμός των συντελεστών a_{mn} , b_{mn} και c_{mn} είναι ως εξής:

	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I $m = -1$ $n = -1, 0, 1, 2, \dots$	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II $m = 0, 1, 2, \dots$ $n = -1$	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ III $m = 0, 1, 2, \dots$ $n = 0, 1, 2, \dots$
$a_{mn}(x)$	$\langle Z_{-1}, Z_n \rangle$	$\langle Z_m, Z_{-1} \rangle$	$\delta_{nm} \ Z_m\ ^2$
$b_{mn}(x)$	$2 \langle Z_{-1}, \partial Z_n / \partial x \rangle$	$2 \langle Z_m, \partial Z_{-1} / \partial x \rangle$	$2 \langle Z_m, \partial Z_n / \partial x \rangle +$ $+ h'(x) Z_m(-h) Z_n(-h)$
$c_{mn}(x)$	$\langle Z_{-1}, \Delta Z_n \rangle$	$\langle Z_m, \Delta Z_{-1} \rangle +$ $+ \left(1 + h'(x) \frac{\partial Z_{-1}(-h)}{\partial x} \right) Z_m(-h)$	$\langle Z_m, \Delta Z_n \rangle +$ $+ h'(x) Z_m(-h) (\partial Z_n(-h) / \partial x)$
Σημειώσεις:	$Z_n = Z_n(z; x)$ εξαρτάται παραμετρικά από το x μέσω της $h(x)$.		
	$\Delta \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$, $\langle f, g \rangle = \int_{-h(x)}^0 f(z) g(z) dz$, $\ f\ ^2 = \langle f, f \rangle$.		
	Για $n=0, 1, \dots$ $\Delta Z_n = \frac{\partial^2 Z_n}{\partial x^2} - (k_n)^2 Z_n$.		

Γ.1 Αναλυτικές εκφράσεις συντελεστών

Περίπτωση I: $m = -1$ και $n = -1, 0, 1, 2, \dots$

$$m = n = -1$$

$$a_{mn} = h^3 / 105$$

$$b_{mn} = 2 h^2 h' / 70$$

$$c_{mn} = (h / 210) \left(-16 (h')^2 + 3 h h'' - 28 \right)$$

$$n \neq m = -1$$

$$a_{mn} = -\frac{6 \cos(k_n h) + 2k_n h \sin(k_n h) + (k_n h)^2 - 6}{k_n^2 (k_n h)^2 \cos(k_n h)}$$

$$b_{mn} = -\frac{2 B_n}{k_n^3 (k_n h)^2 \cos^2(k_n h)} h'$$

$$c_{mn} = (c_{mn}^{(1)} (h')^2 + c_{mn}^{(2)} h'' + c_{mn}^{(3)}) / F_n$$

$$c_{mn}^{(1)} = P_n^{(1,2)} D_n^2 + P_n^{(1,1)} D_n + P_n^{(2,1)} E_n + P_n^{(1,0)}$$

$$c_{mn}^{(2)} = P_n^{(2,1)} D_n + P_n^{(2,0)}$$

$$c_{mn}^{(3)} = k_n^4 \cos(k_n h) \left\{ 6 \cos^2(k_n h) + k_n h \sin(2k_n h) + ((k_n h)^2 - 6) \cos(k_n h) \right\}$$

όπου,

$$B_n = \left\{ \sin(k_n h) \left((k_n h)^3 - 6k_n h \right) - 3k_n h \sin(2k_n h) + (1 - \cos(k_n h)) \left(24 \cos(k_n h) + 2(k_n h)^2 \right) \right\} D_n + \left\{ 4(k_n h) \cos(k_n h) + \sin(k_n h) \left((k_n h)^2 - 6 \right) + 2k_n h \right\} k_n^2$$

$$D_n = -\frac{2k_n^2}{2k_n h + \sin(2k_n h)}$$

$$E_n = \frac{-2D_n (D_n h + k_n) (\cos(2k_n h) + 1) - 4k_n D_n}{2k_n h + \sin(2k_n h)}$$

$$F_n = k_n^4 (k_n h)^2 \cos^3(k_n h)$$

$$P_n^{(1,0)} = k_n^4 \left\{ (-12 + 2(k_n h)^2) \cos^2(k_n h) - 4k_n h \sin(2k_n h) - 4k_n h \sin(k_n h) - 2(k_n h)^2 + 12 \right\}$$

$$P_n^{(1,1)} = k_n^2 \left\{ \cos^2(k_n h) (2(k_n h)^3 + 4k_n h) - \sin(2k_n h) (18 + 3(k_n h)^2) + 4k_n h (-2k_n h \sin(k_n h) + 2 \cos(k_n h) - (k_n h)^2 + 6) \right\}$$

$$P_n^{(1,2)} = \cos^2(k_n h) \left(-120 \cos(k_n h) + (k_n h)^4 - 12(k_n h)^2 + 120 \right) + \sin(2k_n h) \left(-12k_n h \cos(k_n h) + 2(k_n h)^3 - 24k_n h \right) + (k_n h)^2 \left(-4k_n h \sin(k_n h) + 12 \cos(k_n h) - 2(k_n h)^2 + 12 \right)$$

$$P_n^{(2,0)} = k_n^3 \left\{ \left(3 - \frac{1}{2} (k_n h)^2 \right) \sin(2k_n h) - k_n h \cos(k_n h) (4 \cos(k_n h) + 2) \right\}$$

$$P_n^{(2,1)} = k_n \left\{ (24 \cos(k_n h) + 2(k_n h)^2 - 24) \cos^2(k_n h) + \left(3k_n h \cos(k_n h) - \frac{1}{2}(k_n h)^3 + 3k_n h \right) \sin(2k_n h) - 2(k_n h)^2 \cos(k_n h) \right\}$$

Περίπτωση II: $m = 0, 1, 2, \dots$ και $n = -1$

$$a_{mn} = -\frac{6 \cos(k_m h) + 2k_m h \sin(k_m h) + (k_m h)^2 - 6}{k_m^2 (k_m h)^2 \cos(k_m h)}$$

$$b_{mn} = 4 \frac{6 \cos(k_m h) + k_m h \sin(k_m h) + 2(k_m h)^2 - 6}{k_m (k_m h)^3 \cos(k_m h)} h'$$

$$c_{mn} = c_{mn}^{(1)} (h')^2 + c_{mn}^{(2)} (h'') + c_{mn}^{(3)}$$

όπου

$$c_{mn}^{(1)} = -2 \frac{18 \cos(k_m h) + 2k_m h \sin(k_m h) + 7(k_m h)^2 - 18}{(k_m h)^4 \cos(k_m h)} + \frac{1}{\cos(k_m h)}$$

$$c_{mn}^{(2)} = 2 \frac{6k_m h \cos(k_m h) + (k_m h)^2 \sin(k_m h) + 2(k_m h)^3 - 6k_m h}{k_m (k_m h)^4 \cos(k_m h)}$$

$$c_{mn}^{(3)} = 2 \frac{3(k_m h)^2 \cos(k_m h) + (k_m h)^3 \sin(k_m h) - 3(k_m h)^2}{(k_m h)^4 \cos(k_m h)} + \frac{1}{\cos(k_m h)}$$

Περίπτωση III: $m = 0, 1, 2, \dots$ και $n = 0, 1, 2, \dots$ (βλ. και Porter & Staziker (1995))

$m = n$

$$a_{mn} = \frac{1}{2k_m} \tan(k_m h) \left(1 + \frac{2k_m h}{\sin(2k_m h)} \right)$$

$$b_{mn} = \left\{ \frac{1 + 2k_m h \tan(k_m h)}{2 \cos^2(k_m h)} + \frac{(k_m h)^2 \tan^2(k_m h)}{\sin^2(k_m h) + k_m h \tan(k_m h)} \left[\frac{1}{(k_m h)^2} - \frac{1}{\cos^2(k_m h)} \right] \right\} h'$$

$$c_{mn} = c_{mn}^{(1)} (h')^2 + c_{mn}^{(2)} (h'') + c_{mn}^{(3)}$$

όπου

$$c_{mn}^{(1)} = -\frac{k_m \sec^2(k_m h) R_m}{12(K_m + \sin(K_m))^3}, \quad c_{mn}^{(2)} = \frac{\sec^2(k_m h) (\sin(K_m) - K_m \cos(K_m))}{4(K_m + \sin(K_m))}, \quad c_{mn}^{(2)} = -k_m^2 a_{mn},$$

$$K_m = 2k_m h, \quad \text{και}$$

$$R_m = K_m^4 + 4K_m^3 \sin(K_m) + 9 \sin(K_m) \sin(2K_m) - 3K_m (K_m + 2 \sin(K_m)) (\cos^2(K_m) - 2 \cos(K_m) + 3)$$

$m \neq n$

$$a_{mn} = 0$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\cos(k_m h) \cos(k_n h)} \frac{k_m^2 + k_n^2}{k_m^2 - k_n^2} h'$$

$$c_{mn} = c_{mn}^{(1)} (h')^2 + c_{mn}^{(2)} (h'')$$

όπου

$$c_{mn}^{(1)} = -\frac{2k_n}{\cos(k_m h) \cos(k_n h)} \frac{1}{2k_n h + \sin(2k_n h)} \frac{4k_m^2 k_n^2 + (k_n^4 - k_m^4) \sin^2(k_n h)}{(k_m^2 - k_n^2)^2}$$

$$c_{mn}^{(2)} = \frac{1}{\cos(k_m h) \cos(k_n h)} \frac{k_n^2}{k_m^2 - k_n^2}$$

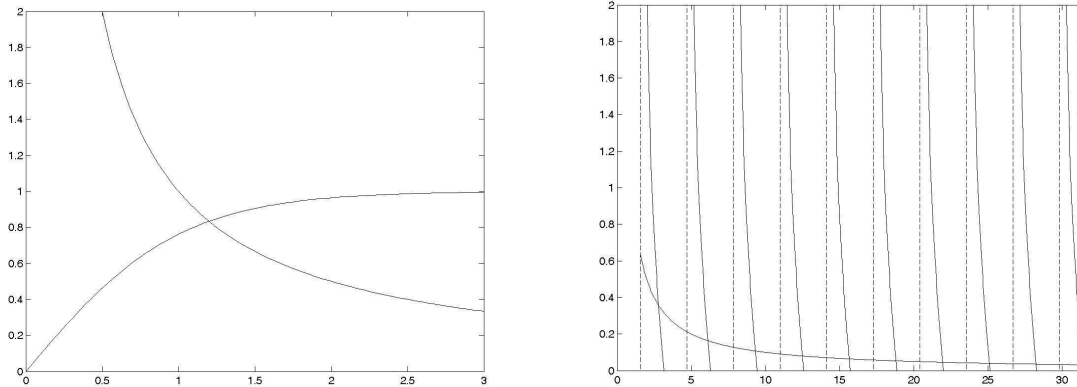
Γ.2 Εύρεση ριζών της σχέσης διασποράς

Για όλες τις ανωτέρω εκφράσεις είναι απαραίτητη η επίλυση της σχέσης διασποράς $\mu h = -kh \tan(kh)$ για κάθε τιμή του βάθους h και η εύρεση των ριζών $\{ik_0, k_n, n = 1, 2, \dots\}$. Παρατηρούμε ότι όταν η σταθερά διαχωρισμού είναι καθαρά φανταστικός αριθμός, η σχέση διασποράς γίνεται $\mu h = kh \tan(kh)$. Έτσι οι ανωτέρω δύο εκδοχές ονομάζοντας $S = kh$ και $x = kh$ έρχονται στη μορφή

$$\frac{S}{x} = \tanh(x) \quad \text{και} \quad \frac{S}{x} = -\tan(x)$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια ρίζα στο θετικό τεταρτημόριο ενώ στην δεύτερη περίπτωση προκύπτει ένα άπειρο πλήθος διακριτών ριζών, μία σε κάθε υποδιαστημα $((n-0.5)\pi, (n+0.5)\pi)$, που προκύπτουν ως τομή των γραφημάτων των ανωτέρω

συναρτήσεων, Σχήμα Γ.1. Εξ'αυτού προκύπτει εύκολα και η ασυμπτωτική προσέγγιση $k_n = n\pi/h$, για $n \rightarrow \infty$. Στην συνέχεια δίνεται ένα Matlab πρόγραμμα υπολογισμού των ριζών που βασίζεται στη μέθοδο Newton-Raphson (fzero.m).



Σχήμα Γ.1 Ρίζες της σχέσης διασποράς στην πρώτη και δεύτερη περίπτωση

Matlab πρόγραμμα υπολογισμού των ριζών της εξίσωσης διασποράς κυματισμών βαρύτητας

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f=disrel(n,Str)
% Water wave dispersion relation
% n: number of roots, Str=om*om*h/gi (frequency parameter)
imu=sqrt(-1);
for m=0:n
if m==0,
x0=Str;co=imu; if Str<1,x0=sqrt(Str);end
else
x0=m*pi-0.4*pi;co=1;
end
fi(m+1)=co*fzero(@(x) disrel0(x,Str,m),x0);
end
f=fi;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f=disrel0(x,Str,m)
if m==0,
fi= (Str/x)-tanh(x);
else
fi=Str*cos(x)+sin(x)*x;
end
f=fi;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```


**A COUPLED-MODE METHOD FOR ACOUSTIC PROPAGATION AND
SCATTERING IN INHOMOGENEOUS OCEAN WAVEGUIDES**

K.A. Belibassakis G.A. Athanassoulis

ABSTRACT : We consider the problem of acoustic propagation and scattering in inhomogeneous waveguide governed by the Helmholtz equation. We focus on an ideal, cylindrically symmetric ocean waveguide, limited above by an acoustically soft boundary modelling the free surface, and below by a hard boundary modelling the impenetrable seabed with general bottom topography. The wave field is excited by a monochromatic point source, and thus, the present solution is equivalent to the construction of the Green's function in the inhomogeneous domain. An improved coupled-mode method is developed, based on an enhanced local-mode series for the representation of the acoustic field, which includes an additional mode accounting for the effects of the bottom slope and curvature. The additional mode provides an implicit summation of the slowly convergent part of the series, rendering the remaining part to converge much faster, permitting truncation of the modal expansions keeping only a few evanescent terms. Using the enhanced representation, in conjunction with an appropriate variational principle, a system of coupled-mode equations on the horizontal plane is derived for the determination of the complex modal-amplitude functions. Numerical results are presented including comparisons with analytical solutions illustrating the role and significance of the additional mode and the efficiency of the present coupled-mode model, which can be naturally extended to treat propagation and scattering problems in three-dimensional, multi-layered ocean acoustic waveguides.

1. INTRODUCTION

Acoustic propagation in an inhomogeneous waveguide is an interesting mathematical problem finding important applications, as, e.g., underwater acoustic propagation and scattering in shallow water environment and seismoacoustics [1,2], atmospheric acoustics [3] and other. Similar problems governed by the Helmholtz equation are also encountered in variable cross-section electromagnetic waveguides [4]. In particular, the problem of underwater acoustic propagation is very important for a variety of applications concerning monitoring, exploration and exploitation of ocean environment, underwater communication and other. Several methods for treating this, generally non-separable, boundary value problem have been proposed, ranging from fully numerical, finite element and finite difference methods, to semi-analytical ones, like wavenumber integration, boundary integral equation and coupled-mode techniques, as well as various asymptotic models, like ray theory and parabolic approximations; see e.g., [1,2,5]. Fully numerical methods, are computationally intense and thus, their use is more appropriate for short-range/low-frequency propagation and local scattering problems. These methods have been proved very useful, in the case of general ocean-acoustic propagation problems, for providing benchmark solutions. Boundary element methods are suitable in the case of a homogeneous medium (see, e.g., [6]), but they become less practical in the presence of inhomogeneities, due to the difficulties associated with the calculation of the Green's function. In environments with steep boundary/interface slopes and/or media with variable index of refraction the method of coupled modes [7,8] has been developed to treat the problem, by subdividing the waveguide into a finite number of adjacent

columns of different depth where the speed of sound exhibits vertical variation. The wave field is represented as a normal-mode series based on vertical eigenfunctions and the coefficients are obtained by matching the expansions on the inter-element vertical interfaces. The main feature of this model is the full coupling between the modes and the accurate representation of the backscattering effect. However, the approximation of continuous distributions of acoustic parameters by horizontally piecewise constant functions may require a large number of steps, in order that the horizontal stair-step size to be small enough for avoiding strong numerical backscattering, [9]. Also, the stepwise approximation of the bottom renders the numerical solution procedure cumbersome in the case of a continuously varying bottom boundary. An efficient and numerically stable solution has been recently presented by Luo et al [10], by combining a forward and backward marching technique. Another approach for treating the non-homogeneous waveguide in the context of coupled-mode theory is based on local mode expansions, [1,11]. In this case, the local-mode series may exhibit slow convergence, as illustrated in Ref.[12], where the expansion has been derived analytically in the case of a two dimensional wedge problem, showing that it consists of a slowly convergent part with terms of order $O(n^{-2})$ and another, fast convergent part with terms of order $O(n^{-4})$, where n denotes the mode index.

In the present work, an improved coupled-mode system is developed for modeling acoustic propagation and scattering in non uniform waveguides, governed by the Helmholtz equation. We consider a cylindrically symmetric, range-dependent waveguide containing fluid, characterized by a general, continuous sound speed profile presenting both horizontal and vertical variability. The layer is confined between a pressure-release (top) surface and a perfectly rigid (bottom) boundary of irregular shape; see Fig. 1. The wave field is excited by a point acoustic source, and thus, our development is equivalent to the construction of the Green's function. Our method is based on an enhanced local-mode series, which includes an additional mode enabling the consistent satisfaction of the boundary condition on the non-horizontal parts of the bottom and ensures energy conservation in the case of a lossless acoustic waveguide. The improved coupled-mode system is derived by means of an appropriate variational principle and is shown to be fully equivalent to the boundary value problem. We note here that the concept of the additional mode has been first introduced and studied by the authors in the context of small-amplitude water waves propagating over variable bathymetry regions [13, 14, 15]. This approach has been extended to non-linear water waves [16, 17] and hydrodynamic interaction problems with floating rigid and elastic bodies [18, 19].

The present paper is structured as follows: In Section 2 the studied problem is formulated as a transmission problem, using decomposition of the acoustic domain into three subdomains: (i) a bounded, range-independent subdomain in the vicinity of the source, (ii) the range-dependent subdomain which includes the bottom irregularity, and (iii) the unbounded, range-independent subdomain extended to infinity. The acoustic field in the two range-independent regions (near field and far field) is represented by the usual normal-mode series. Then, an equivalent variational formulation of the transmission problem is formulated in the intermediate bounded subdomain. In Sec. 3, the enhanced local-mode series is constructed for the representation of the pressure field in the middle subdomain, which includes an additional mode accounting for the effects of the bottom slope. For the enhanced series it is shown that the rate of decay is $O(n^{-4})$, for any smooth bottom profile.

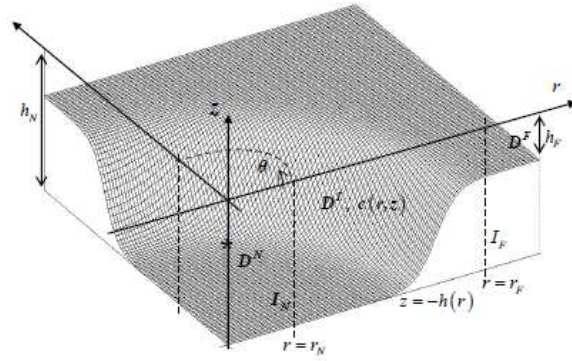


Figure 1. Geometrical configuration and basic notation. The point source is denoted by an asterisk.

Using the enhanced representation, in conjunction with the variational principle, the system coupled-mode equations on the horizontal plane is derived in Sec. 4, for the determination of the complex modal-amplitude functions. The present system contains an additional equation associated with the sloping-bottom mode and coupling terms with all other modes. Also, appropriate end-conditions are derived, ensuring the complete matching of the acoustic field on the vertical interfaces separating the three subdomains. Numerical examples are presented and discussed in Sec. 5. Finally, the main conclusions and directions for further study are provided in Sec. 6.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

A cylindrical co-ordinate system (r, z, θ) is introduced with origin at the free-surface, the vertical axis z being positive upwards. The wave field is excited by a monochromatic point source, located at the axis of symmetry ($r=0$) at an arbitrary depth z_0 .

The bottom boundary is described by a general smooth function $h(r)$, attaining constant (but possibly different) values in the near and far subregions $h=h_N$, in $r \leq r_N$, $h=h_F$, in $r \geq r_F$ respectively; see Fig. 1. The domain D is decomposed into three subdomains: (i) the bounded subdomain D^N , characterised by constant depth h_N and a sound speed profile presenting only vertical variability $c=c_N(z)$, (ii) the intermediate, range dependent subdomain D^I , with variable sound speed $c=c(r, z)$, (iii) the unbounded subdomain D^F ($r > r_F > r_N$), also characterised by constant depth h_F and a sound speed profile $c=c_F(z)$. The vertical (artificial) interface between D^N and D^I is denoted by I_N , and the one between D^I and D^F by I_F . The sound speed distribution is assumed to be continuous at the vertical interfaces, i.e. $c_N(z)=c(r_N, z)$ and $c_F(z)=c(r_F, z)$. The parts of the pressure-release surface and the hard bottom surface lying between the two cylinders $r=r_N$ and $r=r_F$ are denoted by I_0 and I_B , respectively. For time-harmonic waves $p(r, z; t) = \text{Re}\{p(r, z)\exp(-i\omega t)\}$, with $p(r, z)$ denoting the complex amplitude, the examined propagation/scattering problem is governed by the inhomogeneous Helmholtz equation for $(r, z) \in D$,

$$\Delta p(r, z) + k^2(r, z)p(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0), \quad (1)$$

where δ denotes the Dirac delta function, supplemented by the boundary conditions

$$p(r,0)=0, \quad \frac{\partial p(r,-h(r))}{\partial n}=0 \quad , \quad (2a,b)$$

and the radiation condition stating that the solution behaves like outgoing cylindrical waves as $r \rightarrow \infty$. In Eq. (1), $\Delta p(r,z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ is the Laplacian operator in cylindrical coordinates (taking into account the independence from the azimuthal angle θ in the examined case) and $k(r,z) = \omega / c(r,z)$ denotes the wavenumber, where $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency. The outward normal derivative on the bottom boundary, appearing in Eq. (2b), is expressed by

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \left(1 + (h'(r))^2 \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + h'(r) \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (3)$$

where a prime denotes differentiation of a quantity with respect to the (single) argument. The above problem can be reformulated as a transmission problem in the bounded subdomain D' , with the aid of the following normal-mode representations of the acoustic field in the subdomains D^N (near field) and D^F (far field):

$$p^N = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^N(z_0) Z_n^N(z) H_0^{(1)}(k_n^N r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^N Z_n^N(z) J_0(k_n^N r), \quad (r,z) \in D^N, \quad (4a)$$

$$p^F = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^F Z_n^F(z) H_0^{(1)}(k_n^F r), \quad (r,z) \in D^F, \quad (4b)$$

where $i = \sqrt{-1}$. Eqs. (4) are obtained from the eigenfunctions of Helmholtz equation (expressed in terms of Bessel and Hankel functions) in D^N and D^F , respectively. Clearly, the first term in the right-hand side of Eq. (4a) represents the point-source field [1,2] and the second term is the scattering field in D^N , having the property to be finite everywhere. Moreover, the right-hand side of Eq. (4b) represents the propagating field in D^F consisting of outgoing cylindrical modes and evanescent modes. In formulas (4) the functions of $Z_n^{N,F}(z)$ and the numbers $k_n^{N,F}$, $n=1,2,\dots$, are obtained as the eigenfunctions and eigenvalues, respectively, of the following, regular Sturm-Liouville problems:

$$\frac{d^2 Z_n^*(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{(c^*)^2} - (k_n^*)^2 \right) Z_n^*(z) = 0, \quad -h_* \leq z \leq 0, \quad (5a)$$

$$Z_n^*(0) = 0, \quad \frac{dZ_n^*(-h_*)}{dz} = 0, \quad (5b,c)$$

where $* \in \{N, F\}$. We recall here that each of the set $\{Z_n^*, n=1,2,\dots\}$ constitutes a basis in $L^2(-h_*, 0)$. Thus, the function p^N , given by Eq. (4a), satisfies Eqs. (1) and (2a,b) in D^N . Besides, the function p^F , given by Eq. (4b), satisfies the homogeneous Helmholtz equation in D^F , and Eqs. (2a,b) as well as the radiation condition.

2.1 The transmission problem

Given $k(r,z) = \omega / c(r,z)$ and the representations (4) of the pressure field in D^N and D^F , we are able to reformulate the original problem in the bounded subdomain D' and find the coefficients $\{C_n^N, n=1,2,\dots\}$ and $\{C_n^F, n=1,2,\dots\}$, and the field $p^I(r,z)$, in D' , satisfying the homogeneous Helmholtz equation

$$\Delta p^I + k^2(r, z) p^I = 0, \quad (r, z) \in D^I, \quad (6a)$$

the following boundary conditions on the pressure-release surface I_0 and on the bottom I_B

$$p^I(r, z=0) = 0, \quad \frac{\partial p^I(r, z=-h(r))}{\partial n} = 0, \quad (6b,c)$$

and the corresponding matching conditions at I_N and I_F

$$p^I = p^N, \quad \frac{\partial p^I}{\partial r} = \frac{\partial p^N}{\partial r}, \quad \text{for } r = r_N, \quad (6d,e)$$

$$p^I = p^F, \quad \frac{\partial p^I}{\partial r} = \frac{\partial p^F}{\partial r}, \quad \text{for } r = r_F. \quad (6f,g)$$

The above reformulation of the original problem as a transmission problem reduces the original problem to a bounded-domain and admits of a variational formulation. The variational principle, in conjunction with an enhanced local-mode representation of $p^I(r, z)$ in D^I , will serve as the basis for the derivation of the present improved coupled-mode system of horizontal differential equations for the numerical solution of the problem.

2.2 Variational formulation

Given the domain D^I , characterized by a smooth depth function $h = h_I(r)$, and a range-dependent wavenumber $k(r, z) = \omega / c(r, z)$, we proceed to formulate a functional F allowing us to state a variational formulation of the transmission problem. The admissible function space for the acoustic field $p^I(r, z)$, $(r, z) \in D^I$ is defined to be:

$$\mathcal{A}(D^I) = \left\{ p \in \left[C^2(D^I) \cap C^1(\bar{D}^I) \right] : p(r; z=0) = 0 \right\}, \quad (7)$$

where $C^2(D^I)$ denotes the space of functions having continuous derivatives up to the second order in D^I , and $C^1(\bar{D}^I)$ is the space of functions having continuous first order derivatives in \bar{D}^I (up to and including the boundary ∂D^I). Consider now the functional:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p^I, \{C_n^N\}_{n \in N}, \{C_n^F\}_{n \in N}) = & \frac{1}{2} \int_{D^I} (\nabla p^I)^2 dV - k^2 \int_{D^I} (p^I)^2 dV + \int_{I_N} \left(p^I - \frac{1}{2} p^N(\{C_n^N\}_{n \in N}) \right) \frac{\partial p^N(\{C_n^N\}_{n \in N})}{\partial r} dS + \\ & - \int_{I_F} \left(p^I - \frac{1}{2} p^F(\{C_n^F\}_{n \in N}) \right) \frac{\partial p^F(\{C_n^F\}_{n \in N})}{\partial r} dS - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^N Z_n^N(z_0), \end{aligned} \quad (8)$$

where dS and dV denote the elements of the boundary surface and of the volume, respectively. The independent arguments of functional \mathcal{F} (the degrees of freedom) are, as indicated in the left-hand side of the Eq. (8), the continuously distributed values of $p^I(r, z) \in \mathcal{A}(D^I)$ over the field points in D^I , and the sets of coefficients $\{C_n^N\}_{n \in N}$ and $\{C_n^F\}_{n \in N}$, associated with the representations of p^N and p^F , respectively. The functions $p^I(r, z) \in \mathcal{A}(D^I)$, and $p^N(r, z; \{C_n^N\}_{n \in N})$, $p^F(r, z; \{C_n^F\}_{n \in N})$, as defined by means of Eqs. (4a,b), constitute a solution of

the problem $P_r(D', k(r, z))$ if and only if they render the functional F stationary, i.e. they satisfy the variational equation:

$$\delta \mathcal{F}(p', \{C_n^N\}_{n \in N}, \{C_n^F\}_{n \in N}) = 0 . \quad (9)$$

By calculating the first variation δF of the functional (8), and using Green's theorem, the variational equation (9) takes the form

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} = & - \int_{D'} (\Delta p' + k^2 p') \delta p' dV + \int_{I_B} \frac{\partial p'}{\partial n} \delta p' dS + \int_{I_N} \left(\frac{\partial p^N}{\partial r} - \frac{\partial p'}{\partial r} \right) \delta p' dS + \int_{I_N} (p' - p^N) \delta \left(\frac{\partial p^N}{\partial r} \right) dS + \\ & \int_{I_F} \left(\frac{\partial p^F}{\partial r} - \frac{\partial p'}{\partial r} \right) \delta p' dS + \int_{I_F} (p' - p^F) \delta \left(\frac{\partial p^F}{\partial r} \right) dS = 0 , \end{aligned} \quad (10)$$

Using standard arguments of calculus of variations [20,21], in conjunction with the completeness of the sets $\{Z_n^{N,F}(z), n=1,2,\dots\}$ [22,23], we obtain that Eq.(10) is equivalent to the transmission problem, Eqs.(6).

The usefulness of the above variational principle hinges on the fact that it gives us the freedom to choose any particular representation for the unknown acoustic field p' in D' , provided that it will satisfy the admissibility condition, Eq. (7). In this way, a variety of possible algorithms for the numerical solution of the problem can be constructed. One possible choice is based on local-mode series and will be presented in the next section.

3. ENHANCED LOCAL-MODE REPRESENTATION

From now on the pressure field p' in the intermediate subdomain D' is simply denoted as p . The standard local-mode representation (briefly denoted by SR [1,10]) of the acoustic pressure p in the intermediate subdomain D' is given by

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(r) Z_n(z; r) . \quad (11)$$

In Eq. (11) the functions $Z_n(z; r)$, $n=1,2,\dots$, are obtained as the eigenfunctions of the local vertical eigenvalue problem, formulated at each horizontal position r

$$\frac{\partial^2 Z_n(z; r)}{\partial z^2} + (k^2(z; r) - k_n^2(r)) Z_n(z; r) = 0, \quad -h(r) \leq z \leq 0, \quad (12a)$$

$$Z_n(0; r) = 0, \quad \frac{\partial Z_n(-h(r); r)}{\partial z} = 0, \quad (12b,c)$$

where $k_n(r)$, $n=1,2,\dots$, are the corresponding eigenvalues. For any given $r \in [r_N, r_F]$, the functions $Z_n(z; r)$ are orthogonal. In addition we consider them to be normalized, i.e.

$$\int_{z=-h(r)}^0 Z_n(z; r) Z_m(z; r) dz = \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (12d)$$

where δ_{nm} is Kronecker's delta. In order to emphasize the parametric dependence of problem (12) on the horizontal position r , we use the terms local eigenvalues and local eigenfunctions, for $k_n(r)$ and $Z_n(z; r)$, respectively. In the series expansion (11), the first N_p terms,

corresponding to real horizontal eigenvalues ($k_n^2 > 0$), are the propagating modes, and the rest terms, $n > N_p$, corresponding to imaginary eigenvalues ($k_n^2 < 0$), are the evanescent modes.

According to the general theory of Sturm-Liouville problems (see, e.g. Higgins [22]) the set of z -functions $\{Z_n(z;r), n=1,2,\dots\}$ constitutes a complete orthonormal system in $L_2(-h(r),0)$, for each value of $r \in [r_N, r_F]$. Consequently, Eq. (11) is an L_2 -representation of the (unknown) pressure field p in D^I , with $P_n(r)$ the r -dependent coefficients of a generalized Fourier expansion of $p(r,z)$ with respect to the local vertical L_2 -basis $\{Z_n(z;r), n=1,2,\dots\}$. The function $P_n(r)$ is called the (complex) amplitude of the n^{th} mode.

The convergence properties of the series (11) or, equivalently, the rate of decay of the amplitudes $P_n(r)$ with respect to n , is slow

$$|P_n(r)| = O(n^{-2}), \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

for each $r \in [r_N, r_F]$, and this estimate cannot, in general, be further improved. Two conclusions can be drawn from Eq. (13). First, the acoustic field $p(r,z)$, as defined by Eq. (11), satisfies identically the pressure-release boundary condition (6b), because of property (12b) of the local vertical eigenfunctions. Secondly, the series (11) cannot, in general, be differentiated term-by-term, a fact that has been emphasized also in Ref. [12]. Besides, for any truncated version of (11), the approximate field

$$p(r,z) = \sum_{n=1}^N P_n(r) Z_n(z;r), \quad N < \infty, \quad (14)$$

satisfies the condition

$$\left[\partial p(r,z) / \partial z \right]_{z=-h(r)} = 0, \quad r_N < r < r_F, \quad (15)$$

which is incompatible with the bottom boundary condition (6c), when $h'(r) = dh(r)/dr \neq 0$. Eq. (15) is obtained by termwise differentiation of the series (14), in conjunction with Eq. (12c). From the physical point of view, condition (15) could lead to an inconsistency concerning the conservation of energy. By calculating the (average in one period) acoustic power flux $P_w(r)$ through any cylindrical surface of radius r centered at the origin and extended from the upper surface to the bottom, we obtain

$$\frac{dP_w(r)}{dr} = -\frac{\pi r}{\omega \rho} \text{Im} \left\{ \left[p \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + h' p \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right]_{z=-h} \right\} = \frac{\pi r}{\omega \rho} \sqrt{1 + (h'(r))^2} \text{Im} \left\{ \left[p \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \right]_{z=-h} \right\}, \quad (16)$$

where \bar{p} denotes the complex conjugate of the acoustic pressure and ρ is the medium density, which is assumed to be constant. From Eq. (16) it is quite clear that the total energy is conserved if and only if $\partial p / \partial n = 0$ at $z = -h(r)$. However, by substituting the representation Eq. (14) into Eq. (16) we obtain $dP_w / dr \neq 0$, since, in the case of a sloping bottom, $h'(r) \neq 0$ and $p_N \frac{\partial \bar{p}_N}{\partial r} \neq 0$. In the present paper we propose a simple extension of the SR (11) in order to overcome this deficiency. As explained in the introduction, the idea is to introduce a specific field element $\varphi(r,z)$, such that the difference

$$p_R(r, z) = p(r, z) - \varphi(r, z) \quad (17)$$

satisfies exactly the same boundary conditions as the vertical eigenfunctions $Z_n(z; r)$,

$$p_R(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial p_R(r, -h(r))}{\partial z} = 0. \quad (18a,b)$$

Then, the residual field $p_R(r, z)$ is expanded in terms of the L_2 -basis $\{Z_n(z; r), n=1, 2, \dots\}$,

$$p_R(r, z) = p(r, z) - \varphi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{R,n}(r) Z_n(z; r), \quad (19)$$

the latter series exhibiting much better convergence properties in the closed z -interval $[-h(r), 0]$. In fact, the series in the right-hand side of Eq. (19) converges as fast as $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ and, thus, it can be legitimately differentiated term-by-term. We proceed now to construct an appropriate representation for the function $\varphi(r, z)$. A possible choice is given by

$$\varphi(r, z) = P_{R,0}(r) Z_0(z; r), \quad \text{where } P_{R,0}(r) = \left[\frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \right]_{z=-h(r)}, \quad (20a,b)$$

and $Z_0(z; r)$ is any sufficiently smooth function in $[-h(r), 0]$, satisfying the conditions

$$Z_0(0; r) = 0, \quad \partial^2 Z_0(0; r) / \partial z^2 = 0, \quad \partial Z_0(-h(r); r) / \partial z = 1, \quad (21a,b,c)$$

for each $r \in [r_N, r_F]$. A specific convenient form of the function $Z_0(z; r)$ is given by the low-degree polynomial

$$Z_0(z; r) = -h(r) \left[\left(\frac{z}{h(r)} \right)^4 + \left(\frac{z}{h(r)} \right)^3 \right], \quad (22)$$

however, other choices are also possible. Condition (21a) implies that both $\varphi(r, z)$ and $p_R(r, z)$ satisfy the pressure-release condition (6b). The role and significance of condition (21b) will be made clear in the sequel. Condition (21c), in conjunction with Eqs. (17) and (20a,b), implies that

$$\left[\frac{\partial p_R(r, z)}{\partial z} \right]_{z=-h(r)} = \left[\frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \right]_{z=-h(r)} - \left[\frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial z} \right]_{z=-h(r)} = 0. \quad (23)$$

The function $P_{R,0}(r)$ can be interpreted as an additional degree of freedom, accounting for the non-homogeneity in the vertical derivative caused by the sloping bottom. However, Eq. (20b) cannot be used for the direct calculation of $P_{R,0}(r)$, since $\partial p(r, z) / \partial z$, at $z = -h(r)$, is not known a priori. The function $P_{R,0}(r)$ will be calculated along with all other amplitude functions $P_{R,n}(r)$, $n=1, 2, \dots$, during the solution procedure. By substituting Eq. (20a) into Eq. (19), we obtain the following, enhanced local-mode representation (briefly denoted by ER) in the range dependent subdomain D' :

$$p(r, z) = P_{R,0}(r)Z_0(z; r) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{R,n}(r)Z_n(z; r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{R,n}(r)Z_n(z; r), \quad (24)$$

The additional term $P_{R,0}(r)Z_0(z; r)$, included in the right-hand side of Eq. (24), will be called the sloping-bottom mode; see also Ref.[13].

3.1 Convergence of the enhanced modal expansion

To illustrate the role and significance of the extra sloping-bottom mode in the ER, let us consider here the two-dimensional problem concerning a wedge of angle α , filled by a homogeneous ideal fluid. In this case, x denotes the horizontal distance measured from the edge, and z is the vertical coordinate (positive upwards). The depth function is then $h(x) = |x| \tan \alpha$. The wedge-modes of the 2D Helmholtz equation are obtained by separation of variables and are given by (see, e.g., [11])

$$p_\nu(x, z) = \sin\left(-\nu \tan^{-1}\left(\frac{z}{x}\right)\right) H_\nu^{(1)}\left(k\sqrt{x^2 + z^2}\right), \quad \nu = \frac{(\ell + 0.5)\pi}{\alpha}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

In this case, the SR and ER are defined by formulas similar to Eqs. (11) and (24) respectively. The convergence of SR series has been studied in [11], where the amplitudes associated with each wedge mode $p_\nu(x, z)$ are shown to be:

$$P_n^{(\nu)}(x) = \frac{4h\sqrt{2h}}{\pi^2} \frac{\partial p_\nu(x, z = -h)}{\partial z} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + O(n^{-4}). \quad (26)$$

The summation of the slowly convergent $O(n^{-2})$ part of the infinite series (25) is obtained analytically in [11], showing that the acoustic pressure field satisfies the correct bottom boundary condition. Moreover, in this particular 2D case, we clearly see that the remaining part of the infinite series representation of the solution consists of terms of order $O(n^{-4})$. Both findings are in full agreement with our general results. In our case the summation of the slowly convergent part of series is achieved by means of the additional sloping-bottom mode of the ER series (24), and will be illustrated below for the wedge problem.

As an example we consider the second wedge mode for a 45° -wedge ($\ell=1$ and $\alpha = \pi/4$ in Eq. 25), for frequency $f=15\text{Hz}$, and sound speed $c=1500\text{m/sec}$ ($k = 2\pi f/c = 0.063\text{m}^{-1}$). The present modal amplitudes $|P_{R,n}|$ and $|P_n|$ have been calculated at a horizontal position $|x|=300\text{m}$ from the edge, and are shown in Fig.3. For both representations (ER and SR, respectively), the modal amplitudes are plotted as functions of the mode number n (up to $n=500$), by using thick solid lines.

It is clearly verified, with the aid of the logarithmic scale in Fig.3, that the ER- coefficients exhibit a decay $O(n^{-4})$, while the SR-coefficients show a decay $O(n^{-2})$, for large n . The ER series have been calculated by using the form (22) for $Z_0(z; r)$. This result also has a significant effect on the solution scheme, since the number of modes required by the truncated SR-series to produce numerically convergent results is much larger than the one required by the truncated ER-series. For example, as it can be seen in Fig.3, for obtaining an error (controlled by the amplitude of the local modes) $\varepsilon=0.001$, a number of 70 modes has to be retained in SR, while using ER reduces this requirement to only 20 modes. (Let it be noted that in the local depth of $|x|=300\text{m}$ the number of propagating modes is 6).

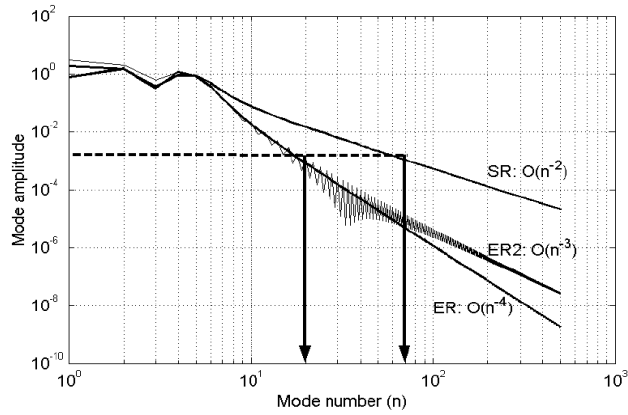


Figure 3. Coefficients $|P_n(x)|$ and $|P_{R,n}(x)|$ of the local-mode series in the case of a 45° – wedge, at $x = -300m$, in terms of the mode number n , as obtained by SR and ER, respectively, for the second wedge mode ($\ell = 1$). Wave frequency $f=15\text{Hz}$. Sound speed $c=1500\text{m/s}$ ($k = 0.0628\text{m}^{-1}$).

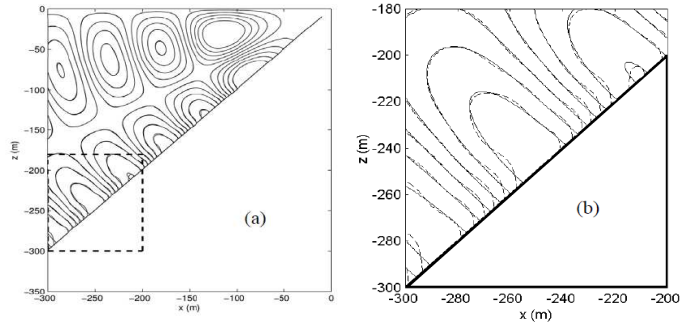


Figure 4. Contour lines of the second mode ($\ell = 1$) in the case of a 45° – wedge. (a) In the left subplot the real part of the second-mode field is shown, as obtained by SR (dashed lines) and ER (solid lines), using 11 terms in the corresponding local-mode series. (b) Detail of (a) in the subarea near the bottom shown by a dashed box. The acoustic parameters are the same as in Fig. 3.

This fact also enables the application of the present ER model to much higher frequencies and larger range-dependent domains than the standard model based on SR. The thin solid lines also plotted in Fig.3 as ER2, represent the ER-amplitudes, which was obtained using $Z_0(z;r) = h(r) \left[\left(\frac{z}{h(r)} \right)^3 + \left(\frac{z}{h(r)} \right)^2 \right]$, that does not satisfy condition (21b). It can also clearly seen that, in this case, the ER-amplitudes present a slower decay of order $O(n^{-3})$, for large n .

The acoustic field associated with the second ($\ell = 1$) wedge-mode, in the range of 300m from the edge, is plotted in Fig. 4 by using equipotential (iso-pressure) lines, as obtained by the SR (dashed lines) and the ER (solid lines), respectively. In this range, the number of propagating modes N_p associated with the local-mode series varies from 6 (at $|x|=300\text{m}$ from the edge) to 0 (at $|x|=20\text{m}$ from the edge). Numerical results have been obtained by truncating the local modes series (both SR and ER) to 11 terms. At the scale of Fig 4(a), both representations more or less agree each other, and with the analytical expression (Eq. 25, for $\ell = 1$).

Fig 4(b) is a zoom on the left-down corner of the domain, indicated by using a dashed box in Fig. 4(a). The pattern shown by the solid lines in this figure is quite reasonable and in perfect

agreement with the analytical expression, Eq. (25). Moreover, the equipotential lines intersect the bottom profile perpendicularly (i.e. $\partial p_N / \partial n = 0$, at $z = -h(x)$). It is also clearly seen in this figure that SR-lines bend and become vertical near the bottom, independently of the bottom slope, indicating that the SR numerical solution satisfies the condition $\partial p_N / \partial z = 0$ at the bottom $z = -h(x)$.

4. THE COUPLED MODE SYSTEM (CMS)

Let us reconsider the variational principle, Eq. (9) or Eq. (10), assuming that $p^l(r, z) \in \mathcal{A}(D^l)$ is represented by means of the ER series, Eq. (24). In this way, the functional $\mathcal{F}(p^l, \{C_n^N\}_{n \in N}, \{C_n^F\}_{n \in N})$, given by Eq. (8), is transformed to an equivalent one of the form

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{P_n(r)\}_{n=0,1,2,\dots}, \{C_n^N\}_{n \in N}, \{C_n^F\}_{n \in N}) \quad , \quad (27)$$

where, from now on, for simplicity of the presentation, we use the symbol $P_n(r)$, instead of $P_{R,n}(r)$, to denote the modal amplitudes of the ER series.

Thus, the degrees of freedom of the system associated with the admissible wave potential $p(r, z)$ in D^l are equivalently described by the modal amplitudes $P_n(r)$, $r_N < r < r_F$, $n = 0, 1, \dots$. Associated with the vertical interfaces I_N and I_F are the degrees of freedom $\{P_n(r_N)\}_{n=1,2,\dots}$ and $\{P_n(r_F)\}_{n=1,2,\dots}$ of the amplitude values at the left-endpoint $r = r_N$, and at the right-endpoint $r = r_F$, respectively, as well as the sets of coefficients $\{C_n^N, n = 1, 2, \dots\}$ and $\{C_n^F, n = 1, 2, \dots\}$. Especially for the sloping-bottom amplitude $P_0(r)$, the following end conditions are assumed

$$P_0(r_N) = P_0(r_F) = 0, \quad \text{and} \quad \frac{dP_0(r_N)}{dr} = \frac{dP_0(r_F)}{dr} = 0 \quad , \quad (28)$$

in accordance with Eq. (20b) and the smoothness assumptions concerning the depth function $h(r)$. The use of a different (equivalent) set of degrees of freedom of the system in the variational principle leads to a different (equivalent) set of equations for the present transmission problem.

4.1 Derivation of the coupled-mode system

In order to derive the coupled-mode equations, we first assume that all the variations except $\delta p^l(r, z)$ in $D^l \cup I_B$ are kept zero. Thus, the last four integrals of the variational equation (10) can be dropped, obtaining

$$-\int_{D^l} (\Delta p^l + k^2 p^l) \delta p^l dV + \int_{I_B} \frac{\partial p^l}{\partial n} \delta p^l dS = 0 \quad . \quad (29)$$

By using the enhanced representation for $p^l(r, z)$, Eq. (24), we obtain the following system of second-order differential equations on the horizontal plane (CMS):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(r) \frac{d^2 P_n(r)}{dr^2} + b_{mn}(r) \frac{dP_n(r)}{dr} + c_{mn}(r) P_n(r) = 0, \quad (30)$$

in $r_N < r < r_F$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, The r -dependent coefficients $a_{mn}(r)$, $b_{mn}(r)$, $c_{mn}(r)$ are all real quantities and are defined as follows:

$$a_{mn}(r) = \langle Z_n, Z_m \rangle, \quad (31a)$$

$$b_{mn}(r) = (1/r) \langle Z_n, Z_m \rangle + 2 \langle \partial Z_n / \partial r, Z_m \rangle + (dh/dr) Z_n(-h) Z_m(-h), \quad (31b)$$

$$c_{mn}(r) = \langle \partial^2 Z_n / \partial z^2 + \partial^2 Z_n / \partial r^2, Z_m \rangle + (1/r) \langle \partial Z_n / \partial r, Z_m \rangle + \left(\frac{\partial Z_n(-h)}{\partial z} + \frac{dh}{dr} \frac{\partial Z_n(-h)}{\partial r} \right) Z_m(-h), \quad (31c)$$

where $\langle f, g \rangle = \int_{z=-h}^{z=0} f(z) g(z) dz$ is the inner product of L_2 space of functions, the integration always considered with respect to the vertical variable $z \in (-h(r), 0)$. The CMS is supplemented by the following boundary conditions

$$\frac{dP_0(r_N)}{dr} = \frac{dP_0(r_F)}{dr} = 0, \quad (32a)$$

$$\frac{dP_n(r_N)}{dr} + A_n P_n(r_N) = B_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32b)$$

$$\frac{dP_n(r_F)}{dr} + D_n P_n(r_F) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32c)$$

where the coefficients A_n , B_n , D_n are defined by

$$A_n = k_n^N J_1(k_n^N r_N) / J_0(k_n^N r_N), \quad B_n = -Z_n^N(z_0) / 2\pi r_N J_0(k_n^N r_N), \quad (33a,b)$$

$$D_n = k_n^F H_1^{(1)}(k_n^F r_F) / H_0^{(1)}(k_n^F r_F), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (33c)$$

Also, from the solution of the above system, the coefficients C_n^N , C_n^F are calculated as follows

$$C_n^N = \left\{ P_n(r_N) - \frac{i}{4} Z_n^N(z_0) H_0^{(1)}(k_n^N r_N) \right\} / J_0(k_n^N r_N), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34a)$$

$$C_n^F = P_n(r_F) / H_0^{(1)}(k_n^F r_F), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (34b)$$

4.2 Remarks

(i) Despite of the coupling between the differential equations (60), the boundary conditions (47) are uncoupled. (ii) Under the smoothness assumption for the depth function $h(r)$, all the coefficients $a_{mn}(r)$, $b_{mn}(r)$, $c_{mn}(r)$ of the CMS are continuous functions of r and can be calculated in terms of $Z_0(z; r)$ and $\{Z_n(z; r), n = 1, 2, \dots\}$. (iii) Discontinuities of $h(r)$, $h'(r)$, and $h''(r)$ can also be treated by introducing appropriate domain decomposition with matching boundaries/interfaces at the points of discontinuities. (iv) An important result concerning the present CMS is that it provides conservation of the acoustic power flux $P_w(r)$ through any vertical cylindrical surface, which is the correct result in the case of a lossless waveguide.

5. NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION

In this section, the discrete scheme for the numerical solution of the CMS is introduced, and numerical results are presented for upslope environments in shallow water. Comparisons of results obtained by using the present improved method based on ER, vs. the ones obtained by using SR, are presented and discussed. By truncating the ER local-mode series to a finite number N of terms (modes), and retaining the sloping-bottom mode, the propagating modes and a number of evanescent modes, the following approximation of the acoustic wave field is obtained

$$p(r, z) = \sum_{n=0}^N P_n(r) Z_n(z; r) \quad . \quad (35)$$

The discrete system is obtained by using central, second-order finite differences to approximate the derivatives of the unknown modal-amplitude functions $P_n(r)$, $n=0,1,2,\dots,N$, appearing in the CMS, for $m=0,1,\dots,N$. Discrete boundary conditions are obtained from Eqs. (32) by using second-order forward and backward differences to approximate r -derivatives. Thus, the discrete scheme is uniformly of second order in the horizontal direction. On the basis of the above considerations, the present system of differential equations is finally reduced to a linear algebraic system. The coefficient matrix of the system is block structured, with three-diagonal subblocks, and has a total dimension $N_d = (N+1)(N_s+1)$, where N_s is the number of segments subdividing the interval $[r_N, r_F]$. The forcing appears only at the left endpoint $r=r_N$; see Eq. (32b). All numerical results presented in this section are based on the choice (22) for the function $Z_0(z; r)$. However, extensive numerical experimentation using other admissible functions for $Z_0(z; r)$ has shown that the final results concerning the acoustic wave field, as obtained by the ER, remain the same for all valid forms of the vertical structure of the sloping-bottom mode.

5.1 A steep smooth upslope

In order to examine the effects of steep bathymetry on the numerical solution, we consider a smooth but steep underwater shoal, with maximum bottom slope 120% and mean bottom slope 25%. A sketch of this bottom profile is shown in Fig. 5. The pulsating source is located at $r=0$, at depth $z_0=-25\text{m}$, and its frequency is $f=50\text{ Hz}$. The sound speed of the environment is taken to be constant $c=1500\text{ m/s}$ (corresponding to seawater). In this case, the number of propagating modes in the deep and the shallow water regions is 7 and 3, respectively. Also, in the examined case, in Fig. 5 the equipotential lines of the modulus of the acoustic field $|p(r, z)|$ in the variable bathymetry subdomain have been plotted, as obtained by using the ER model (solid lines) and retaining 15 modes in the series. The pattern shown by the solid lines in Fig. 5 is quite reasonable and the equipotential lines intersect the bottom profile perpendicularly, as they ought. This result fully justifies the usefulness of the sloping-bottom mode, especially in subareas where the boundaries exhibit significant variation.

Next, in Fig. 6 the moduli of the modal-amplitude functions, i.e. the quantities $|P_n(r)|$, $r_N \leq r \leq r_F$, are presented, as obtained by using both the ER and the SR, for mode-numbers n in the regime of evanescent modes ($8 \leq n \leq 14$).

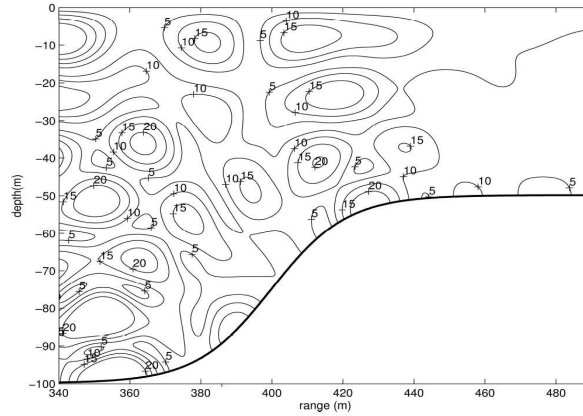


Figure 5. Contour plot of the modulus of the acoustic pressure field $|p(r, z)|$, for the case of the step upslope.

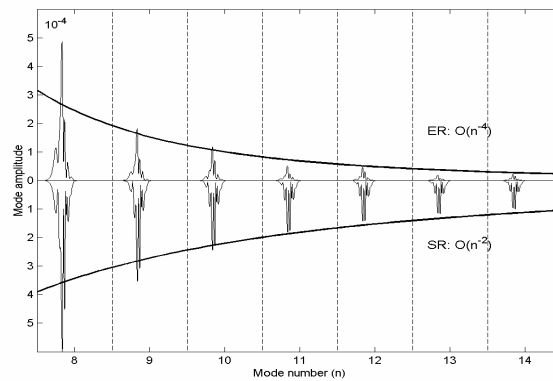


Figure 6. Moduli $|P_n(x)|$ and $|P_{R,n}(x)|$ of mode amplitudes vs. $r \in [r_N, r_F]$, for various modes: $n=8,9,\dots,14$, as obtained using SR and ER, respectively.

The horizontal axis in Fig. 6 is a multiple replica of the interval $[r_N, r_F]$. In the n -th replica of interval $[r_N, r_F]$ the amplitude $|P_n(r)|$, of the n -th mode is plotted. For example, in the interval indicated by the number 9, the function $|P_9(r)|$, is plotted vs. $r \in [r_N, r_F]$, as obtained by means of ER and SR, respectively. Numerical results shown have been obtained by subdividing the range $r_F - r_N$ into $N_s = 300$ segments and by retaining a total number of 15 modes in ER and SR. This choice was made in order to keep the same dimension of the discrete system in the two cases ($N_d = 4515$). Also, in the same figure, two curves $O(n^{-4})$ and $O(n^{-2})$ have been drawn, which bound the maxima of the amplitudes of the modal functions in the interval $[r_N, r_F]$, as obtained by the ER and the SR, respectively. It is verified from this figure that the ER-amplitudes present a decay $O(n^{-4})$, while the SR-amplitudes decay as $O(n^{-2})$, uniformly for $r \in [r_N, r_F]$.

5.2 Linear bottom profile

Next, the case of a linear upslope isovelocity environment is considered with bottom slope $\alpha=3\text{deg}$, as shown in Fig.7. The acoustic field is excited from a point source of frequency $f=25\text{Hz}$, located at depth 100m. The sound speed is $c=1500\text{m/s}$ and again, the number of propagating modes at the deep region is 7.

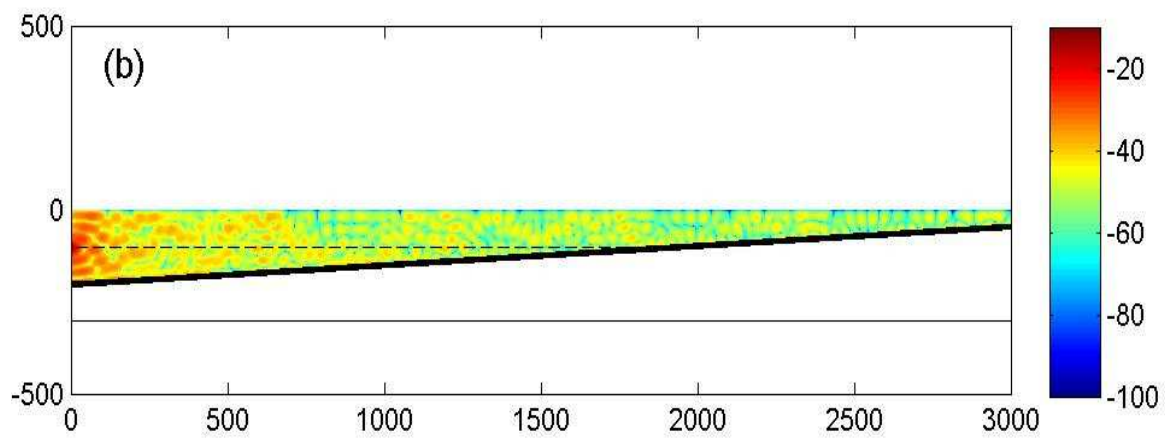
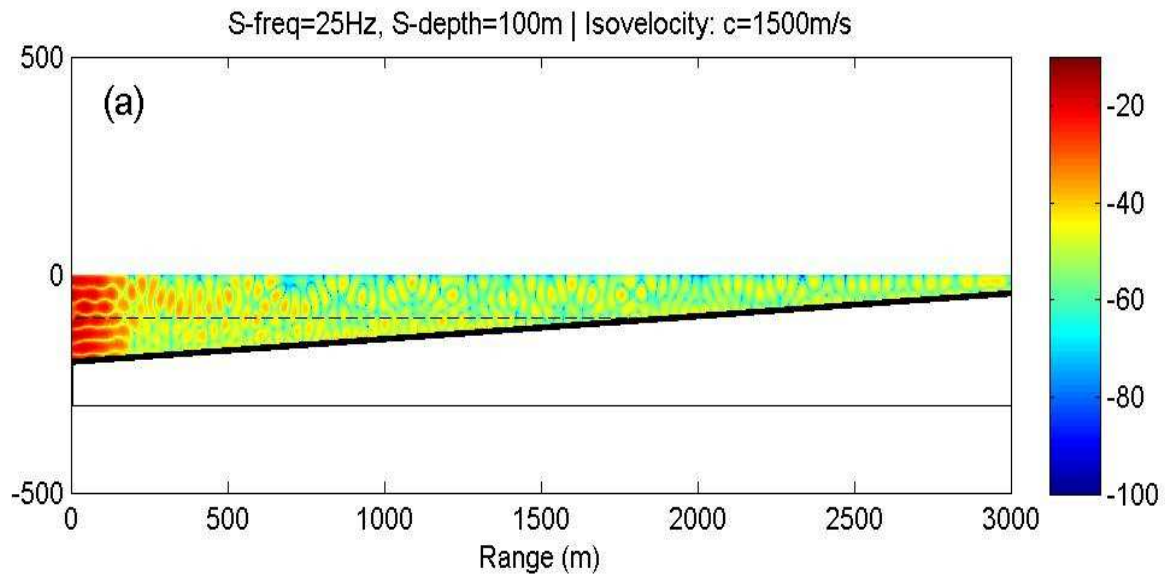


Figure 7. Acoustic field in the case of linear upslope environment. Transmission Loss in dB.

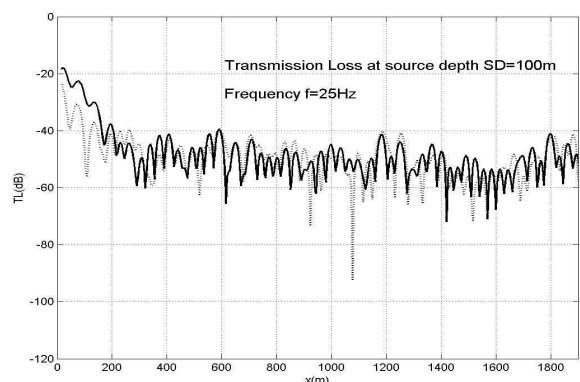


Figure 8. Calculated TL(dB) in the case of linear upslope.

The calculated acoustic field in the domain by the present CMS, using a total number of 15 modes and $N=750$ horizontal segments, is shown in Fig.7(a). In particular, the transmission loss (TL in dB) is plotted with reference to the modulus of the field at 1m from the point source $|p_{r=1m}|$,

$$TL(r, z) = -20 \log \left(\frac{|p(r, z)|}{|p_{r=1m}|} \right). \quad (36)$$

In this case, due to the small horizontal extent of the upslope environment, the effect of geometrical spreading is small, and we may use for indication purposes the analytical solution of the acoustic field in the case of a Cartesian wedge, bounded above by a Dirichlet and below by a Neumann boundary, generated by a point source, derived by Buckingham [24]; see also Qin et al [25]. The latter solution for the same source depth and frequency is plotted in Fig.7(b). Furthermore, the calculated TL distribution over the horizontal range, at the level of source depth (indicated by using dashed line in Fig.7), is comparatively plotted in Fig.8. Thick solid line is used for the present CMS solution corresponding to the field in the cylindrical environment, and is compared against the Cartesian wedge analytical solution, for the same depth profile, shown by using dashed line in Fig.8.

6. CONCLUSIONS

In this work, an enhanced local-mode representation of the acoustic field in range dependent environments (with variable bathymetry) is introduced, which includes, except of the local propagating and evanescent modes, an additional term, the sloping-bottom mode, effectively present only in the subregions of variable bathymetry. Using this representation, in conjunction with a variational principle, an improved system of horizontal coupled-mode equations is derived for the modal amplitudes, which produces a rapidly convergent series solution, consistent with the bottom boundary condition and the conservation of energy. The key feature of the present method is the introduction of the additional sloping-bottom mode, which provides an implicit summation of the slowly convergent, $O(n^{-2})$, part of the local-mode series, rendering the remaining part to converge much faster, like $O(n^{-4})$. The obtained coupled-mode system of horizontal equations, being fully equivalent to any other complete model, presents a number of advantages as: (i) The number of modes required for an accurate numerical solution is relatively small, even in environments with steep bottom profiles. (ii) It provides high-quality information concerning the acoustic pressure and velocity up to and including the bottom boundary. (iii) It is naturally reduced to simplified models as the standard coupled-mode model or the adiabatic approximation, in subareas where the physical conditions permit such a simplification. In this sense, the present method shares characteristics of both a top-down approach, ensuring completeness and consistency, and a down-top approach, letting the user to go back up to a very simple uncoupled model, saving a lot of computational burden. Finally, the present theory can be extended to treat acoustic propagation and scattering problems in 3D multi-layered waveguides. First results in this direction have been presented in Athanassoulis et al [33].

REFERENCES

- [1] C.A. Boyles, Acoustic waveguides. Applications to ocean science. J.Wiley & Sons, 1984.
- [2] F. Jensen, W. Kupperman, M. Porter, and H. Schmidt, Computational Ocean Acoustics. AIP Press, 1994.
- [3] E.M. Salomons, Computational Atmospheric Acoustics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

- [4] B. Z. Katsenelenbaum, L. Mercader del Rio, M. Pereyaslavets, M. Sorolla Ayza, M. Thumm, *Theory of Nonuniform Waveguides, The Cross-Section Method*. IEE London, 1998.
- [5] D. Lee and M. H. Schultz, *Numerical Ocean Acoustic Propagation in Three Dimensions*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [6] S. Grilli, T. Pedersen, P. Stephanisen, A hybrid boundary element method for shallow acoustic propagation over an irregular bottom, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21 (1998) 131-145.
- [7] R.B. Evans, A coupled mode solution for the acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom, *Journal of the Acoustical Society of America*, 74 (1983) 188-195.
- [8] R.B. Evans, The decoupling of stepwise coupled modes, *Journal of the Acoustical Society of America*, 80(5), (1986) 1414-1418.
- [9] F.B. Jensen, Discretization criteria for stair-step representations of smoothly varying bathymetry in ocean waveguides, *Proc. of the 3rd European Conference on Underwater Acoustics*, June 24-18 1996, Heraklion, Crete, Greece, edited by J.S. Papadakis, Crete University Press 1996, pp. 285-290.
- [10] W., Luo, R., Zhang, H., Schmidt, An efficient and numerically stable coupled-mode solution for range dependent propagation *J. Comp. Acoust.* 20(3), (2012), 1250008.
- [11] J.A. Fawcett, A derivation of the differential equations of coupled mode propagation, *Journal of the Acoustical Society of America*, 97 (1992) 290-295.
- [12] O.A. Godin, A note on differential equations of coupled mode propagation in fluids, *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(1) (1998) 159-168.
- [13] G.A. Athanassoulis, K.A. Belibassakis, A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions, *Journal of Fluid Mechanics*, 389 (1999) 275-301.
- [14] K.A. Belibassakis, G.A. Athanassoulis, Th. Gerostathis, A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry, *Applied Ocean Research*, 23 (2001) 319-336.
- [15] K.A. Belibassakis, G.A. Athanassoulis, Three-dimensional Green's function of harmonic water-waves over a bottom topography with different depths at infinity, *Journal of Fluid Mechanics*, 510 (2004) 267-302.
- [16] K.A. Belibassakis, G.A. Athanassoulis, Extension of second-order Stokes theory to variable bathymetry, *Journal of Fluid Mechanics*, 464 (2002) 35-80.
- [17] G.A. Athanassoulis, K.A. Belibassakis, A coupled-mode method for non-linear water waves in general bathymetry with application to steady travelling solutions in constant, but arbitrary, depth, *Discrete and Continuous Dynamical Systems DCDS-B*, (2007) pp. 75-84 (special volume of selected papers from 6th Int. Conf. on Dynamical Systems and Differential Equations, June 25-28, Poitiers, 2006).
- [18] K.A. Belibassakis, A boundary element method for the hydrodynamic analysis of floating bodies in general bathymetry regions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32 (2008) 796-810.
- [19] K.A. Belibassakis, G.A. Athanassoulis, A coupled-mode model for the hydroelastic analysis of large floating bodies over variable bathymetry regions, *Journal of Fluid Mechanics*, 531 (2005) 221-249.
- [20] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of variations*. Prentice Hall, 1962.
- [21] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics Science and Engineering*. D. Reidel, 1977.
- [22] J.R. Higgins, *Completeness and basis properties of sets of special functions*. Cambridge University Press, 1977.

- [23] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw Hill, New York, 1995.
- [24] M.J. Buckingham, Theory of acoustic radiation in corners with homogeneous and mixed perfectly reflecting boundaries J. Acoust. Soc. Am. 86 (1989), 2273.
- [32] J.-X. Qin, W.-Y. Luo, R.-H. Zhang, C-M. Yang, Three-dimensional sound propagation and scattering in two-dimensional waveguides, Chinese Phys. Lett. 30 (2013), 114301.
- [33] G.A. Athanassoulis, K.A. Belibassakis, D.A. Mitsoudis, N.A. Kampanis, V.A. Dougalis, Coupled-mode and finite-element solutions of underwater sound propagation problems in stratified acoustic environments, Journal of Computational Acoustics, 16(1) (2008) 83-116.